

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS USANDO MMA

TOPOLOGICAL OPTIMIZATION OF THREE-DIMENSIONAL STRUCTURES USING MMA

**Hélio Luiz Simonetti¹; Valério S. Almeida²; Francisco de Assis das Neves³
Virgil Del Duca Almeida⁴**

¹Doctor, Department of Mathematics, Federal Institute of Minas Gerais (IFMG), e-mail: helio.simonetti@ifmg.edu.br

²Doctor, Department of Geotechnical and Structural Engineering from the School of Engineering of the University of São Paulo (EPUSP), e-mail: valerio.almeida@pq.cnpq.br

³Doctor, Department of Civil Engineering, Federal University of Ouro Preto (UFOP), e-mail: fassis@ufop.edu.br

⁴MSc, Department of Automation and Control Engineering, Federal Institute of Minas Gerais (IFMG), e-mail: virgil.almeida@ifmg.edu.br

RESUMO

Na otimização estrutural, um dos campos mais fascinantes é a Otimização Topológica (TO). Neste artigo, os métodos de otimização topológica evolucionária Smoothing Evolutionary Structural Optimization (SESO) and Sequential Element Rejection and Admission (SERA) são usados para minimizar o crescimento da compliance usando o Método das Assíntotas Móveis (MMA). O efeito da mudança das assíntotas é controlar a geração de subproblemas, que podem tanto estabilizar quanto acelerar a convergência do processo geral. A otimização topológica tridimensional de dois problemas de grande escala: a) uma viga cantilever em balanço com carga distribuída, b) uma viga MBB e c) uma cantilever com carga concentrada é realizada. Assim, para resolver problemas computacionais com alto custo computacional e excesso de memória, que ocorrem nesses tipos de problemas, o Método do Gradiente Conjugado Precondicionado (PCG) é utilizado como solucionador iterativo. Os resultados obtidos são comparados com o Material Isotrópico Sólido com Penalização (SIMP) que utiliza para convergência os Critérios de Otimalidade (OC).

Palavras-chave: Otimização Topológica, Método de Assíntotas Móveis, Critérios de Otimalidade, SESO, SERA.

ABSTRACT

In structural optimization, one of the most fascinating fields is Topological Optimization (TO). In this article, the evolutionary topological optimization methods Smoothing Evolutionary Structural Optimization (SESO) and Sequential Element Rejection and Admission (SERA) are used to minimize the growth of compliance using the Method of Moving Asymptotes (MMA). The effect of changing asymptotes is to control the generation of subproblems, which can both stabilize and accelerate the convergence of the overall process. The three-dimensional topological optimization of two large-scale problems: a) a cantilever beam with distributed load, b) an MBB beam and c) a cantilever with concentrated load is performed. Therefore, to solve computational problems such as cost and excess memory, which occur in these types of problems, the Preconditioned Conjugated Gradient Method (PCG) is used as an iterative solver. The results obtained are compared with the Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) that uses for convergence the Optimality Criteria (OC).

Keywords: Topology Optimization, Method of Moving Asymptotes, Optimality Criteria, SESO, SERA.

1. INTRODUÇÃO

A Otimização Topológica (OT) busca a distribuição ótima de material no domínio da solução para maximizar um desempenho mecânico sob determinadas restrições. Seus algoritmos removem e adicionam seletivamente os elementos ineficientes para obter uma configuração ótima, Tovar *et al.* (2006). A OT é considerado um campo importante na Otimização Estrutural (OE), área que atende interesse de projetistas e fabricantes de projetos mecânicos. É um campo de pesquisa que nas duas últimas décadas apresentou uma rápida expansão de problemas planos para tridimensionais. Possui importantes aplicações práticas nas indústrias automotiva e aeroespacial e hoje é uma ferramenta importantíssima na Indústria 4.0 com aplicações em Manufatura Aditiva, para exemplificar esse potencial da OT o trabalho de Zegard e Paulino (2016), mostra uma integração da OT com a Manufatura Aditiva aplicada na área médica com a reconstrução de crânio facial. Munk et al. (2017) abordam o problema de OT na asa de uma aeronave hipersônica considerando os efeitos da temperatura na estrutura, usando o algoritmo BESO. Sigmund (2001) desenvolveu um código Matlab, conhecido como 99 line, para otimização de topologia com base na minimização da compliance, usando critérios de otimização que dependem da sensibilidade da função objetivo. Liu e Tovar (2014), desenvolveram um código computacional para a OT de estruturas tridimensionais. O programa implementado no MATLAB usando modelo SIMP. Zuo e Xie (2015) implementaram um algoritmo de OT usando Python para minimizar a rigidez da estrutura, emprega método BESO em conjunto com o software Abaqus.

Neste artigo, para resolver o problema de OT, usam-se os métodos Optimality Criteria (OC) por Sigmund (2001) e Method of Moving Asymptotes (MMA) por Svanberg (1987). Esses métodos foram implementados nos procedimentos evolucionários da OT, Smoothing Evolutionary Structural Optimization (SES0) – Simonetti et al. (2014) e Sequential Element Rejection and Admission (SERA) – Rozvany e Querin (2004) e são usados para minimizar o crescimento da compliance. O método MMA baseado em gradiente é empregado para resolver o problema de otimização e, portanto, a análise de sensibilidade também é realizada para lidar com problemas de otimização em grande escala. O método OC é o método mais usado em OT por ser rápido e eficiente. Neste artigo, propõe a OT tridimensional de dois problemas de grande escala: a) uma viga cantilever e b) uma viga MBB. Para resolução dos sistemas lineares, que demanda um alto custo e excesso de memória, o Método do Gradiente Conjugado Pré-condicionado (PCG) com o uso do preconditionador Jacobi é usado como solver iterativo. Os resultados obtidos tem boa acurácia com a literatura, mostrando que SES0 e SERA são métodos evolucionários de otimização com capacidade para resolver problemas de OT tridimensionais com baixo custo computacional e fácil implementação. Destaca-se que um índice de performance proposto por Liang (2000b) foi implementado e incorporado ao programa de TO.

2. MÉTODOS EVOLUCIONÁRIOS

Os métodos de otimização estrutural evolucionários são baseados em uma heurística simples de que a estrutura evolui para um ótimo, removendo lentamente do domínio da solução elementos ineficientes para a estrutura. Destaca-se que nos métodos SES0 e SERA em determinadas regiões o material pode removido e adicionado do domínio de projeto até que uma configuração ótima seja alcançada, sendo assim de natureza bidirecional. Mas, a principal diferença entre eles está na heurística de remoção e adição dos elementos do domínio da estrutura. No método SERA são usados dois critérios separados de remoção e adição de elementos do domínio, permitindo a alteração de status "virtual" para "real" e vice-versa. Assim, a topologia final é construída com todo o material real presente na estrutura. O método SES0 usa apenas um critério para realizar esse procedimento. Para isso, os elementos que atendem este critério, são removidos do domínio, ordenados, agrupados e p% dos grupos com menores

compliance são descartados e (1-p%) são devolvidos a estrutura suavizando o processo iterativo de otimização. Além disso, o uso de variáveis discretas garante que a topologia final está livre de regiões cinzentas como ocorre em métodos contínuos, como o SIMP. Destaca-se ainda que o método SESO tem como variáveis discretas os elementos do domínio enquanto o SERA possuem como variáveis a densidade do elemento.

2.1 Formulação do Problema de Otimização – SESO e SERA

O problema de otimização para os métodos SESO pode ser escritos da seguinte forma.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && C = F^T u \\ & \text{sujeito} && Ku = F \\ & && V(x) = \sum_{i=1}^n x_i^T V_i \leq V^* \\ & && X = \{x_1 \quad x_1 \quad \dots \quad x_n\}, x_i = 10^{-9} \text{ e } x_i = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

Onde V_i é o volume o do elemento, V^* é o volume prescrito, X é o vetor de variáveis e x_i representa a variável de projeto do j-ésimo elemento.

A formulação do problema de otimização usando o método SERA pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && C = F^T u \\ & \text{sujeito} && Ku = F \\ & && V(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i V_i}{V_0} \leq V^* \\ & && x_i = \{x_{min}, 1\} \end{aligned} \quad (2)$$

onde V_i corresponde ao volume de cada elemento finito do domínio de projeto, V^* é o volume prescrito e V_0 é o volume do domínio de projeto. Com x_i sendo a densidade do elemento que é a variável de projeto do SERA.

2.2 Índice de Performance

Uma abordagem apresentada por Liang et al. (2000b) em sua pesquisa de estruturas elásticas lineares, mostra que em um projeto final que tem por objetivo um nível de rigidez definido tem a performance dessa estrutura baseada na remoção dos elementos com menores energia de deformação. Portanto, um índice de performance baseado em energia é expresso por:

$$PI = \frac{C_0 V_0}{C_k V_k} \quad (3)$$

onde PI é o índice de performance da estrutura, C_0 é a compliance inicial, V_0 é o volume inicial da estrutura, C_k é a compliance na k-ésima iteração e V_k é o volume na k-ésima iteração. Esse parâmetro tem a capacidade de monitorar o procedimento de otimização detectando pequenas perturbações na compliance devido a remoção desses elementos.

2.3 Esquema de Filtragem

Nos métodos evolucionários discretos considera-se que cada elemento individualmente seja definido como ausente, indicado com o algarismo inteiro “0” ou presente “1”. O fato de minimizar a

compliance, resulta em valores mínimos e máximos possíveis para cada elemento individual, sem considerar a estrutura total. Isso não é benéfico para o procedimento de otimização pois os elementos podem ficar conectados por apenas dois nós, resultando em um padrão de tabuleiro de xadrez. Esse problema pode ser solucionado pelo uso de várias técnicas de filtragem, sendo as mais comuns a filtragem por densidade ou sensibilidade. Nesse sentido, emprega-se o processo de densidade proposto por Bruns and Tortorelli (2001) cuja função pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^N H_{ij} v_j x_j}{\sum_{j=1}^N H_{ij} v_j} \quad (5)$$

onde N é o número de elementos vizinhos ao elemento x_i com volume v_i , $\bar{x}_i$ é a média ponderada dos elementos vizinhos a x_i com H_{ij} seu fator de ponderação definido como:

$$H_{ij} = R - d_{ij} \quad (6)$$

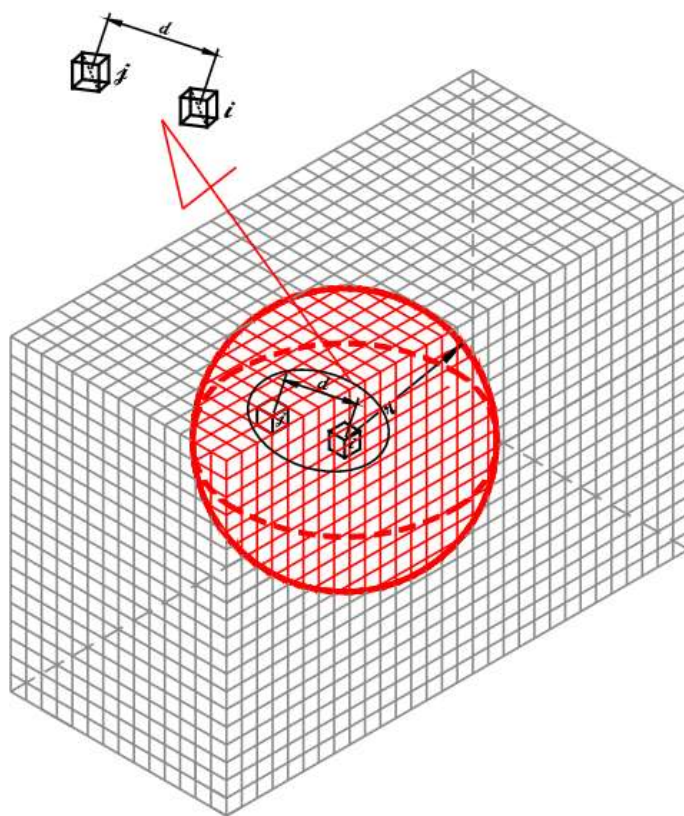


Figure 1 – Filtro espacial

com R o raio da esfera que tem como centro o centro do elemento x_i e d_{ij} é a distância entre os centros do elementos x_i e x_j dado por:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (7)$$

Onde (x_i, y_i, z_i) e (x_j, y_j, z_j) são, respectivamente, as coordenadas dos centros dos elementos x_i e x_j .

2.4 Número Sensibilidade

A análise de sensibilidade do projeto é necessária para a solução do problema de OT. As sensibilidades quantificam a relação entre as mudanças nas variáveis do projeto, as mudanças na função objetivo e nas restrições. Nesta pesquisa, são necessárias sensibilidades em relação às variáveis de projeto que são usadas nos algoritmos MMA e OC. Existem vários métodos empregados para obter sensibilidades de projeto, Liu *et al.* (2014), Gebremedhen *et al.* (2019) e Ghabraie *et al.* (2015). Assim, sem alterar a sua heurística de remoção, ver Simonetti *et al.* (2014) e usando uma versão modificada do SESO, podemos escrever:

$$E_i(x) = E_{min} + x_i(E_0 - E_{min}) \quad (8)$$

onde E_{min} é o módulo de elasticidade para o material “vazio”, valor utilizado $E_{min} = 10^{-9}$ usado para evitar a singularidade na matriz de rigidez $K(x)$, E_0 é o módulo de elasticidade para o material “sólido”, x_i representa a variável de projeto, neste caso, o elemento do domínio, assumindo valores 0 (zero) ou 1 (unidade) para uma otimização discreta. Portanto, a matriz de rigidez usando (8) pode ser escrita como:

$$K(x) = \sum_{i=1}^n [E_{min} + x_i(E_0 - E_{min})] k_i^0 \quad (9)$$

Onde n representa o número de elementos finitos no domínio do projeto, k_i^0 é o termo da matriz de rigidez para um elemento hexaédrico de 8 nós.

Derivando a equação de equilíbrio $K(x)u(x) = F$ e fazendo algumas manipulações matemáticas chega-se a:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = -K^{-1}(x) \frac{\partial K(x)}{\partial x_i} u(x) \quad (10)$$

Aplicando a equação 10 na derivada da função objetivo, equação 1, em relação a x_i e usando a expressão $F^T = u^T(x)K(x)$ obtém-se:

$$\frac{\partial c(x)}{\partial x_i} = -u^T(x) \frac{\partial K(x)}{\partial x_i} u(x) \quad (11)$$

Substituindo a derivada de (9) em relação a x_i na equação 11, a sensibilidade da função objetivo pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial c(x)}{\partial x_i} = -u^T(x) [(E_0 - E_{min}) k_i^0] u(x) \quad (12)$$

O algoritmo SESO é baseado no cálculo da função custo quando um elemento é removido da malha de elementos finitos. Esta sensibilidade é obtida por procedimento de diferenças finitas. Neste artigo, o método SESO e SERA é aplicado em problemas de TO onde a compliance é adotada como função objetivo a ser minimizada, sujeita à restrição de volume. Portanto, as expressões de sensibilidade dos métodos mencionados resultam em equações similares com interpretações físicas diferentes pois, o SERA tem como variável de projeto a densidade do elemento, enquanto o SESO tem como variável de projeto o elemento.

3. ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO

3.1 Método das Assíntotas Móveis (MMA)

O MMA é um algoritmo de programação matemática que é adequado para OT, usado para restringir o problema de otimização a muitas restrições e várias variáveis de projeto. Em cada etapa do processo iterativo do algoritmo, um subproblema de aproximação convexa é gerado e resolvido. A geração destes subproblemas é controlada pelas assíntotas móveis, as quais podem ambas estabilizar e acelerar a convergência do processo geral, Svanberg (1987). A solução ótima do subproblema pode ou não ser aceita: se for aceita, a iteração externa se completa; se não, uma nova iteração interna é realizada, na qual um novo subproblema é gerado e resolvido.

As iterações são repetidas até que os valores das aproximações da função objetivo e das restrições se tornem maiores ou iguais aos valores da função original, quando avaliada na solução ótima do subproblema, isto é, até que a condição conservadora seja satisfeita para as funções envolvidas. As aproximações que caracterizam o MMA são funções racionais cujas assíntotas são atualizadas em cada iteração. Destaca-se que o uso de aproximações racionais se justifica pelo fato de que em diversos problemas da engenharia de estruturas em que surgem variáveis recíprocas, ou seja, interação e esforço mútuo. Dada a função objetivo ou uma restrição $C(x)$. As funções de aproximação são dadas por:

$$C(x) \approx C(x^k) + \sum_1^n \left(\frac{r_i}{U_i^{(k)} - x_i} + \frac{s_i}{x_i - L_i^{(k)}} \right) \quad (13)$$

Onde r_i e s_i são definidos como:

$$\text{Se } \frac{\partial C(x)}{\partial x_i} > 0 \text{ então } r_i = \left(U_i^{(k)} - x_i^{(k)} \right)^2 \frac{\partial C(x)}{\partial x_i} \text{ e } s_i = 0 \quad (14)$$

$$\text{Se } \frac{\partial C(x)}{\partial x_i} < 0 \text{ então } s_i = - \left(x_i^{(k)} - L_i^{(k)} \right)^2 \frac{\partial C(x)}{\partial x_i} \text{ e } r_i = 0 \quad (15)$$

Para o problema de otimização em compliance a equação (15) é atendida pois, $\frac{\partial C(x)}{\partial x_i} < 0$. Então o MMA fornece ao projeto atual uma aproximação de um problema de programação linear do tipo:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad - \sum_1^n \frac{\left(x_i^{(k)} - L_i^{(k)} \right)^2}{x_i - L_i^{(k)}} \frac{\partial C}{\partial x_i} (\tilde{x}^{(k)}) \\ & \text{subjeto} \quad \tilde{x}^T v - \bar{v} \leq 0 \\ & \quad \quad \quad x \in \chi^k \end{aligned} \quad (16)$$

onde

$$\chi^k = \{x \in \chi | 0.9L_i^{(k)} + 0.1x_i^{(k)} \leq x_i \leq 0.9U_i^{(k)} + 0.1x_i^{(k)} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

com $L_i^{(k)}$ e $U_i^{(k)}$ as assíntotas inferior e superior, respectivamente, k é a corrente iteração, n o número de variáveis de projeto, x^k variável de projeto e $\bar{v}$ o volume prescrito. A seguinte regra heurística é utilizada

por Svamberg (1987) para atualização das assintotas, de modo que nas duas primeiras iterações externas, quando $k = 1$ e $k = 2$ adotam-se:

$$\begin{aligned} U_i^{(k)} + L_i^{(k)} &= 2x_i^{(k)} \\ U_i^{(k)} - L_i^{(k)} &= 1 \end{aligned} \quad (17)$$

Para $k \geq 3$

$$\begin{aligned} U_i^{(k)} + L_i^{(k)} &= 2x_i^{(k)} \\ U_i^{(k)} - L_i^{(k)} &= \gamma_i^{(k)} \end{aligned}$$

com

$$\gamma_i^{(k)} = \begin{cases} 0.7(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})(x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}) < 0 \\ 1.2(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})(x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}) > 0 \\ 1(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})(x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Observa-se na equação (18) que o MMA guarda o sinal de três iterações consecutivas. Assim quando os sinais alternam o MMA detecta que os valores das variáveis de projeto estão a oscilar, ou seja, $(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})(x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}) < 0$, as assintotas aproximam do ponto de projeto $x_i^{(k)}$. Se os valores das variáveis de projeto não oscilar, isto é, $(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})(x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}) \geq 0$, então o MMA afasta as assintotas do ponto de projeto com o objetivo de acelerar a convergência. Existem duas abordagens para resolver os subproblemas no MMA, a “abordagem dual” e a “abordagem do ponto interior primal-dual”. A abordagem dual é baseada na dualidade de relaxamento Lagrangeano correspondente ao subproblema, o qual busca a maximização de uma função objetivo côncava sem outras restrições e da condição de não negatividade nas variáveis. Esse problema dual pode ser resolvido por um método de Newton modificado e, em seguida, a solução ótima dual pode ser traduzida para uma solução ótima correspondente do subproblema primal. Neste artigo, usa-se para resolver o problema usa-se o método de Newton.

3.2 Critério de Otimalidade (OC)

O OC é uma abordagem clássica para problemas de OT, descrito em Bendsøe (1995) e está associado à obtenção do resultado através do atendimento da condição de Karush-Kuhn-Tucker. O Lagrangiano para o problema de otimização, equação 1, por Meijboom (2003) pode ser escrito como:

$$L = C(x) + \lambda(V(x) - V^*) + \lambda_1^T(Ku - F) + \sum_{i=1}^n \lambda_2^i(x_i^{min} - x_i) + \sum_{i=1}^n \lambda_3^i(x_i - x_i^{max}) \quad (19)$$

onde λ_j são os multiplicadores lagrangianos. A optimalidade é alcançada quando as derivadas do Lagrangiano L em relação às variáveis de projeto (x_i) são iguais zero, isto é, $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Assim, $\frac{\partial L}{\partial x_i}$ é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial C}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial V}{\partial x_i} + \lambda_1^T \frac{\partial(Ku)}{\partial x_i} - \lambda_2^e + \lambda_3^e \quad (20)$$

Assumindo que as restrições do limite superior e inferior não estejam ativadas, ($\lambda_2^i = \lambda_3^i = 0$), que o carregamento seja independente do projeto ($\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$), que a derivada da função objetivo em relação a variável de projeto, equação 11, que a derivada do volume em relação a variável de projeto é dada por

$\frac{\partial V}{\partial x^e} = V_e$ e expandindo a derivada $\frac{\partial(Ku)}{\partial x_i}$, usando a regra do produto, a equação (20) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -u^T \frac{\partial K}{\partial x_i} u + \left(\frac{\partial K}{\partial x_i} u + K \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \lambda_1^T + \lambda V_e \quad (21)$$

Derivando a equação de equilíbrio $Ku = F$ em relação à variável de projeto obtém-se:

$$\frac{\partial K}{\partial x^e} u + K \frac{\partial u}{\partial x^e} = \frac{\partial F}{\partial x^e} = 0 \quad (22)$$

Substituindo (22) em (21) encontra-se

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -u^T \frac{\partial K}{\partial x_i} u + \lambda V_e \quad (23)$$

Igualando a equação (23) a zero temos

$$\lambda = \frac{u^T \frac{\partial K}{\partial x^e} u}{V_e} = \frac{-\frac{\partial C}{\partial x^e}}{V_e} = B_k^e = 1 \quad (24)$$

Desta forma, as variáveis de projeto agora podem ser atualizadas usando:

$$x_e^{k+1} = B_k^e x_e^k \quad (25)$$

Assim, com o objetivo de impedir que x mude muito em uma iteração, um limite móvel, m , é introduzido. O esquema heurístico de atualização do OC pode ser formulado como:

$$x_e^{k+1} = \begin{cases} \max(x_{min}, x_e^k - m) & \text{se } x_e^k (B_k^e)^\eta \leq \max(x_{min}, x_e^k - m) \\ x_e^k (B_k^e)^\eta & \text{se } \max(x_{min}, x_e^k - m) < x_e^k (B_k^e)^\eta < \min(1, x_e^k + m) \\ \min(1, x_e^k + m) & \text{se } x_e^k (B_k^e)^\eta \geq \min(1, x_e^k + m) \end{cases} \quad (26)$$

Onde $(\eta = \frac{1}{2})$ é um coeficiente de amortecimento numérico para estabilizar a iteração e $m = 0.2$ é recomendado para problemas de OT em mínimo compliance, Sigmund (2001). O valor do multiplicador Lagrangiano λ pode ser encontrado por um algoritmo de bissecção.

O critério de parada utilizado tanto para o método OC quanto para os outros métodos foi o número máximo de iterações, que é estabelecido a priori pelo usuário e também o valor da diferença numérica entre o resultado obtido para a variável de projeto em uma nova iteração do programa e o resultado obtido para a variável de projeto na iteração anterior, como mostrado na equação abaixo

$$|x_e^{k+1} - x_e^k| \leq \varepsilon \quad (27)$$

Onde ε é uma tolerancia estabelecida para o problema analisado.

4. Exemplos Numéricos

Nestes exemplos numéricos usou-se um preconditionador para resolver o sistema $Ku = F$. Para este fim, foi escolhido o mais simples dos pré-condicionadores que é o diagonal, formado pela matriz diagonal cujos são os mesmos da matriz K . Apesar de pouco sofisticado, ele apresenta bons resultados, a inversa de matriz diagonal pode ser obtida com pouco custo computacional. Além disso, a implementação em Matlab requer apenas 4 linhas de código. Nestes exemplos, as assíntotas inferior e superior $L_i^{(k)}$ e $U_i^{(k)}$ são atualizadas iterativamente usando:

$$\gamma_i^{(k)} = \begin{cases} 0.5(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})(x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}) < 0 \\ 1.2(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})(x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}) > 0 \\ 1(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})(x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}) = 0 \end{cases}$$

para atenuar a oscilação ou acelerar a taxa de convergência.

4.1 Exemplo 1 – Viga em balanço com carga distribuída

A Figura 2 mostra o domínio de projeto, as condições de contorno e o carregamento para um cantilever beam totalmente fixado na extremidade esquerda. A carga vertical para baixo distribuída de $F = 100N$ é aplicada na borda livre na parte inferior. As dimensões do projeto são $L_x = 120$, $L_y = 20$ e $L_z = 20$, totalizando 48,000 elementos hexaedrais de dimensão unitária. As propriedades do material tem módulo de elasticidade $E = 100MPa$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$. A Figura 3 mostra as configurações ótima no domínio da solução para o problema de mínimo compliance usando os métodos evolucionários SESO e SERA.

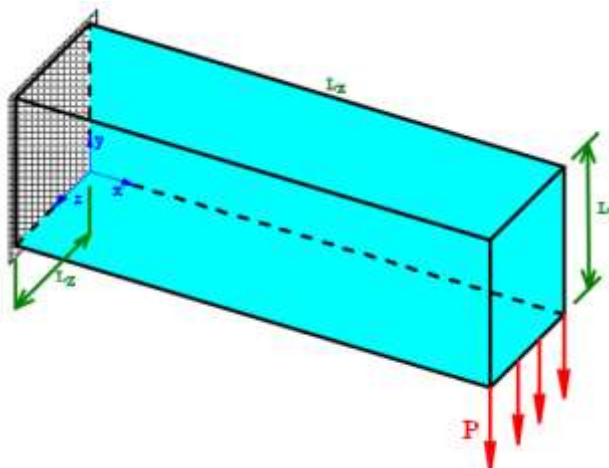


Figura 2 – Cantilever Beam – Domínio de Projeto

Neste exemplo, empregou-se o método OC e o MMA para resolver o problema de OT. Para os critérios de parada adotou-se uma tolerância de 10^{-2} para a variável de projeto e adotou-se um valor máximo de 10^2 iterações. Com o objetivo de evitar as instabilidades numéricas, como o padrão de "tabuleiro de xadrez" adotou-se, nesta pesquisa, a técnica do filtro de sensibilidade, ver Figura 1. O filtro é uma função do raio mínimo de influência. Neste exemplo adotou-se o $R_{min} = 1.2$. Assim, quanto maior o raio maior o número de elementos, dentro da esfera, que serão suavizados.

A Figura 3 mostra a topologia ótima alcançada para o método SESO, usando os algoritmos de otimização MMA e OC, com uma vista em perspectiva e vista frontal. A estrutura evolui para tal configuração com um volume final de 0.20.

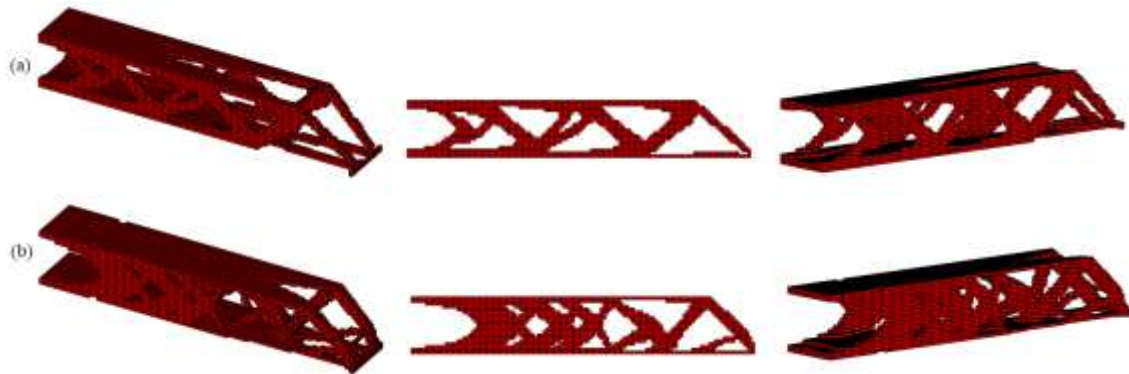


Figura 3 – Topologia Ótima – a) MMA-SESO e b)OC-SESO

A Figura 4 mostra a topologia ótima para o método SERA, usando o algoritmo de otimização MMA e OC, com uma vista em perspectiva e vista frontal. Destaca-se que a topologia ótima apresentado pelo SESO e SERA, usando o MMA, são iguais, mais esbelta e de mais fácil manufatura que as topologias apresentadas pelo método SESO e SERA, usando o algoritmo OC.

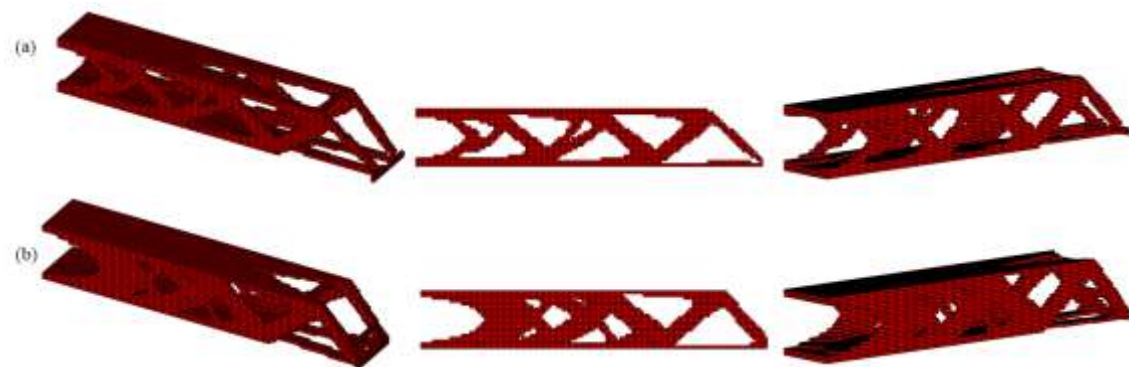


Figura 4 – Topologia Ótima – a) MMA-SERA e b)OC-SERA

As compliances das soluções do SESO usando MMA e OC são, respectivamente, $C_{MMA} = 2335.27$ e $C_{OC} = 2449.79$. No entanto, o custo computacional do SESO usando MMA, neste problema, foi maior que 30% maior que o SESO usando o algoritmo OC. No SERA as compliances são respectivamente, $C_{MMA} = 2333.64$ e $C_{OC} = 2386.92$. No SERA o custo computacional do OC foi 13,4% menor. A Figura 5, mostra os históricos de evolução da função objetivo usando os dois métodos evolucionários. A função objetivo para os métodos SESO e SERA aumentam, com um grande salto, devido a uma remoção maior de elementos causado por $RR=0.10$ (SESO) e um $PR=0.10$ (SERA), em seguida ocorre pequenas variações devido à quebra de barras durante o processo iterativo de otimização. Após alcançar o volume prescrito, nas iterações subsequentes, enquanto o volume permanece inalterado, a compliance converge gradualmente para um valor constante.

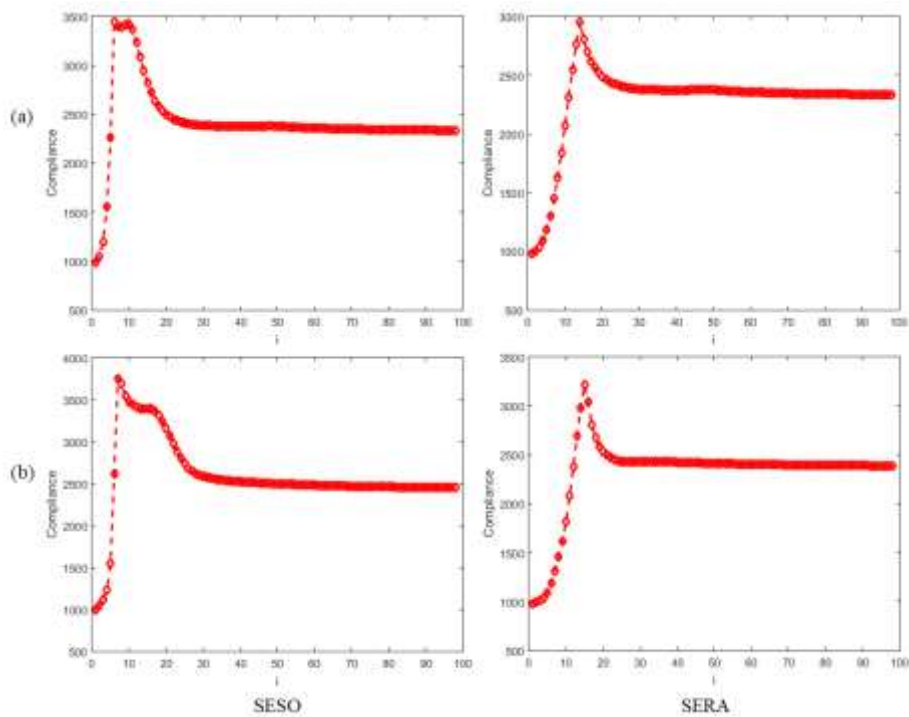


Figura 5 – Função Objetivo por Iteração – a) MMA e b) OC

4.2 Exemplo 2 – Viga MBB

Este exemplo apresenta a solução para compliance mínima de uma viga sujeita a uma carga vertical concentrada, ver figura 6, a viga Messerschmitt – Bolkow – Blohm (MBB). Nesta análise não foi considerada a simetria da viga. Portanto, todo domínio foi discretizado, $L_x = 120$, $L_y = 20$ e $L_z = 20$. A restrição de fração de volume é tomada como 0.20 e os parâmetros de otimização do SESO são $RR = 0.02$, $L_x = 0.02$ e o raio mínimo vale $R_{min} = 0.06 * L_z$. Neste exemplo, aplicou-se os algoritmos de otimização MMA e OC.

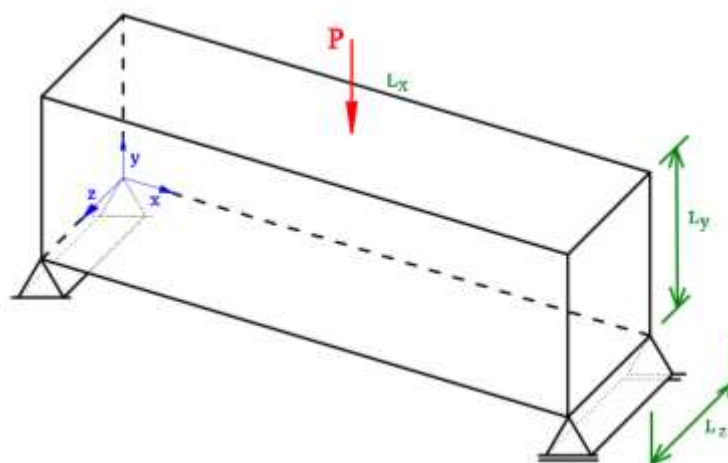


Figura 6 – MBB beam – Domínio de Projeto

A Figura 7 mostra a topologia ótima obtida usando o MMA e OC com base nos métodos evolucionários SERA e SESO, apresentando uma visão lateral e frontal. Os métodos SESO e SERA apresentam configurações ótimas bem semelhantes quando o algoritmo de otimização usado é MMA, com pequenas diferenças na sua topologia ótima, como pode ser observado na visão frontal apresentada na Figura 7. Além disso, essas topologias são diferentes das apresentadas pelos mesmos métodos quando o algoritmo de otimização utilizado é o OC. É nítido nesse exemplo, que os resultados apresentados pelo algoritmo de otimização MMA é mais estável e melhor do que o algoritmo OC. Destaca-se ainda que, o método SERA, usando o algoritmo OC, apresentou uma topologia ótima com regiões de grande concentração de elementos, ver Figura 7d. Observa-se ainda que o SERA apresenta em sua topologia ótima barras de contraventamento.

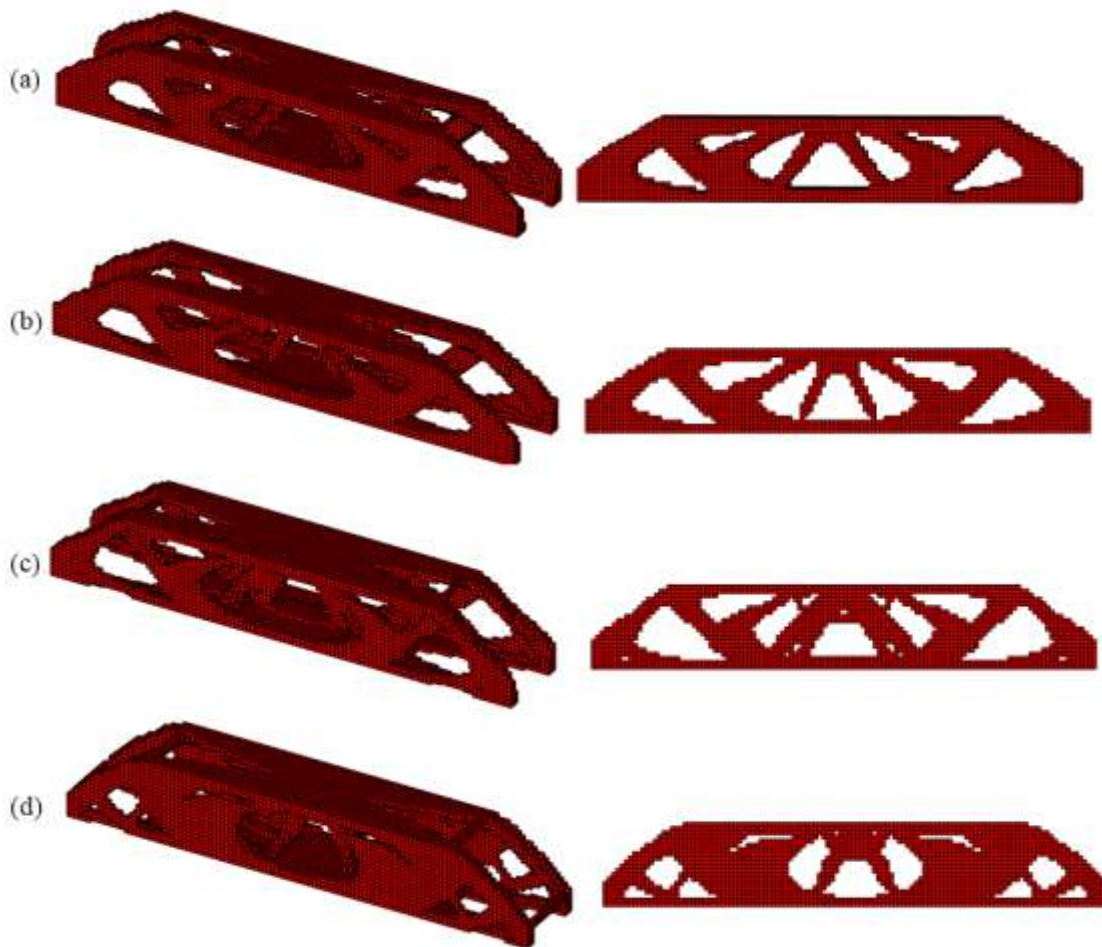


Figura 7 – MBB beam – MMA - (a)SESO e (b)SERA
OC – (c)SESO e (d) SERA

Em todos os casos estudados, vale destacar que, a compliance apresenta pelo menos um pico durante o processo de otimização e este pico é capturado pelo índice de performance da estrutura, ver Figura 8, uma vez que, este têm a capacidade de monitorar o procedimento iterativo. Estas pequenas variações na função objetivo tem sua explicação na heurística de remoção de cada método pois, apesar de ambos serem bidirecionais o procedimento de otimização é discreto.

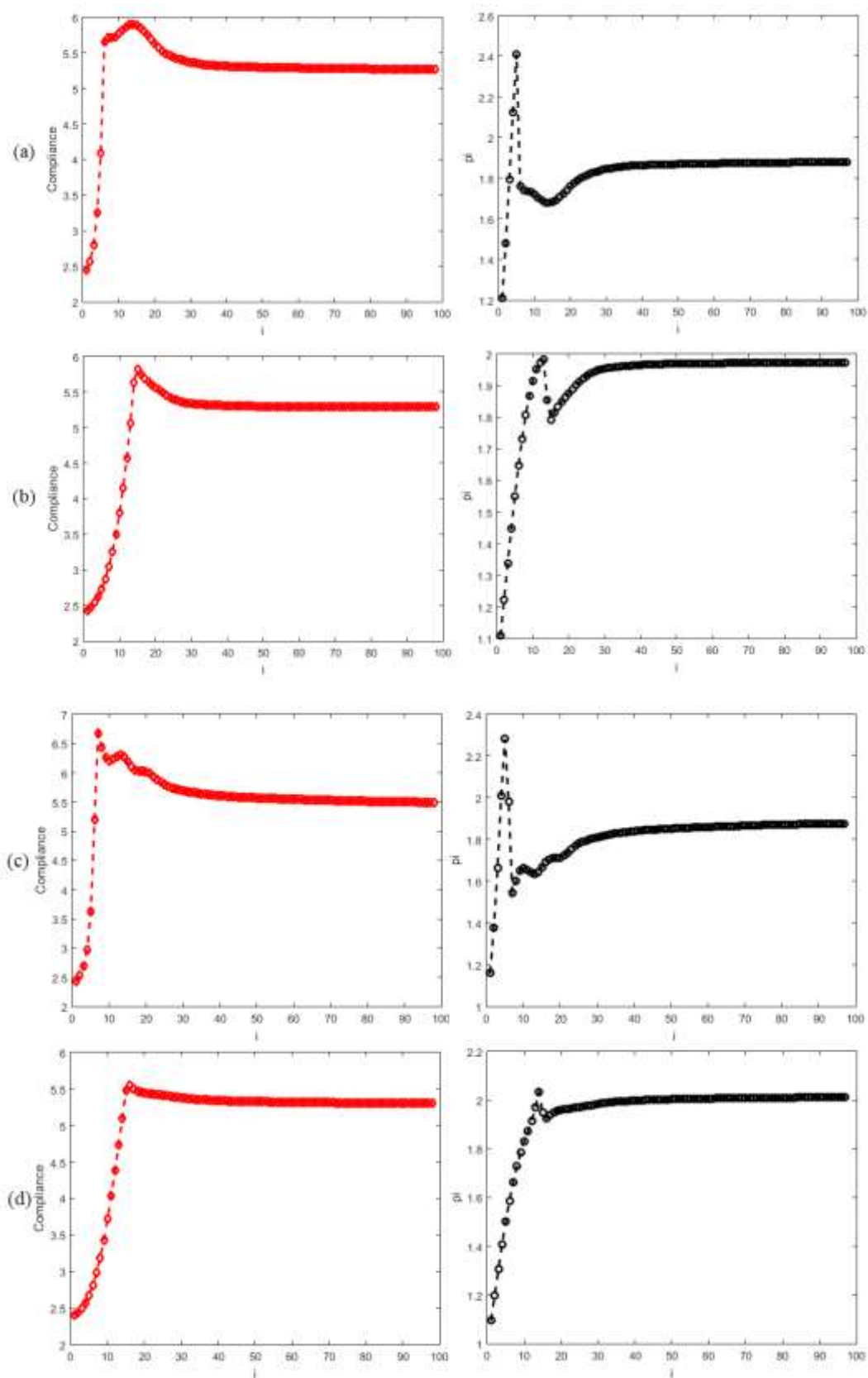


Figura 8 – Função Objetivo e Índice de Performance – SESO-(a)MMA e (c)OC
SERA-(b)MMA e (d)OC

4.3 Exemplo 3 – Viga em balanço com carga concentrada

Neste exemplo, considera-se cantilever 3-D em balanço com comprimento $L_x = 80$, altura $L_y = 50$ e espessura $L_z = 20$, totalizando 80,000 elementos finitos hexaedrais. As propriedades do material são: módulo de Young $E = 1.E5$, coeficiente de Poisson de $\nu = 0.30$. A Figura 9 ilustra o domínio do problema. Uma força concentrada, com intensidade 100 N, é aplicada para baixo no ponto médio da aresta inferior direita. O processo iterativo evolui até um volume prescrito de 0.15 do volume total.

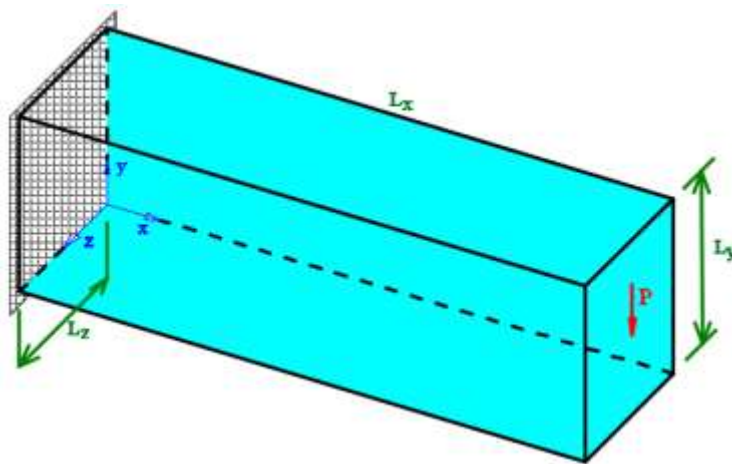


Figura 9 – Cantilever Beam – Domínio de Projeto

Para a viga em balanço, utilizamos um raio mínimo $R_{min} = 1.25$. A figura 10a e 10c mostram a estrutura ótima obtida com os métodos SESO usando os algoritmos de otimização MMA e OC, respectivamente. A Figura 10b e 10d exibem a mesma estrutura para as topologias ótimas usando o método SERA com os algoritmos de otimização MMA e OC, respectivamente. As figuras são apresentadas com uma visão em perspectiva e uma visão frontal, e mostram topologias diferentes para os dois algoritmos propostos neste artigo. Para o MMA as topologias ótimas são estruturas sólidas, mais suaves e apresentam pequenas diferenças em suas topologias. No entanto, para o OC as topologias ótimas são vasadas, menos suaves e são bem diferentes uma da outra.

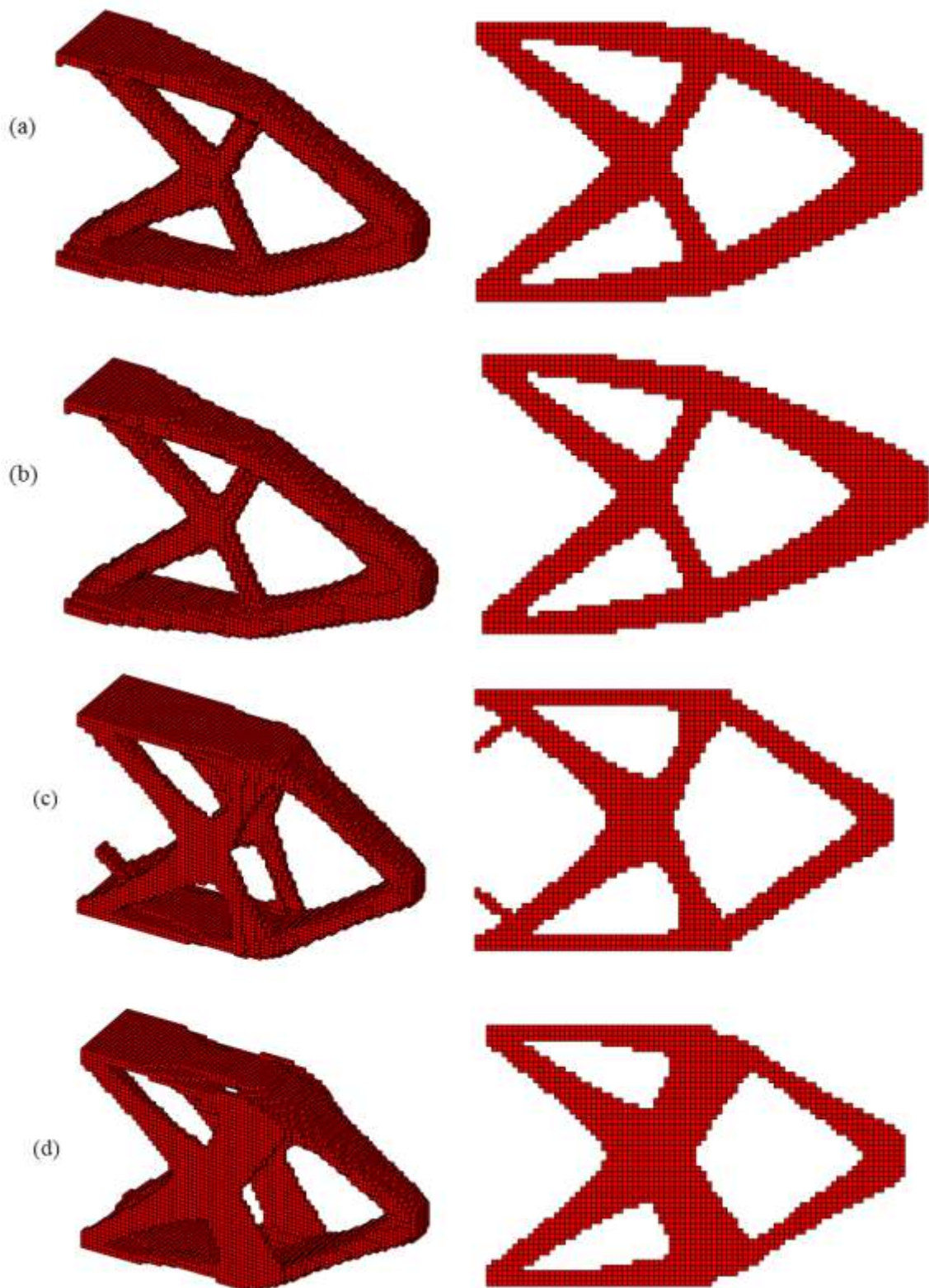


Figura 10 – Topologias Ótimas – MMA - (a)SESO e (b)SERA
OC – (c)SESO e (d) SERA

Os métodos SESO e SERA permitem a remoção de elementos com baixa compliance para melhorar o desempenho da estrutura. Portanto, uma curva característica de é apresentada na Figura 11. O peso de uma estrutura é reduzido gradativamente durante o processo de otimização enquanto a compliance aumenta. Assim, a curva característica do desempenho de uma estrutura durante o processo de otimização, pode ser expressa pelo peso da estrutura e sua energia de deformação, Liang 2004.

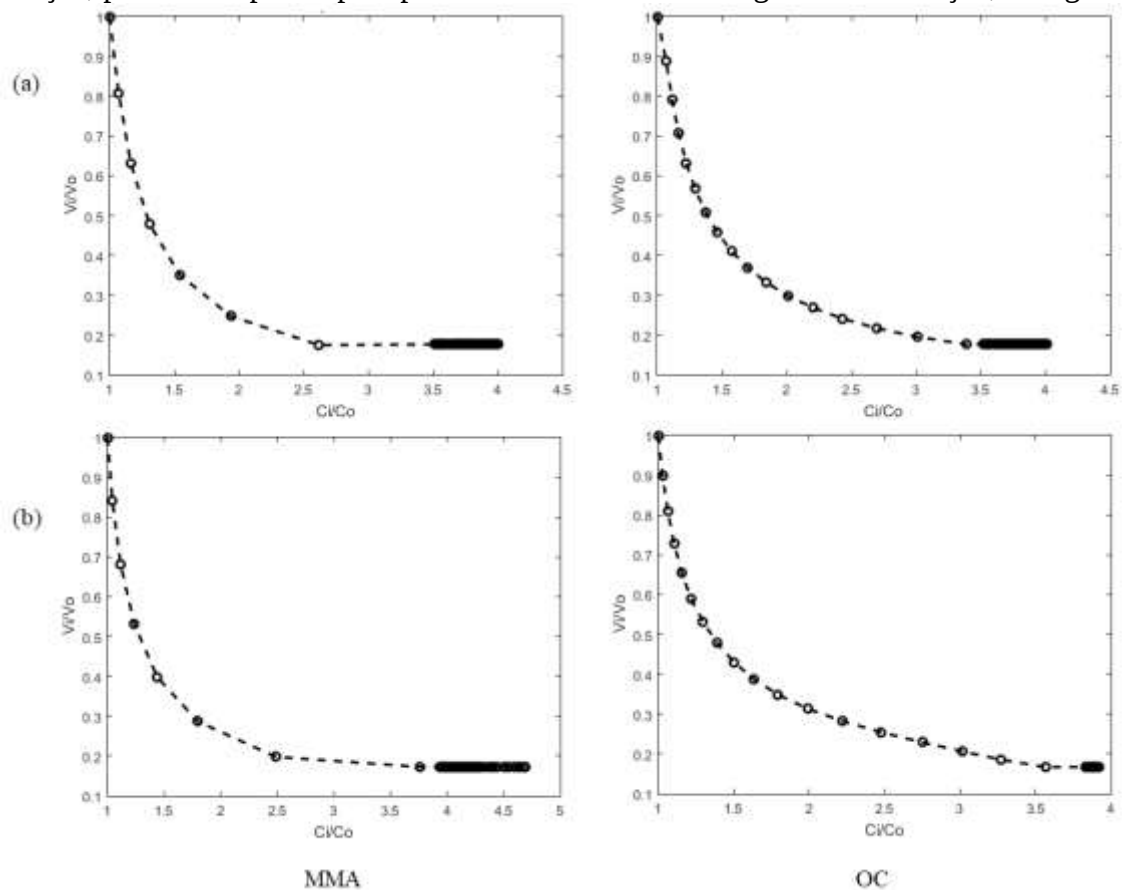


Figura 11 – Curva característica do desempenho de uma estrutura:
MMA e OC - SESO - (a) e MMA e OC - SERA - (b)

O projetista ao analisar as curvas acima, ver Figura 11a, MMA, deve observar que a estrutura ótima alcançada com uma compliance duas vezes maior que a compliance inicial, no gráfico $\frac{C_i}{C_0} = 2.0$, é obtida com um volume aproximado $\frac{V_i}{V_0} = 0.25$. Portanto, um volume menor que 25%, exemplo: $\frac{V_i}{V_0} = 0.20$, está abaixo da curva e, portanto, viola a restrição de compliance, $\frac{C_i}{C_0} = 2.5$, pois necessita de uma compliance 2,5 vezes maior que a inicial. Então, este projeto estrutural não seria viável pois, falta material para concluí-lo. Por outro lado, projetando a razão de compliance, $\frac{C_i}{C_0} = 1.50$, para um ponto acima da curva, $\frac{V_i}{V_0} = 0.40$, verifica-se que a quantidade de volume é mais que suficiente para a execução do projeto, isto é, o projeto é viável, mas está superdimensionado.

Portanto, os métodos de otimização estrutural SESO e SERA, usando os algoritmos de otimização MMA e OC, podem ser usados como ferramenta para melhorar o desempenho das estruturas que são superdimensionadas economizando material. Na Figura 11 tais estruturas satisfazem as

condições de projeto, não são superdimensionadas e proporcionaram uma economia considerável de material.

5. CONCLUSÕES

Este artigo faz uma abordagem de dois métodos diferentes de otimização topológica baseadas em procedimentos de minimização da compliance aplicados a problemas elásticos 3D. Os métodos SESO e SERA foram implementados em código Matlab e os resultados obtidos possuem boa acurácia com os apresentados na literatura. Um código livre, apresentado em [6], foi usado para introduzir os métodos mencionados acima, usando os algoritmos de otimização MMA e OC, nos quais um elemento finito hexaedral é usado para discretizar o domínio de projeto e uma análise elástica é usada para calcular a função objetivo em cada método. É possível concluir que os modelos implementados podem gerar topologias ótimas que podem suportar as cargas aplicadas sob condições de contorno definidas. Além disso, com os resultados apresentados, fica claro que os métodos SESO e SERA, cujas variáveis de projeto são, respectivamente, os elementos do domínio e a densidade de cada elemento do domínio, possuem configurações ótimas bem próximas, com baixo custo computacional. Além disso, o SERA apresentou regiões mais densas em configurações ótimas apresentadas. Destaca-se ainda que o algoritmo MMA é mais lento do que OC no exemplo cantilever com carga distribuída enquanto, se mostrou mais rápido que OC em carga concentrada. Além disso esses modelos podem ser estendidos para TO com restrição de tensões, deslocamentos e frequência natural.

6. REFERENCIAS

- [1] K. Svanberg, "The method of moving asymptotes-a new method for structural optimization," *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 24, 1987.
- [2] K. Svanberg, "A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations," *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 12, no. 2, 2002.
- [3] K. Svanberg, "MMA and GCMMA, versions September 2007," [Online]. Available: <http://www.math.kth.se/~krille/gcmmma07.pdf>.
- [4] Bendsøe, M. P. *Optimization of Structural Topology, Shape and Material*. Berlin: Springer, 1995.
- [5] Liang QQ, Xie YM, Steven GP (2000b). Optimal topology design of bracing systems for multistory steel frames. *J. Struct. Eng.* 126(7): 823-829.
- [6] Bruns, T. E., & Tortorelli, D. A. (2001). Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(26-27), 3443-3459.
- [7] Simonetti HL, Almeida VS, Neto LO. A smooth evolutionary structural optimization procedure applied to plane stress problem. *Eng Struct* 2014;75:248–58.
- [8] Tovar et al, "Topology Optimization Using a Hybrid Cellular Automaton Method With Local Control Rules", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 128, November 2006.
- [9] Zegard, T and Paulino, G. H. Bridging topology optimization and additive manufacturing. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. v. 53, p. 175-192, 2016.

- [10] Munk, D. J, Verstraete, D, Vio, G. A. Effect of fluid-thermal-structural interactions on the topology optimization of a hypersonic transport aircraft wing. *Journal of Fluids and Structures*. v. 75, p. 45-76, 2017.
- [11] Liu, T. and Tovar, A. An efficient 3d topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. v. 50, p. 1175-1196, 2014.
- [12] Sigmund, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. v. 21, p. 120-127, 2001.
- [13] Liang, Qing Quan. *Performance-based Optimization of Structures: Theory and applications*. CRC Press, 2004.
- [14] Gebremedhen, H. S., Woldemicael, D. E., & Hashim, F. M. (2019). Three-dimensional stress-based topology optimization using SIMP method. *International Journal for Simulation and Multidisciplinary Design Optimization*, 10, A1.
- [15] Ghabraie, K. (2015). The ESO method revisited. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 51(6), 1211-1222.
- [16] Meijboom, M. J. H. (2003). Topology optimization of dynamic problems. *Report External Traineeship. Reportnr.: DCT*.