

ESTUDO PARA ANÁLISE NUMÉRICA DE INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA POR MEC/MEF EM FUNDAÇÃO RASA

STUDY FOR NUMERICAL ANALYSIS OF SOIL-STRUCTURE INTERACTION BY BEM/FEM ON SHALLOW FOUNDATION

Patrícia Tavares de Souza¹, Valério S. Almeida², Luttgardes de Oliveira Neto³

¹ Faculdade de Engenharia, UNESP, Bauru, SP, Brasil. E-mail: paty_souz4@hotmail.com

² Escola Politécnica (EPUSP), USP, São Paulo, SP, Brasil. E-mail: luttgardes.oliveira-neto@unesp.br

³ Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Faculdade de Engenharia, UNESP, Bauru, SP, Brasil.
E-mail: valerio.almeida@usp.br

RESUMO

Este trabalho baseia-se em um estudo sobre interação solo-estrutura por meio de simulação numérica. Neste caso optou-se por estudar e utilizar uma modelagem computacional que faz o acoplamento de uma formulação direta de Método dos Elementos de Contorno aplicado ao meio semi-infinito com outra do Método dos Elementos Finitos aplicado ao elemento de fundação rasa (sapata). As formulações dos métodos numéricos são descritos, analítica e matricialmente. As características elásticas e os parâmetros numéricos do solo são apresentados, procurando também encontrar dados reais para compor os parâmetros numéricos para aplicação dos modelos de simulação. Os estudos foram realizados com intuito de entender o comportamento da estrutura em função da comparação dos modelos de consideração do solo, a citar, modelo contínuo de Mindlin e modelo discreto de Winkler. Exemplos numéricos foram utilizados para aplicação do sistema computacional estudado em diversos aspectos de análise.

1 INTRODUÇÃO

O assunto interação solo-estrutura tem proporcionado há tempos grandes discussões em diversas linhas de pesquisa, desde a avaliação de recalques em edificações de diversos portes e sobre diversos tipos de solo, passando por avaliações dos efeitos de recalques diferenciais em estruturas e chegando a simulações numéricas por meio dos dois métodos numéricos mais tradicionais, Método dos Elementos de Contorno (MEC) e Método dos Elementos Finitos (MEF).

Consoante Antoniazzi (2011), a suposição de apoios indesejáveis representaria, por exemplo, a total restrição ao recalque e ao giro nas duas direções ortogonais nas extremidades dos pilares. Entretanto, a região de solo que rodeia as fundações sofre deformações quando submetida à aplicação de cargas, fazendo com que as estruturas recalquem, causando uma redistribuição de esforços nos elementos estruturais.

O método de interação solo-estrutura nada mais é do que a influência mútua gerada entre a superestrutura e o sistema de fundação (fundação e solo), iniciando-se ainda na fase de construção e prolongando-se até que seja obtido um estado de equilíbrio de tensões e deformações, tanto na estrutura como no maciço de solos (Colares, 2006).

Sabe-se que o Método dos Elementos de Contorno (MEC) mostra ser a mais profícua ferramenta numérica na análise de problemas de domínio (semi) infinito, como o solo, devido a sua formulação intrínseca em que as equações diferenciais recaem em um grupo de soluções de modo que seja necessário apenas representar as incógnitas dos pontos da superfície em contato com a sapata e/ou os pontos dos elementos das estacas. Para o caso de problemas elásticos lineares, com o solo sendo homogêneo e isotrópico, as equações de Mindlin (1936) são as soluções empregadas nesta análise. Diferentemente do Método dos Elementos Finitos em que deve-se discretizar a região até onde os valores de tensões e deslocamentos sejam nulos, o que o torna inadequado na prática.

Assim, pode-se empregar o MEC via a solução fundamental de Mindlin, discretizando-se a superfície indeslocável e impondo-se as restrições requeridas nestes pontos, porém, só é válida na representação de um único meio homogêneo, não podendo, dentro da teoria de elasticidade, introduzir outros meios com propriedades físicas diferentes, em função das condições de contorno já estabelecidas previamente por Mindlin (1936) em sua formulação (Almeida, 2003). Pode-se aplicar a metodologia de Steinbrenner para introduzir, de maneira simplificadora, a influência das diversas camadas de propriedades mecânicas diferentes e também a cota do indeslocável prescrita à distância desejada.

A interação solo-estrutura pode avaliar os efeitos da redistribuição de esforços nos elementos estruturais, a forma e a intensidade dos recalques diferenciais, tornando os projetos mais próximos de seu real comportamento. Muitos autores estabeleceram que o mecanismo interativo é comandado pela rigidez relativa entre solo e estrutura.

Almeida (2003) avaliou a resposta da superestrutura apoiada em solo não-homogêneo representado pelo MEC num modelo tridimensional, onde a superestrutura foi modelada com elementos finitos reticulares e elementos laminares para elementos da subestrutura. Posteriormente, Ribeiro (2005) ampliou sua formulação para considerar elementos planos (lajes e paredes). Aquino (2008) comparou os resultados de esforços em vigas e pilares de edifícios de andares múltiplos, apoiados em fundações rasas flexíveis sobre o maciço de solo, considerando o edifício indeslocável. O maciço foi simulado pelo modelo numérico contínuo de Mindlin e pelo modelo discreto de Winkler. A sapata foi representada por elementos finitos laminares, contemplando o efeito de membrana e de flexão. O edifício foi modelado por elementos finitos de pórtico espacial, sem considerar a influência das lajes, em análise estática linear e não-linear geométrica. Em fundações profundas, citam-se os trabalhos de interação solo-estrutura com o acoplamento MEC-MEF de Iwamoto (2000) em que se leva em conta a rigidez transversal à flexão das lajes e excentricidades das vigas e Cutrim (2020) que estende a formulação de Aquino (2008) para a análise dinâmica e incluindo também as estacas.

A utilização da formulação apresentada foi complementada com um estudo paralelo que procurou correlacionar parâmetros de caracterização de solos com parâmetros numéricos utilizados pelo programa computacional, comparando resultados de ensaios de campo e resultados obtidos pela simulação numérica.

2 PARÂMETROS DO SOLO

Conforme Rodrigues (2012), ao aumentar progressivamente a carga aplicada à sapata e, conseqüentemente, a tensão σ transmitida ao solo, será alcançada a tensão de ruptura σ_r , ou seja, a capacidade de carga do sistema sapata-solo. Esta depende de uma série de variáveis como, por exemplo, as dimensões do elemento de fundação, a profundidade de assentamento, as características dos solos, etc.

A capacidade de carga do sistema sapata-solo pode ser calculada por vários métodos, destacando-se a prova de carga sobre placas. De acordo com Antoniazzi (2011), trata-se de um ensaio de compressão executado diretamente na superfície ou em determinada cota do terreno, por meio de uma placa metálica e rígida, com área maior que $0,5 \text{ m}^2$. Cargas verticais são aplicadas no centro da placa, em estágios, medindo-se os recalques simultaneamente aos incrementos de carga. O ensaio busca reproduzir o desempenho da fundação sob a ação das solicitações provenientes da superestrutura e os resultados são apresentados em forma de gráficos de tensão versus recalque.

O ensaio tem maior aplicabilidade em terrenos uniformes em profundidade cuja deformabilidade é quase imediata à ação das cargas, e assim, sendo utilizado em terrenos pedregulhosos, arenosos e silto-arenosos (em qualquer grau de saturação), e em terrenos argilosos e silto-argilosos (com baixo grau de saturação).

Entretanto, o resultado obtido por uma prova de carga sobre placas só pode ser transferido para a fundação real se os bulbos de tensões dos dois estiverem contidos em solos com as mesmas

propriedades de resistência e deformabilidade. Portanto, na existência de camadas compressíveis mais profundas não solicitadas pela placa, mas sim pela fundação, a prova de carga só será válida se a dimensão da placa for aumentada de modo que o bulbo de tensões possa englobar esta camada (Antoniazzi, 2011).

A relação entre a largura e a profundidade do poço para a prova de carga deve ser igual à relação entre a largura e a profundidade da futura fundação (NBR 6489:1984).

a) *Argila:*

Em concordância com Cintra et al. (2003), para argilas sobreadensadas é razoável prever que, a uma mesma tensão aplicada, os recalques imediatos aumentam linearmente com a dimensão da sapata. A própria fórmula da Teoria da Elasticidade para cálculo de recalques imediatos demonstra essa proporcionalidade.

Assim, obtido o recalque ρ_p numa placa circular de diâmetro B_p , o recalque imediato ρ_s de uma sapata de diâmetro B_s numa determinada tensão σ , será:

$$\rho_s = \rho_p \cdot \frac{B_s}{B_p} \quad (1.1)$$

Para sapatas retangulares ou de formas irregulares, pode-se considerar a sapata circular de área equivalente.

b) *Areia:*

Na literatura temos,

$$\rho_s = \rho_p \cdot \left[\frac{B_s}{0,70 \cdot (B_s + 0,30)} \right]^2 \quad (B \text{ em metros}) \quad (1.2)$$

Entretanto, ainda não há uma equação geral aplicável à extrapolação de recalque de uma placa de tamanho padrão para o recalque de uma sapata em areia (Rodrigues, 2012).

Através do ensaio, traça-se uma curva tensão x recalque (Figura 1) que permite analisar o comportamento do maciço de solo.

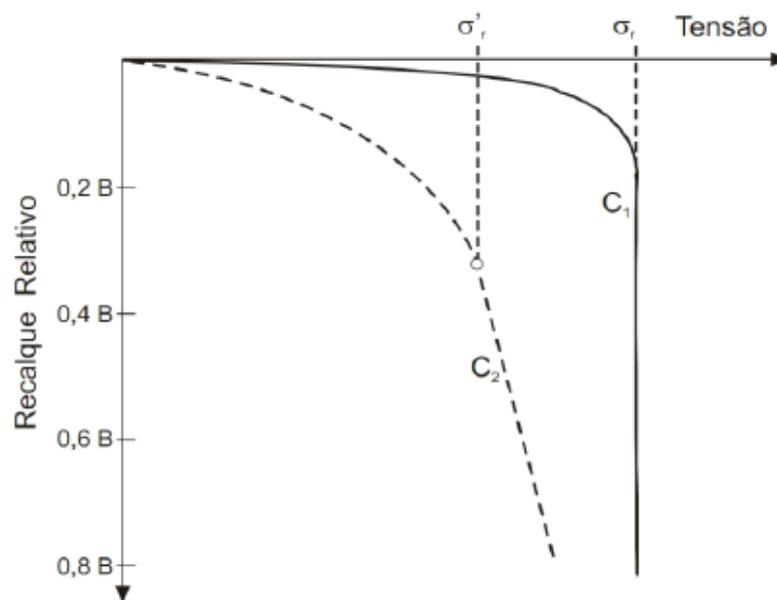


Figura 1 – Curva tensão x recalque (Rodrigues, 2012).

A curva apresenta dois tipos de ruptura: ruptura geral, na qual o solo apresenta uma tensão de ruptura bem definida (areias compactas e argilas rijas), e ruptura local, na qual o solo não apresenta uma tensão de ruptura definida (areias fofas e argilas moles).

Em conformidade com Cintra et al. (2003), pode-se estimar o módulo de deformabilidade através da prova de carga sobre placa. O coeficiente de reação do solo pode ser obtido ajustando-se uma reta ao trecho inicial da curva tensão-recalque, sendo calculado pela equação:

$$k_v = \frac{\sigma}{\rho} \text{ (MPa/m)} \quad (1.3)$$

onde, k_v é o coeficiente de reação vertical, σ é a tensão aplicada a placa e ρ é o recalque.

Considere uma sapata de largura ou diâmetro B assentada em uma camada argilosa semi-infinita, homogênea, com o módulo de deformabilidade E_s uniforme com a profundidade. Se σ é a tensão média na superfície de contato da base da sapata com o topo da argila, o recalque imediato ρ é dado pela seguinte equação, procedente da Teoria da Elasticidade:

$$\rho_i = \sigma \cdot B \cdot \left[\frac{(1-\nu^2)}{E_s} \right] \cdot I_p \quad (1.4)$$

Tabela 1 – Fator de Influência I_p (Cintra et al, 2003).

Sapata flexível				Sapata rígida
Forma	Centro	Canto	Médio	
Circular	1,00	0,64 (borda)	0,85	0,79
Quadrada	1,12	0,56	0,95	0,99
L/B = 1,5	1,36	0,67	1,15	
2,0	1,52	0,76	1,30	
3,0	1,78	0,88	1,52	
5,0	2,10	1,05	1,83	
10,0	2,53	1,26	2,25	
100,0	4,00	2,00	3,70	

Como exemplo, com $B = 0,80$ m (diâmetro da placa), $I_p = 0,79$ (Tabela 1) e $\nu = 0,35$ (coeficiente de Poisson médio para qualquer solo), resulta:

$$E_s = 0,55 \cdot k_v \text{ (MPa)} \quad (1.5)$$

O fator 0,55 (em metros) pode ser alterado para cada caso, em função do coeficiente de Poisson do solo.

Representando por k_{placa} e k_{sapata} o coeficiente de reação médio do solo sob a placa e sob a sapata, respectivamente, e E_{placa} e E_{sapata} , o módulo de deformabilidade médio do solo sob a placa e sob a sapata, respectivamente, pode-se concluir que, em argilas, o coeficiente de reação do solo diminui inversamente ao aumento da dimensão:

$$k_{sapata} = \frac{B_{placa}}{B_{sapata}} \cdot k_{placa} \quad (1.6)$$

Mas, como o fator 0,55 (em metros), deduzido para a placa de 0,80 m, aumenta proporcionalmente com a dimensão, o módulo de deformabilidade não muda:

$$E_{sapata} = E_{placa} \quad (1.7)$$

3 FORMULAÇÃO TEÓRICA

3.1 Análise do meio contínuo por MEC

O MEC tem despertado um grande interesse de pesquisadores de diversas áreas por apresentar, como característica principal, a diminuição da dimensão do problema, já que as aproximações envolvidas referem-se apenas ao contorno. Esta redução dimensional traz, como principais vantagens, a redução das aproximações, a simplificação dos dados de entrada e a diminuição da área de armazenamento de informações necessárias no processamento.

A origem do MEC está ligada à evolução dos esquemas de resolução de equações integrais. O esquema algébrico do MEC consiste na divisão do contorno em segmentos, denominados elementos de contorno, sobre os quais as variáveis de contorno são aproximadas por funções interpoladoras sobre pontos (nós) previamente escolhidos do elemento. Desta forma, as equações integrais podem ser discretizadas, passando a ser equações algébricas, relacionando esforços e deslocamentos nodais do contorno.

Escrevendo-se as duas equações para cada ponto nodal do contorno, obtém-se um conjunto de equações algébricas, cujas incógnitas são os deslocamentos e esforços nodais do contorno. Após a imposição das condições de contorno e a resolução do sistema de equações resultantes, tornam-se conhecidas todas as variáveis de contorno e, então, através da representação integral do deslocamento de um ponto de domínio e de suas derivadas, são obtidos os deslocamentos e esforços para pontos internos.

Esta divisão do contorno tem como objetivo a transformação das integrais em uma soma de integrais sobre cada elemento que constitui o contorno. Desta forma, a aproximação das variáveis de contorno é feita por funções interpoladoras de cada elemento, ficando a melhor representação do contorno ligada a escolha adequada do número e forma dos elementos usados.

As funções interpoladoras geralmente utilizadas são a constante, a linear e a quadrática, o que implica em interpolações sobre um, dois ou três pontos pertencentes ao elemento, respectivamente.

A representação algébrica das relações integro-diferenciais usadas no MEC se fundamenta no uso de relações de equilíbrio, junto com as equações que relacionam deslocamento e deformações - deformações específicas de Cauchy; mais as relações constitutivas entre tensão e deformação, assumindo meio homogêneo, isótropo, linearidade elástica entre tensão e deformação e admitindo que não haja mudanças de temperatura. Estas relações adequadamente manipuladas originam uma equação de equilíbrio (1.8) em termos de deslocamento, denominadas de equações de Navier-Cauchy e, na ausência de forças de volume, são expressas por:

$$u_{i,jj}(s) + \frac{1}{1-2\nu} \cdot u_{j,ji}(s) = 0, \quad i,j=1,2,3 \quad (1.8)$$

$u_i(s)$ é o deslocamento da direção ortogonal i do ponto s dentro do corpo e que satisfaça certas condições de contorno, e ν é o coeficiente de Poisson. Estas equações de domínio podem ser expressas como equações de superfície, as quais são representadas pela relação denominada de Identidade Somigliana (1.9):

$$u_i(p) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(p, S) \cdot u_j(S) \cdot \partial\Gamma(S) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(p, S) \cdot p_j(S) \cdot \partial\Gamma(S) \quad (1.9)$$

onde p e S são, respectivamente, o ponto fonte no domínio, onde uma força unitária é aplicada, e um ponto da superfície, u_i e p_i são, respectivamente, o campo de deslocamento real e forças de superfície do contorno S na j -ésima direção, enquanto u_{ij}^* e p_{ij}^* representam coeficientes ponderadores os quais mostram as respostas obtidas na direção j de S , de uma força aplicada na direção i do ponto p . Esta identidade é baseada no teorema da reciprocidade de Betti e as soluções ponderadas ou fundamentais são dadas por u_{ij}^* e p_{ij}^* que representam soluções particulares da equação diferencial parcial de (1.8) para uma específica condição de contorno.

A estratégia de se escrever a equação (1.9) apenas com pontos no contorno envolve o transporte de p , o qual encontra-se no maciço, para a superfície. Assim, a expressão (1.9) pode ser escrita com se segue:

$$C_{ij}(P) \cdot u_j(P) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(P, S) \cdot u_j(S) \cdot \partial\Gamma(S) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(P, S) \cdot p_j(S) \cdot \partial\Gamma(S) \quad (1.10)$$

a integral de (1.10) é definida no sentido do valor principal de Cauchy, París & Cañas (apud Aquino, 2008). Os termos da matriz C_{ij} são coeficientes que dependem da geometria do ponto P (Hartmann apud Aquino, 2008). As soluções ponderadoras que são aplicadas nesta pesquisa são as conhecidas soluções de Mindlin (1936) para o caso tridimensional.

Uma vez que as soluções analíticas para a expressão (1.10) não são obtidas para casos gerais, então, são alcançadas de maneira numérica. Dessa forma, o MEC é baseado na montagem de um sistema de equações algébricas resultantes de (1.10), escritas em termos de parâmetros nodais onde se aproximam os campos de contorno por funções de forma. Neste sentido, as relações de (1.10) são reescritas da seguinte maneira:

$$C_{ij}(P) \cdot u_j(P) + \sum_{k=1}^{NE} |J| \int_{\Gamma} p_{ij}^*(P, S) \cdot \Psi(S) \cdot \partial\xi(S) \cdot (U_i)^k = \sum_{k=1}^{NE} |J| \int_{\Gamma} u_{ij}^*(P, S) \cdot \Psi(S) \cdot \partial\xi(S) \cdot (P_i)^k \quad (1.11)$$

onde NE , Ψ , J são, respectivamente, o número de elementos de contorno, as funções de forma e a matriz Jacobiana de transformação de coordenadas. A matriz quadrada C_{ki} , de dimensão três, depende da posição do ponto “ P ”.

As integrais apresentadas em (1.11) não podem ser resolvidas analiticamente para superfícies genéricas ou são de difícil solução; assim, o uso de técnicas numéricas dadas por Brebbia & Dominguez e Barbirato (apud Aquino, 2008) é um expediente comum nestes casos. Assim, a expressão (1.11) pode ser apresentada para todo o domínio do problema, como um sistema algébrico do tipo:

$$[H] \cdot \{U\} = [G] \cdot \{P\} \quad (1.12)$$

A equação (1.12) deve ser acoplada a uma placa formulada pelo MEF.

3.2 Solução Fundamental de Mindlin

Diversas são as soluções fundamentais que podem ser empregadas na resolução da expressão (1.11). Para o caso particular da análise de um sólido homogêneo, isotrópico, tridimensional, elástico e semi-infinito, as soluções de Mindlin (1936) são as mais simples e adequadas para este expediente. Define-se um meio semi-infinito Ω^* , onde se aplicam três forças unitárias concentradas nas direções e

sentidos dos eixos ortogonais em um certo ponto S do interior do semi-sólido. Assume-se que a superfície do contorno Γ^* , definida em $x_3 = 0$, esteja livre de forças de superfície, ver representação geométrica do problema elástico fundamental de Mindlin na Figura 2 (Calderón, 1996).

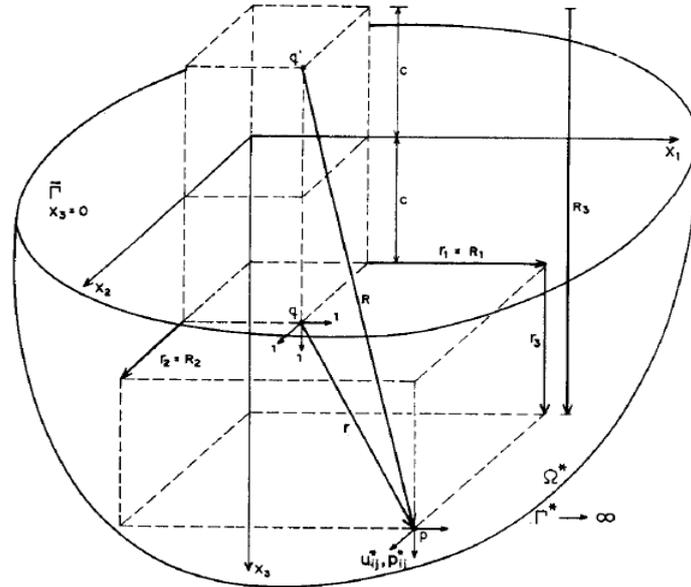


Figura 2 – Problema fundamental de Mindlin (Fonte: Calderón, 1996).

Com o uso das soluções fundamentais de Mindlin, podem-se montar as matrizes de influência H e G . Discretizando-se o problema em elementos de superfície empregando as restrições de contorno na equação (1.12), de forma que em cada ponto nodal se conheça ou força de superfície ou deslocamento, é possível chegar a um sistema linear do tipo:

$$K_{mec} \cdot X = P_{mec} \quad (1.13)$$

onde a matriz K_{mec} , densa e não-simétrica, contém valores referentes às influências tanto das forças de superfície quanto das parcelas de deslocamentos. O vetor X contém os valores incógnitos de cada ponto nodal, ou de deslocamento ou de força de superfície, e o vetor P_{mec} possui os valores prescritos já multiplicados pelas suas correspondentes parcelas integrais.

3.3 Análise do meio contínuo via modelo de Winkler

De acordo com Aquino (2008), neste modelo um sistema de molas equivalente e discreto substitui o meio contínuo. Quando se integram ao solo os elementos de fundação e de edifício baseado no MEF, as características de esparsidade e simetria da matriz de rigidez final não se perdem, evidenciando um menor armazenamento e velocidade de cálculo na resolução do sistema linear para problemas processados em microcomputadores.

A hipótese de Winkler impõe que as tensões aplicadas no solo sejam proporcionais, em uma relação escalar, ao recalque mobilizado. Sem influência entre o ponto de aplicação desta tensão com sua vizinhança, determina-se uma relação pontual entre fundação-solo, mediante a definição de uma constante de mola que representará a rigidez do maciço. Para isto, é preciso definir os valores de K_v e K_h , os quais são denominados respectivamente de módulo de reação vertical e horizontal, que possuem unidade de FL^{-3} .

Existem diversas metodologias para se obterem os módulos de reações:

- a) O primeiro procedimento é baseado em tabelas e ábacos que relacionam o módulo de reação com o tipo de solo. Estes valores são adquiridos em ensaios *in situ* em regiões e condições específicas.
- b) O segundo método é o método racional denominado Ensaio de Placa, os parâmetros de deformabilidade são obtidos *in situ* ou em laboratórios mediante o ensaio de provas de carga em placas.
- c) Por último temos o Recalque Vertical Estimado que se baseia na obtenção do recalque do meio (d) a partir de uma pressão unitária aplicada (P), de forma que o módulo de reação é dado pela relação:

$$k_v = \frac{P}{d} = \frac{1}{d} (FL^{-3}) \quad (1.14)$$

No trabalho de Aquino (2008), o módulo de reação é adquirido a partir da obtenção do recalque em um certo ponto sobre o eixo z , quando submetido de uma pressão unitária aplicada sobre uma área retangular, conforme Figura 3, e este valor é expresso pela equação descrita em Poulos & Davis (1974), conforme a equação (1.15):

$$d = \frac{p \cdot b}{E} \cdot (1 - \nu^2) \cdot \left(A - \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \cdot B \right) \quad (1.15)$$

$$A = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{1 + m^2 + n^2} + m^2}{\sqrt{1 + m^2 + n^2} - m^2} \right) \right] + m \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{1 + m^2 + n^2} + 1}{\sqrt{1 + m^2 + n^2} - 1} \right) \quad (1.16)$$

$$B = \frac{n}{2\pi} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{m}{n \cdot \sqrt{1 + m^2 + n^2}} \right) \quad (1.17)$$

$$m = L/b \quad (1.18)$$

$$n = z/b \quad (1.19)$$

no qual L é a metade do comprimento da fundação, p é a carga constante e uniformemente distribuída, b é a metade da largura da fundação, E é o módulo de elasticidade do solo e ν é o coeficiente de Poisson do solo.

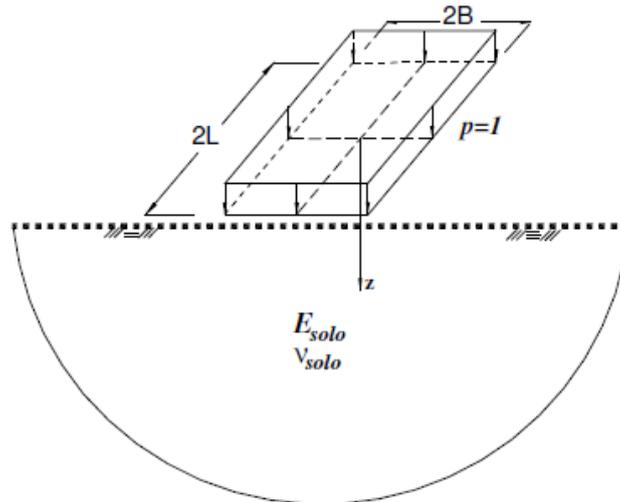


Figura 3 - Representação dos dados da fundação e do solo para obtenção do recalque vertical (Aquino, 2008).

Para este procedimento, é necessário estimar o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do solo, e há na literatura muitas tabelas e correlações empíricas para associá-los com o tipo de solo e com o índice de resistência à penetração do SPT (Aquino, 2008).

3.4 Análise do edifício e fundação superficial flexível

Aquino (2008) aplicou o MEF para modelar a super e infraestrutura, utilizando elementos de barra e elementos triangulares planos com a formulação de membrana desenvolvida em Bergan e Felippa (1985) e de flexão apresentada em Batoz (1980). O autor não considerou a influência das lajes dos pavimentos, porém, considerou as condições de equilíbrio e compatibilidade existentes em pontos nodais comuns aos domínios modelados pelos métodos MEF e MEC.

Portanto, a equação final obtida em (1.13) pode ser relacionada com a equação matricial clássica do MEF. Para que isto ocorra devem-se equilibrar as forças externas do MEC com as do MEF, pois o MEC gera um sistema associado a forças de superfície enquanto o MEF emprega o conceito de força nodal equivalente (Figura 4). Para o acoplamento entre as duas formulações é imprescindível empregar um campo de forças comum aos dois métodos.

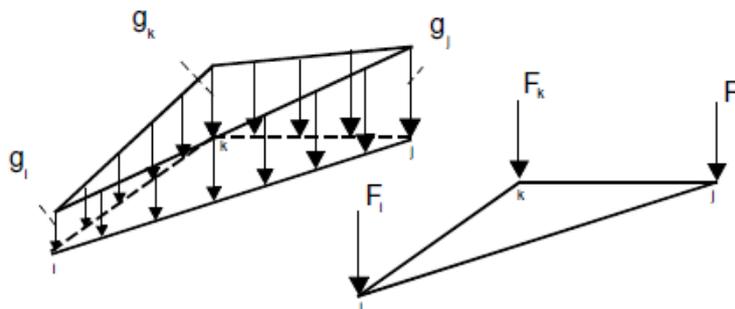


Figura 4 – Forças de superfície e cargas nodais equivalente de um elemento (Aquino, 2008).

O trabalho das cargas externas é dado por:

$$T_e = \int_A g(x_1, x_2) \cdot w(x_1, x_2) dA \quad (1.20)$$

no qual $g(x_1, x_2)$ e $w(x_1, x_2)$ são, respectivamente, as forças de superfície e os deslocamentos transversais atuantes no domínio do elemento triangular de área igual a A . Para o caso deste campo possuir variação linear, os campos de deslocamentos transversais e de forças de superfície podem ser expressos por:

$$w = w_i \xi_1 + w_j \xi_2 + w_k \xi_3 \quad (1.21)$$

$$g = g_i \xi_1 + g_j \xi_2 + g_k \xi_3 \quad (1.22)$$

Minimizando a energia potencial devido às cargas e considerando as outras duas direções obtém-se à relação:

$$\begin{Bmatrix} F_i^l \\ F_j^l \\ F_k^l \end{Bmatrix} = \frac{A}{12} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} g_i^l \\ g_j^l \\ g_k^l \end{Bmatrix} = [\overline{Q}] \cdot \begin{Bmatrix} g_i^l \\ g_j^l \\ g_k^l \end{Bmatrix} \quad (1.23)$$

onde $l=1,2,3$ é a direção e i, j e k são os três nós locais do elemento.

A expressão final da super e da infraestrutura já incorporado à influência do solo pode ser escrita como:

$$[K_{mef}] \cdot \{U_{mef}\} = \{F_{mef}\} - \{R_{mef}\} = \{F_{mef}\} - \left[\overline{Q} \right] \cdot [\widehat{K}] \cdot \{U_{solo}\} \quad (1.24)$$

onde o vetor R representa as forças concentradas de reação. Os termos K_{mef} , U_{mef} e F_{mef} são, respectivamente, a matriz de rigidez, os vetores de parâmetros nodais de deslocamentos e as forças

concentradas da estrutura discretizada pelo MEF. As expressões \overline{Q} , \widehat{K} e U_{solo} são, respectivamente, a matriz de transformação expandida relativa à contribuição de todos os elementos, $\widehat{K} = K_{mef}$ que possui valores referentes às influências tanto das forças de superfície quanto das parcelas de deslocamentos, e U_{solo} o vetor de deslocamentos nodais da rede discretizada pelo MEC. Logo, é possível reescrever a equação (1.24) conforme a seguir:

$$K_{tot} \cdot U_{tot} = F_{tot} \quad \text{onde} \quad K_{tot} = K_{mef} + \overline{Q} \cdot K_{mec} \quad (1.25)$$

os vetores U_{tot} e F_{tot} são os deslocamentos e as forças totais do sistema solo-estrutura.

Já no acoplamento entre a fundação superficial e o solo simulado pelo método de Winkler, transformam-se os módulos de reações em constantes elásticas. Isto é feito facilmente, multiplicando-se este valor pela área de cada elemento superficial, ou seja:

$$\bar{k}^i = k_v \cdot A^i (FL^{-1}) \quad (1.26)$$

Posteriormente, é considerado um valor médio deste coeficiente em cada nó do elemento de fundação, dividindo-se este valor pelo número total de nós (N_i) deste elemento, conforme a seguir:

$$k^i = \bar{k}^i / N_i (FL^{-1}) \quad \text{onde } i = 1, \text{ número total de elemento de fundação} \quad (1.27)$$

O coeficiente de mola horizontal foi estipulado como um percentual do coeficiente de mola vertical, este percentual é definido pelo projetista, e neste projeto foi utilizado um percentual de 33,33%. A expressão final deste modelo é demonstrada por:

$$[\bar{K}_{mef}] \cdot \{U_{mef}\} = \{F_{mef}\} \quad (1.28)$$

com \bar{K}_{mef} já considerando as influências dos coeficientes de mola nas respectivas posições dos nós de contato com o solo (Aquino, 2008).

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1 Exemplo 1: Correlação entre o Módulo de Elasticidade do solo e o coeficiente de mola

Nesse exemplo, visa-se determinar a correlação entre os dois modelos, Mindlin e Winkler, através do módulo de elasticidade do solo (E) e o coeficiente de mola (K), por meio da simulação de uma edificação simplificada.

A edificação é composta por 4 pilares e 1 andar com pé direito de 3 m. As vigas são de dimensões 20x50 cm, os pilares são de dimensões 20x20 cm e as sapatas são de dimensões 2,5x2,5 m. As propriedades físicas e geométricas são mostradas na Figura 5. Foram consideradas também cargas gravitacionais uniformemente distribuídas nas vigas de 20 kN/m.

Segundo a Teoria da Elasticidade, pode-se prever que $E = f(K)$, cuja relação depende da forma, da rigidez e da dimensão das sapatas e também do coeficiente de Poisson do solo.

Considerando as equações 1.3 e 1.4, com uma discretização com 25 nós como representação do contato do elemento de fundação com o solo (Fig. 5), teremos:

$$E = B \cdot (1 - \nu^2) \cdot I_p \cdot k_v = B \cdot (1 - \nu^2) \cdot I_p \cdot \left(\frac{25 \cdot K}{A} \right) \quad (1.29)$$

a) *Sapata rígida:*

$$E = B \cdot (1 - \nu^2) \cdot I_p \cdot k_v = B \cdot (1 - \nu^2) \cdot I_p \cdot \left(\frac{25 \cdot K}{A} \right) = 2,5 \cdot (1 - 0,35^2) \cdot 0,99 \cdot \left(\frac{25 \cdot K}{2,5^2} \right) = 8,7 \cdot K$$

b) *Sapata flexível:*

Para I_p médio (Tabela 1),

$$E = B \cdot (1 - \nu^2) \cdot I_p \cdot k_v = B \cdot (1 - \nu^2) \cdot I_p \cdot \left(\frac{25 \cdot K}{A} \right) = 2,5 \cdot (1 - 0,35^2) \cdot 0,95 \cdot \left(\frac{25 \cdot K}{2,5^2} \right) = 8,3 \cdot K$$

Para I_p central (Tabela 1),

$$E = B \cdot (1 - \nu^2) \cdot I_p \cdot k_v = B \cdot (1 - \nu^2) \cdot I_p \cdot \left(\frac{25 \cdot K}{A} \right) = 2,5 \cdot (1 - 0,35^2) \cdot 1,12 \cdot \left(\frac{25 \cdot K}{2,5^2} \right) = 9,8 \cdot K$$

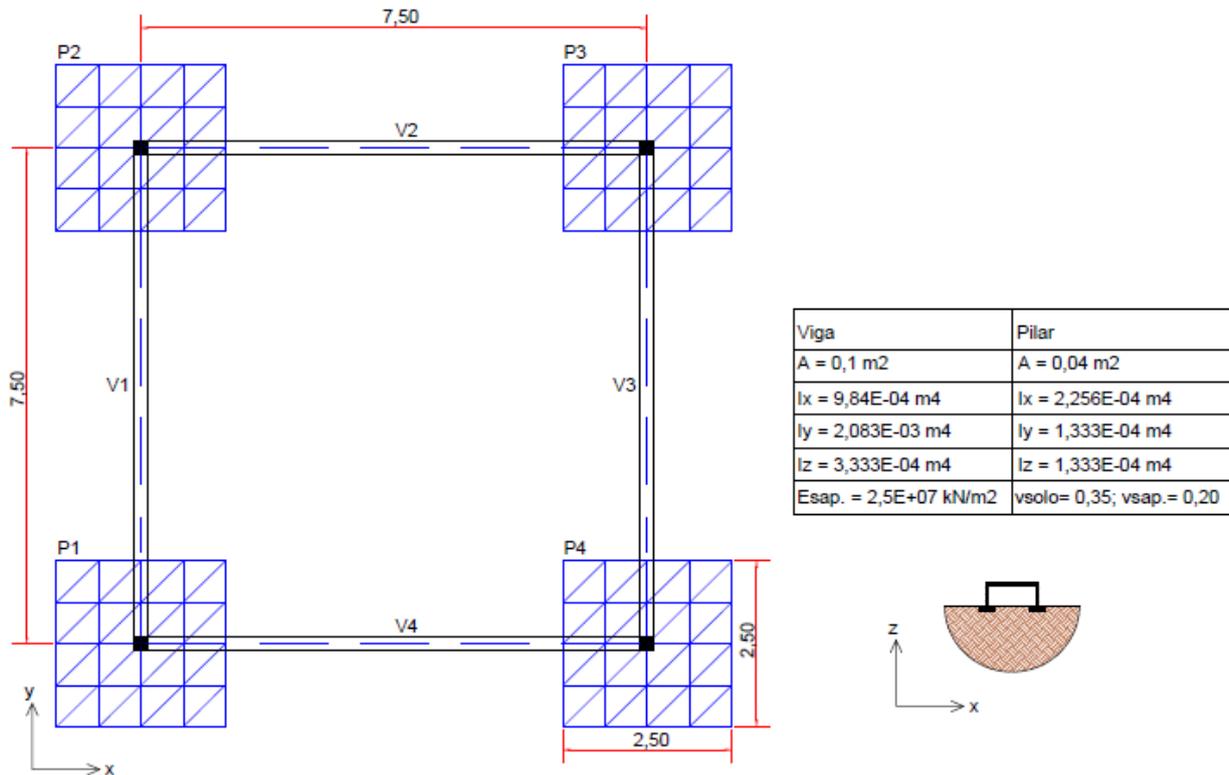


Figura 5 – Propriedades físicas e geométricas.

Com o objetivo de se alcançarem recalques semelhantes na direção Z (vertical), para um mesmo carregamento, foram definidas para sapata rígida a espessura de 0,80 m e para sapata flexível a espessura de 0,40 m. Variaram-se os valores do Módulo de Elasticidade Longitudinal (E) e calcularam-se os valores da constante de mola (K) para obterem-se mesmos valores de recalque.

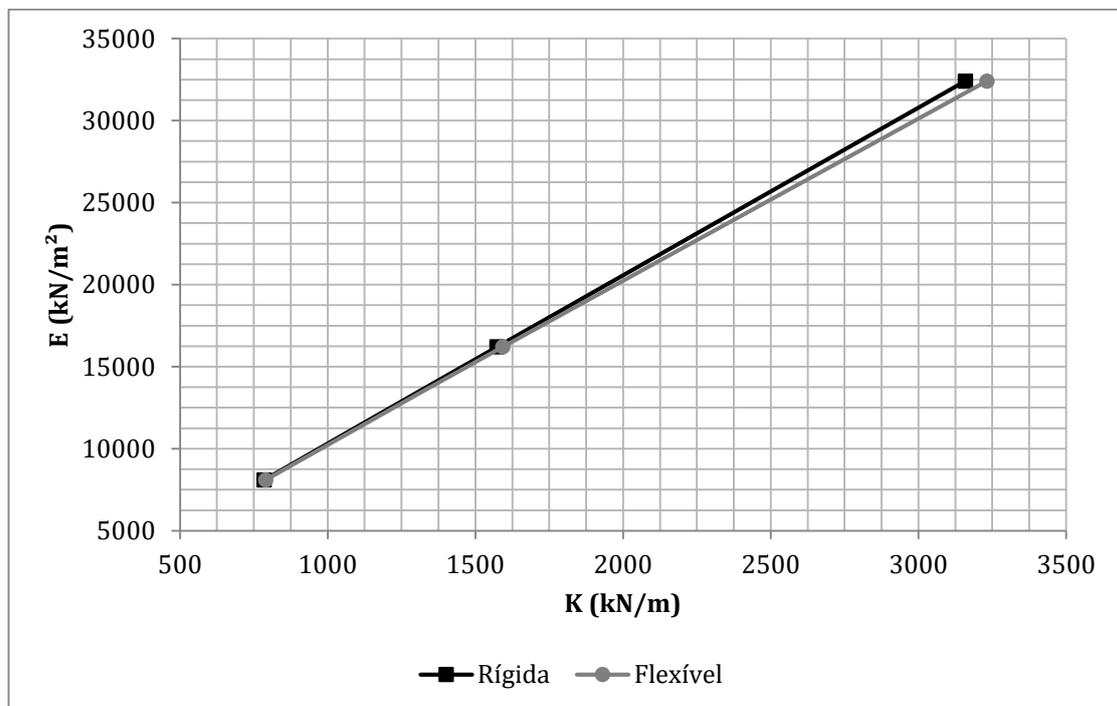


Figura 8 - Relação E (kN/m²) versus K (kN/m).

Informação que observa-se é de que as expressões obtidas na plotagem dos gráficos para os dois tipos de sapata (Figura 8) resultam em uma linearidade na relação de E com K , com constantes 10,2 para sapata rígida e 9,9 para sapata flexível mostrando pequena influência da rigidez da sapata naquela relação.

4.2 Exemplo 2: Correlação entre o ensaio de prova de carga sobre placa e o programa computacional

Com o objetivo de comparar o comportamento da formulação numérica utilizada com os ensaios de prova de carga sobre placa circular, simulou-se uma sapata isolada. Neste exemplo foram comparados o recalque simulado de uma sapata quadrada de 2,50 m de lado com o recalque estimado por meio de prova de carga, utilizando os parâmetros estimados para uma tensão de 80 kPa. A prova de carga sobre placa com diâmetro de 0,80 m foi realizada em argila porosa de São Paulo por Cintra, Aoki e Albiero (2003). As vigas, os pilares e as sapatas possuem as mesmas propriedades físicas e geométricas do exemplo 1.

Para tensão de 80 kPa, na curva tensão x recalque da referência, obtém-se o recalque imediato ρ_p para a prova de carga:

$$\rho_p = 3,4mm$$

A sapata tem um diâmetro equivalente de para mesma área de contato:

$$B_s = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,50^2}{\pi}} = 2,80m$$

Então, obtém-se o recalque estimado na sapata usando a equação 1.1, que seria:

$$\rho_s = \rho_p \cdot \frac{B_s}{B_p} = 3,4 \cdot \frac{2,80}{0,80} = 11,9mm$$

A curva tensão x recalque é praticamente linear até uma tensão de apenas 0,02 MPa, com o correspondente recalque de 0,5 mm. Logo a relação tensão/recalque neste trecho linear resulta:

$$k_s = \frac{\sigma}{\rho} = \frac{0,02}{0,5} = 0,04 MPa/mm = 40 MPa/m$$

e o Módulo de Elasticidade equivalente, obtido na equação 1.5, obtém-se

$$E_s = 0,55 \cdot k_s = 0,55 \cdot 40 = 22MPa$$

sendo que, para argilas, $E_{placa} = E_{sapata}$;

O coeficiente de mola foi calculado, conforme relação 1.29 desenvolvida no exemplo 1, considerando a discretização com 25 nós do elemento de fundação:

$$K = \left(\frac{E}{B \cdot (1-\nu^2) \cdot I_p} \right) \cdot \left(\frac{A}{25} \right) = \left(\frac{22000}{2,5 \cdot (1-0,35^2) \cdot 0,99} \right) \cdot \left(\frac{2,5^2}{25} \right) \cong 2530 kN/m$$

No programa computacional, foram consideradas 4 sapatas quadradas com 2,50 m de lado e espessura de 0,80 m (consideradas rígidas), afastadas 5,0 m entre si (7,5 m entre eixos de pilar, para eliminar o efeito de proximidade, admitindo-se que a propagação de tensões se dá, de uma forma simplificada, mediante uma inclinação 2:1).

Os resultados de recalques obtidos ao longo do eixo de simetria da sapata, Tabela 2, mostram uma pequena deformação por flexão da sapata, considerada rígida. Já pelo modelo Mindlin, considerando inserida a estrutura em meio semi infinito, observa-se uma inclinação da sapata, demonstrando efetiva sensibilidade referente à interação entre as sapatas, mesmo considerando um distanciamento entre elas no que se imagina não haver interferência do bulbo de tensões de cada sapata. Observa-se que esta interferência não é captada pelo modelo Winkler, no qual simulam-se as sapatas conectadas ao solo por molas verticalizadas apenas.

Tabela 2 – Recalque simulado pelo programa computacional.

Coordenada local	Mindlin (mm)	Winkler (mm)
Eixo de Simetria		
-1,25 m	9,21	7,90
-0,625 m	9,31	7,92
0 m	9,41	7,94
0,625 m	9,49	7,92
1,25 m	9,57	7,90

Há uma redução significativa nos recalques (variando de 7,9 e 9,4 mm, nos centros das sapatas, valores da ordem de 66 e 79%, respectivamente, em relação ao valor empírico estimado, 11,9 mm).

Observou-se que, de acordo com Lopes e Gusmão (1991), o aumento da rigidez relativa estrutura-solo (K_{ss}) com o método de interação solo-estrutura reduz os valores dos recalques, como é mostrado na Figura 7.



Figura 7 - Recalque x rigidez relativa estrutura. (Lopes e Gusmão, 1991)

4.3 Exemplo 3: Relação da rigidez da sapata com tensões de contato e recalques

Neste item analisa-se a influência da rigidez das sapatas na simulação, utilizando apenas a formulação por Mindlin para simulação numérica.

Conforme a NBR 6118, a classificação das sapatas quanto à rigidez é dada pela relação das dimensões da sapata A com a do pilar a_p . No exemplo, para pilares de dimensões 20 x 20 cm:

a) *Sapata rígida:*

$$h \geq \frac{A - a_p}{3} = \frac{2,5 - 0,2}{3} \cong 0,80m$$

b) *Sapata flexível:*

$$h \leq 0,80m$$

Com os dados dos exemplos anteriores, variou-se a espessura da sapata entre 0,20 a 1,2 m para analisar as diferenças entre os recalques das sapatas flexíveis e rígidas (Figura 9 e Figura 10), com carga nos pilares de 500 kN.

Observa-se que, para as sapatas consideradas flexíveis, com a deformação por flexão acentuada, os recalques no ponto central da sapata são maiores e diminuem com o aumento da espessura da sapata, se estabilizando a partir da espessura de 70 cm.

Estas respostas coincidem com o encontrado na literatura, Cintra, Aoki e Albiero (2003), que afirmam que o recalque do centro de uma sapata quadrada flexível é maior que o recalque que ocorre nos cantos (Figura 8a). De uma sapata flexível (que aplica tensões uniformes à argila) para uma sapata

rígida (recalques uniformes), as tensões de contato na base da sapata devem se acentuar nas bordas e serem aliviadas na região central (Figura 8b).



Figura 8 – Tensão de contato entre sapata e argila (Cintra, Aoki e Albiero, 2003).
a) sapata flexível e b) sapata rígida

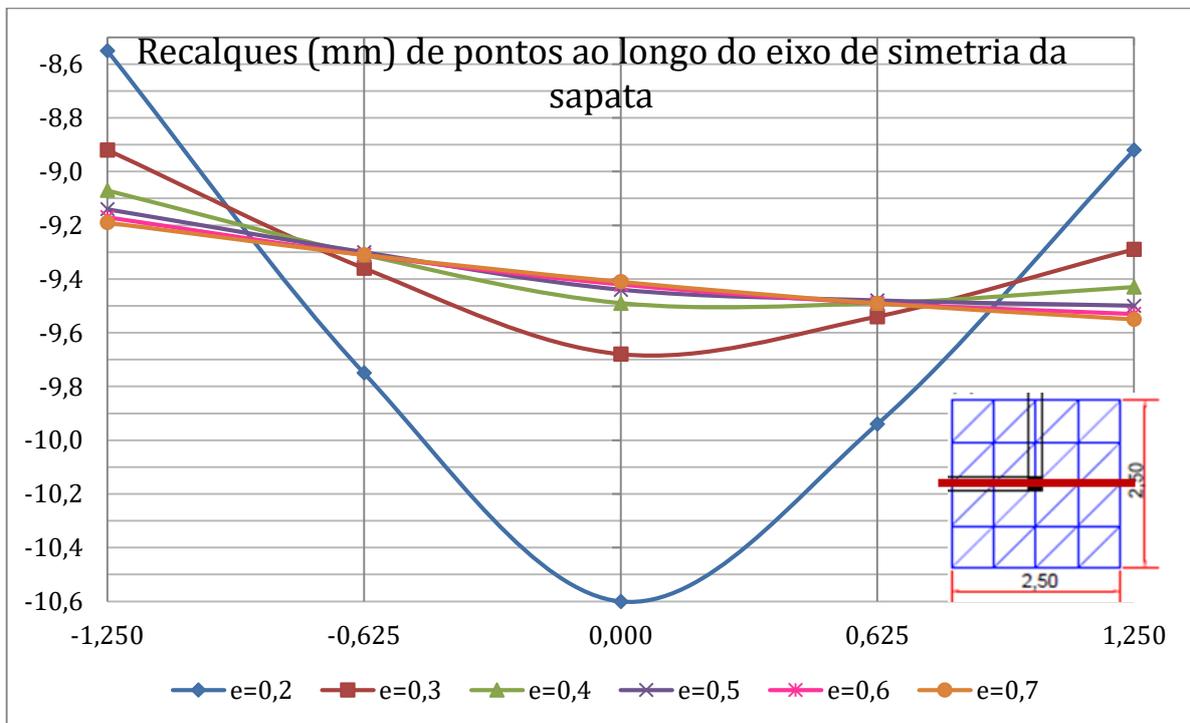


Figura 9 – Deformação da sapata considerada flexível, conforme variação da espessura, medida no eixo de simetria. (e: espessura, em m).

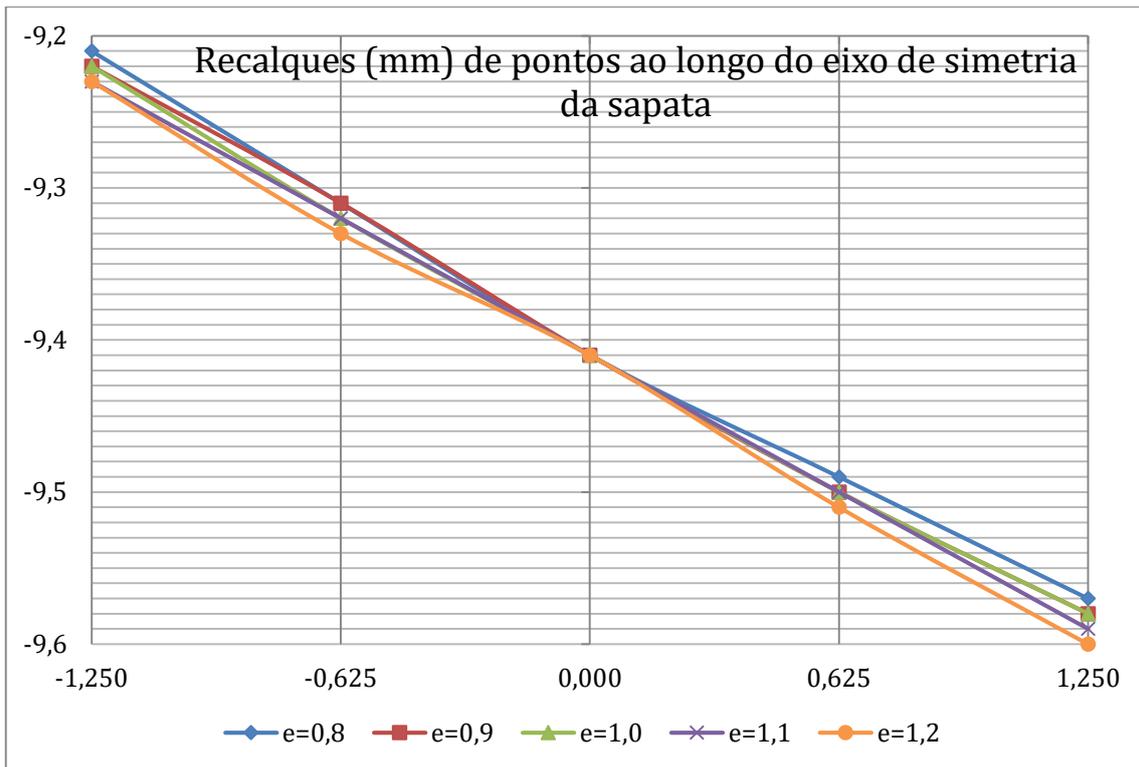


Figura 10 – Deformação da sapata considerada rígida, conforme variação da espessura, medida no eixo de simetria. (e: espessura, em m).

Nota-se que há deformação da sapata mais acentuada no caso da admitida flexível, $B < 0,80$ m, que pode ser observada com os diferentes recalques obtidos ao longo do eixo de simetria. Nota-se que o limite para a delimitação entre a sapata flexível e a rígida, no valor calculado da espessura de 0,8 m na literatura, é válida e que, a partir desta espessura (Figura 10), não há deformação da sapata, mas apenas sua inclinação.

Observa-se nas Figura 9 e Figura 10 que o recalque no centro da sapata diminuiu em torno de 11% (de 10,6 a 9,4 mm) da sapata flexível para sapata rígida e uniformizou-se.

Nota-se também uma inclinação das sapatas, que decresce com os maiores valores numéricos das propriedades do solo (E e K), como esperado.

4.4 Exemplo 4: Influência da proximidade das sapatas adjacentes – bulbo de tensões

Para avaliar o motivo das inclinações das sapatas, que deve-se à sua proximidade e à influência entre si, variaram-se as distâncias (d) entre os eixos dos pilares para poder determinar a distância mínima em que não há interferência entre sapatas.

Portanto, continuando o exemplo anterior, estudou-se a sobreposição dos bulbos de tensões das sapatas através do método de Mindlin para determinar uma distância em que a influência entre sapatas seja minimizada. Para isso foram simuladas diversas distâncias entre os eixos dos pilares (d), com os espaçamentos considerados:

$d = 1,5B = 3,7$ m; $d = 2B = 5,0$ m; $d = 2,5B = 6,2$ m; $d = 3B = 7,5$ m; $d = 3,5B = 8,7$ m;
 $d = 4B = 10,0$ m; $d = 4,5B = 11,2$ m; $d = 5B = 12,5$ m; $d = 5,5B = 13,7$; $d = 6B = 15,0$ m.
 onde B é a largura da base da sapata quadrada.

Os resultados para sapata rígida e flexível são mostrados nas Figura 11 e Figura 12. Procurou-se comparar os resultados do comportamento do conjunto de sapatas, verificando a influência da vizinhança e da rigidez das sapatas. Nota-se na Figura 11 que não há grande diferença nos recalques para sapatas consideradas flexível e rígida.

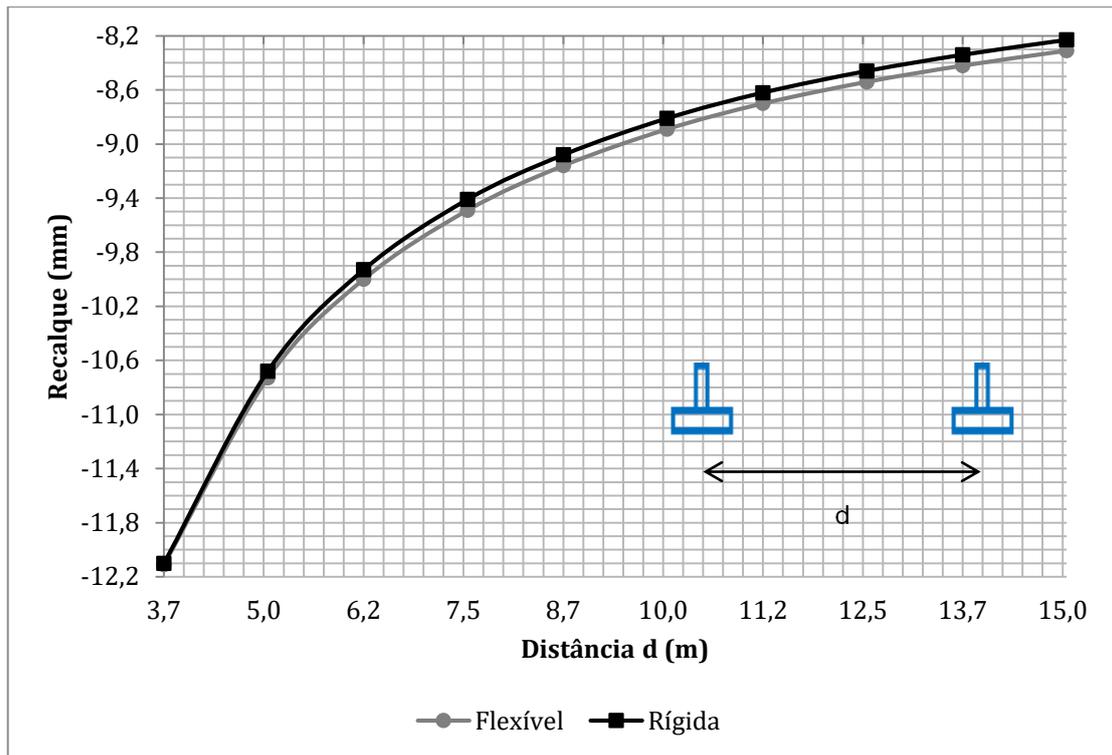


Figura 11 - Recalque medido no centro da sapata influenciado pela distância (d) entre eixos de pilares.

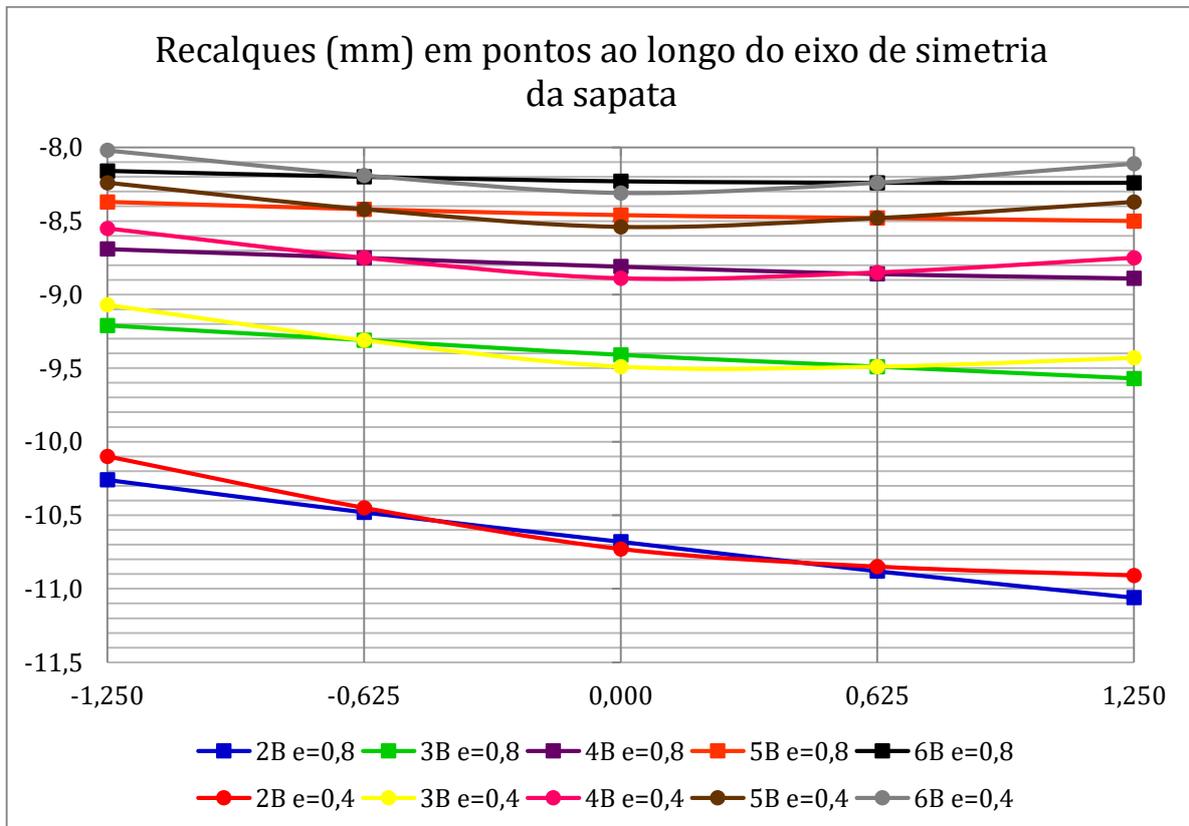


Figura 12 – Redução da inclinação da sapata com o aumento da distância (d) entre eixos de pilares. Comparam-se sapatas com espessuras e=0,8 m e e=0,4 m

Outra constatação é de que a distância mínima para que se possa desconsiderar uma influência entre sapatas é em torno de $3B$, conforme encontrado na literatura. Nesta simulação, para as distâncias de $d = 3B$ a $3,5B$ há uma diferença de recalque na ordem de 3,5%:

$$1 - \frac{d_{3,5B}}{d_{3B}} = 0,035$$

Na Figura 12 pode-se observar também que a distâncias menores do que $d = 3B$ já há inclinação perceptível das sapatas, que pode induzir a esforços adicionais na base dos pilares, de flexão e/ou de torção em níveis indesejáveis nestes elementos da estrutura (pilares, pilares-parede e vigas).

Nas Figuras 13 e 14 demonstra-se que estas inclinações da sapata promovem esforços nos pilares devido à vinculação rígida base do pilar/sapata. Observa-se que, para sapatas próximas, os momentos fletores induzidos pela inclinação das sapatas são de grandeza importante; para distâncias acima de valores $d=4B$, estes momentos diminuem consideravelmente. Esta é mais uma constatação de que há uma interferência no comportamento da estrutura devido à sobreposição dos bulbos de tensões no solo em distância entre eixos abaixo de $d=4B$.

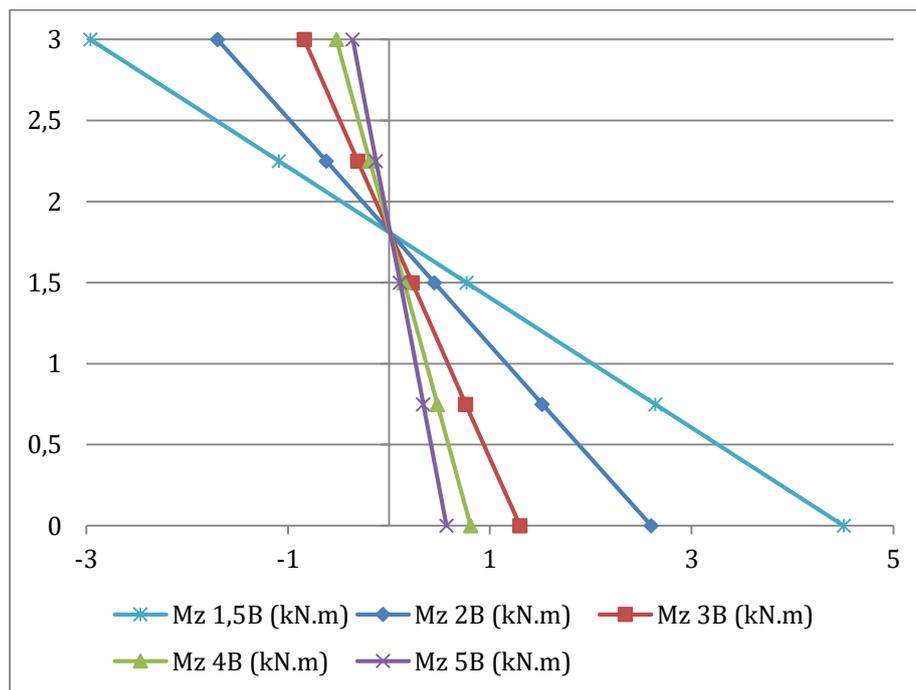


Figura 13 – Variação dos momentos fletores no pilar em função da distância (d) entre eixos de pilares

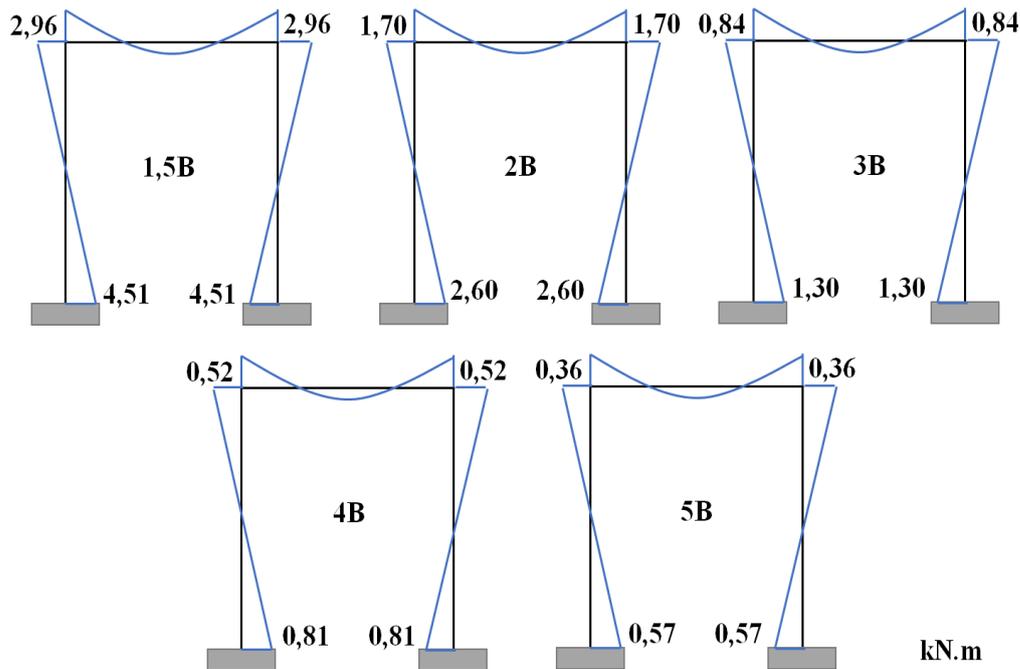


Figura 14 – Diagramas de momentos fletores nas vigas e pilares, induzidos pelas inclinações de sapatas, em função da distância (d) entre eixos de pilares.

Com o objetivo de se analisar o que está acontecendo com solo embaixo da sapata, foram calculados valores de tensão e do recalque dentro do meio contínuo.

Para a sapata quadrada de 2,5 m de lado, foram analisadas as disposições com espaçamentos entre eixos de pilar: $d = 1,5B$; $d = 2B$; $d = 3B$; $d = 4B$; $d = 5B$.

Pode-se ressaltar que os recalques no solo para sapata rígida e flexível são muito próximos, de maneira que não foi avaliada a diferença pela espessura das sapatas.

A superfície e a profundidade foram analisadas em níveis a cada 1,0 m, a partir da profundidade de 0,5 m, em um plano que passa pelos eixos de dois pilares. Na configuração de $d = 4B = 10$ m, os centros das sapatas se encontram nas coordenadas 0,0 e 10,0 m, os recalques no solo (m) versus coordenadas horizontais (m) são mostrados na Figura 15 em forma de gráfico, nos quais as profundidades Z que variam de 0,5 a 6,5 m e indicadas, respectivamente, por $Z0,5$ a $Z6,5$, são representadas.

Retomam-se as mesmas constatações dos resultados anteriores que, conforme aumenta-se a distância entre pilares, os recalques no centro das sapatas diminuem, com valores nos casos extremos de 0,012 a 0,008 m. Outro ponto a ser comentado é que, a partir da distância $4B$ (situação representada na Figura 15), não há mais influência entre as sapatas, de maneira que os deslocamentos medidos no eixo equidistantes entre pilares não mais se alteram com a profundidade ou seja, a influência da sobreposição dos bulbos de tensões foi quase nula. Pode-se ainda considerar que, a partir de uma profundidade de 11,25 m ($Z = 4,5B$), há uma uniformização de recalques, ou seja, o efeito do bulbo de tensões já é praticamente nulo em todas as distâncias analisadas. Nessas análises não se considera o acréscimo de tensão total (ou efetiva) devido ao peso próprio do solo.

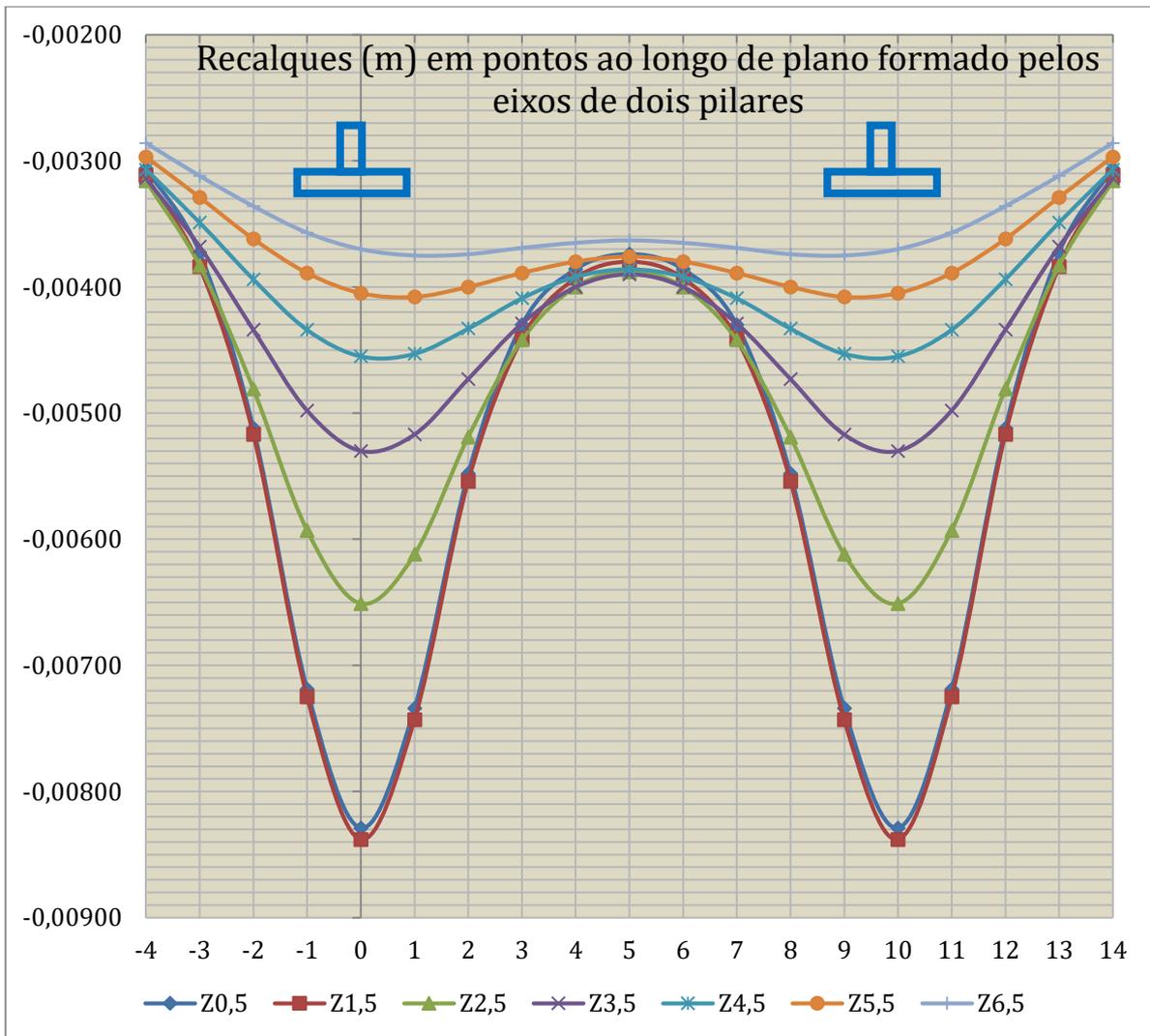


Figura 15 – Recalque no solo para o espaçamento de $d = 4B$.

4.5 Exemplo 5: Dimensão da sapata versus o recalque mobilizado

Outra pesquisa foi feita com a finalidade de avaliar o efeito da redução da dimensão da sapata no recalque mobilizado quando solicitada à mesma tensão. Reduziu-se sua dimensão para 2,0 m de lado, avalia-se a diminuição dos recalques em relação ao exemplo anterior, com sapatas de lado de 2,5 m.

Averiguou-se que para sapata quadrada de 2,5 m o recalque do solo no centro da sapata reduziu da ordem de 13,0 mm para 9,5 mm conforme o espaçamento entre eixos dos pilares (d) aumenta. Já para a sapata quadrada de 2,0 m, o recalque do solo no centro da sapata reduziu de 10,0 mm para 7,5 mm conforme o espaçamento (d) aumenta, demonstrando um menor recalque e uma menor variação de recalque para uma menor dimensão de sapata. Assim, foi plotado inicialmente um gráfico de recalque (recalque do solo no centro da sapata) versus espaçamento entre eixos de pilares (Figura 16). Observa-se a diminuição dos recalques com o aumento do espaçamento, conforme esperado, e praticamente uma estabilização dos recalques após distância de $5B$ (12,5 m para sapata de 2,5 m e 10,0 m para sapata de 2,0 m).

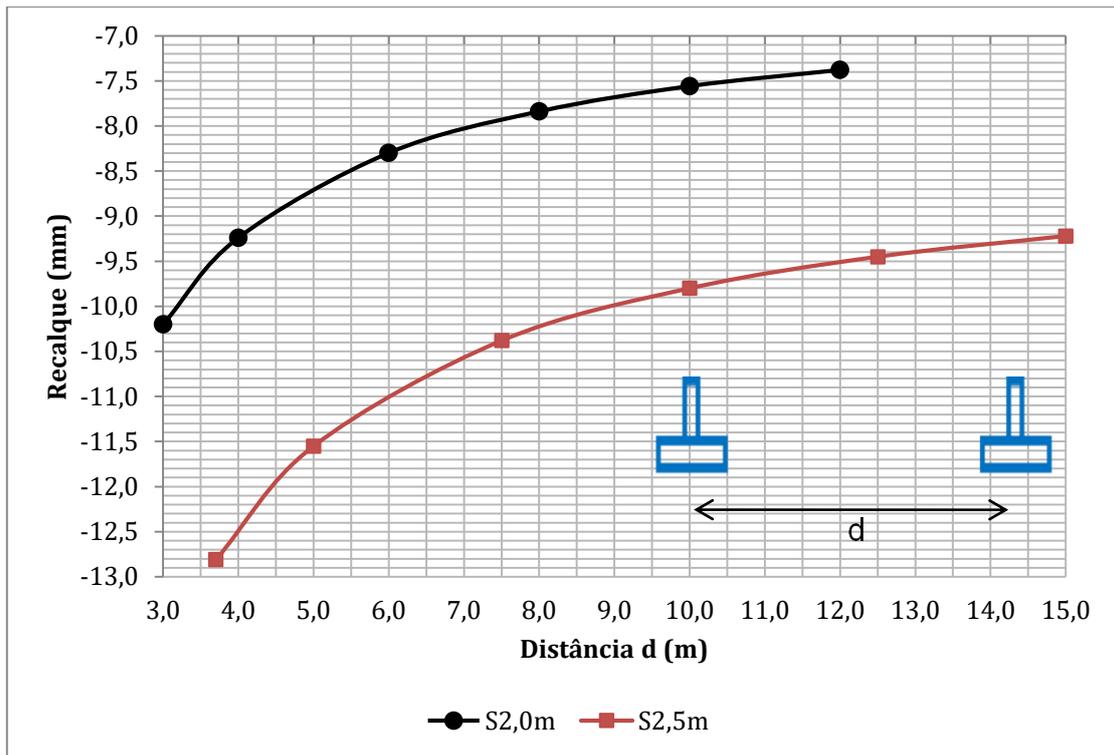


Figura 16 – Recalque (mm) versus distância (d) entre eixos de pilares (m).

Para eliminarmos o efeito da dimensão da sapata e para realizarmos uma comparação adimensional, dividimos valores de recalque e de distância pela dimensão B da sapata e plotamos novamente a variação para os dois tipos de sapata (Figura 17).

Pode-se observar que há um comportamento similar das duas sapatas, com diferença insignificante entre as duas curvas, e que há uma estabilização dos recalques a partir de uma mesma distância entre eixos, aqui adimensional, de 4 (m/m).

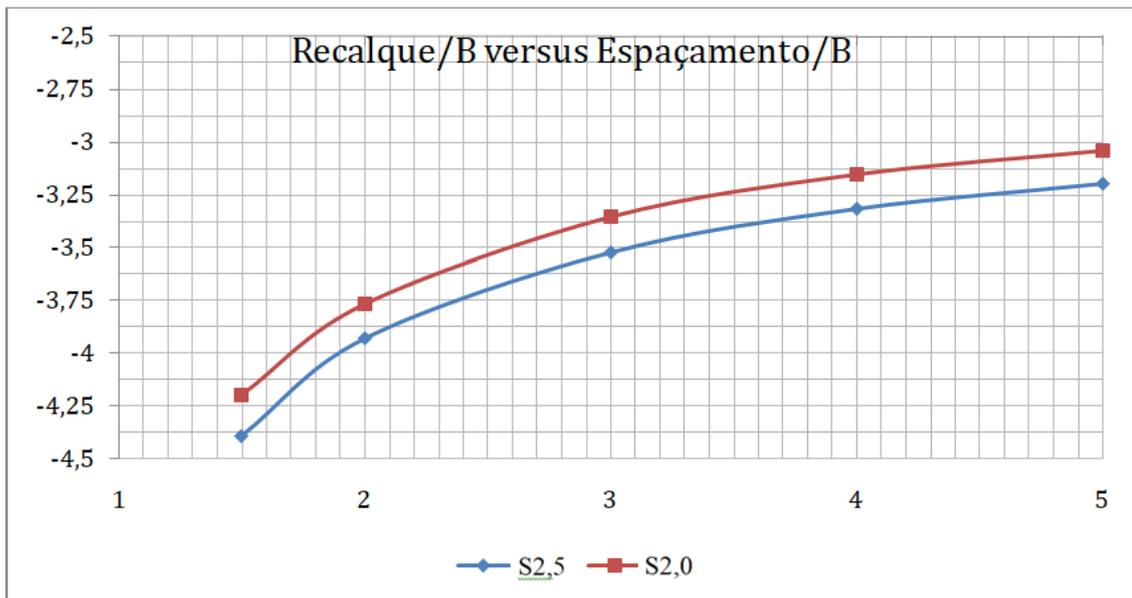


Figura 17 – Recalque adimensional (mm/m) versus espaçamento adimensional (m/m).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio da revisão bibliográfica e dos exemplos numéricos simples, o trabalho procurou fornecer contribuições sobre a consideração da interação solo-estrutura e mostrar a importância da consideração do solo nos projetos estruturais.

Alguns resultados obtidos nas modelagens comprovaram o que já era descrito na teoria, mesmo que não considerando o solo multifásico e heterogêneo, pois, o fato de prever a presença do solo faz com que os resultados sejam muito mais próximos da realidade construída.

Observou-se que existe uma relação linear entre os dois métodos, Mindlin e Winkler, e que na simulação também torna-se perceptível a suavização de recalques ao se considerar o modelo integrado solo-estrutura.

Em sapatas flexíveis, os deslocamentos centrais mostram-se mais acentuados quanto menores fossem as suas espessuras, indicando uma concentração de tensões que pode ocasionar o efeito de punção.

Pode-se constatar também que a distância entre eixos das sapatas é um fator importante na sobreposição dos bulbos de tensões, pois, com a distância aproximada de $4B$ a $5B$, notou-se que a sapata já não se inclina acentuadamente, efeito criado pela sobreposição quando as sapatas se encontram com distâncias menores entre elas. Esta inclinação pode criar efeitos indesejados nos pilares ligados a elas, com acréscimo de momentos fletores em relação a uma simulação em que os apoios seriam fixos (engastes), como usualmente é considerado.

O modelo de Mindlin proporciona uma análise mais apurada onde o maciço de solo é representado como meio contínuo via MEC. Este modelo requer um maior tempo de processamento em relação ao modelo de Winkler, entretanto o tempo adicional é irrelevante para aplicações práticas.

A ferramenta computacional mostrou-se eficaz e eficiente na análise dos problemas de interação solo-estrutura apresentados, além de relativa velocidade de processamento, para casos não muito complexos. Porém, a mesma exige a integração entre projetistas de fundações e estruturas, já que são necessários dados do solo, dimensionamento das fundações, métodos de previsão de recalques e de capacidade de carga. Mesmo utilizado principalmente em aplicações acadêmicas, o uso do modelo de Mindlin em conjunto com o MEC representa uma ferramenta útil e podem ser bem desenvolvidos e com relativa facilidade na incorporação em softwares profissionais, não devendo ser um impeditivo em seu uso nos problemas de interação solo-estrutura.

AGRADECIMENTO

Os autores agradecem a Fapesp pelo suporte recebido para o Projeto de Pesquisa no. 2012/22339-7

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almeida, V. S. *Análise da interação solo não-homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF*. Tese de doutorado - EESC, USP, 210p, 2003.

Antoniazzi, J. P. *Interação solo-estrutura de edifícios com fundações superficiais*. Dissertação de mestrado, UFSM, 139p, 2011.

Aquino, R. D. *Análise não-linear geométrica de edifícios 3D considerando a deformabilidade do solo*. Dissertação de mestrado, UFOP, 158p, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6122/2010 – Projeto e Execução de Fundações*. ABNT/CB-02 – Comitê Brasileiro da Construção Civil, CE-02:152.08 – Comissão de Estudo de Obras Geotécnicas e de Fundações, Rio de Janeiro, 91p, 2010.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6489/1984 – Prova de Carga Direta sobre Terreno de Fundação*. ABNT/CB-02 – Comitê Brasileiro da Construção Civil, CE-02:004.08 – Comissão de Estudo de Projeto e Execução de Fundações, Rio de Janeiro, 2p, 1984.

Barbirato, J.C.C.; Venturini, W. S. Método dos elementos de contorno com a reciprocidade dual para a análise transiente tridimensional da mecânica do fraturamento. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, v. 7, n. 24, p. 65-90, 2005.

Calderón, E. T. *Sobre o uso do método dos elementos de contorno - MEC para o estudo de interação de placas com o meio contínuo*. Tese de doutorado - EESC, USP, 268p, 1996.

Chueiri, L. H. M. *Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica*. Tese de Doutorado - EESC, USP, 219p, 1994.

Cintra, J. C. A.; Aoki, N.; Albiero, J. H. *Tensão admissível em fundações diretas*. Ed. Rima, 134p, 2003.

Colares, G. M. *Programa para análise da interação solo-estrutura no projeto de edifícios*. Dissertação de Mestrado - EESC, USP, 83p, 2006.

Cutrim, M. D. S. *Análise linear estática e dinâmica de edifício considerando a interação solo e fundação rasa ou profunda*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil – PPGEC, USP, 102 p, 2020.

Holanda Jr., O. G. *Interação solo-estrutura para edifícios de concreto armado sobre fundações diretas*. Dissertação de Mestrado - EESC, USP, 196p, 1998.

Iwamoto, R. K. *Alguns aspectos dos efeitos da interação solo – estrutura em edifícios de múltiplos andares com fundação profunda*. São Carlos. Dissertação de Mestrado - EESC, USP, 2000.

Lopes, F.R.; Gusmão, A.D. On the influence of soil-structure interaction in the distribution of foundation loads and settlements. *Proceedings*, 10th. European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Firenze, vol. 2, 505-9p, 1991.

Pinto, C. S. *Curso básico de mecânica dos solos*. 3ª ed. Editora Oficina de Textos, São Paulo, 355p, 2006.

Ribeiro, D. B. *Análise da Interação Solo-Estrutura via Acoplamento MEC-MEF*. Dissertação de Mestrado - EESC, USP, 121p, 2005.

Rodrigues, R. A. *Notas de Aula de Fundações*. Faculdade de Engenharia de Bauru, UNESP, 2012.