

OTIMIZAÇÃO DE ROTEIROS PARA O SETOR DE VIGILÂNCIA DA UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO

OPTIMIZATION OF ROUTES FOR THE SURVEILLANCE SECTOR AT UNIVERSITY OF PASSO FUNDO

Letícia Andreolla e Rosana Maria Luvezute Kripka

Instituto de Ciências Exatas e Geociências, Universidade de Passo Fundo - BR 285, Km 171
Passo Fundo/RS. E-mail: rkripka@upf.br

RESUMO

O presente trabalho apresenta o processo de modelagem matemática para a resolução do problema real de otimização de roteiros do setor de vigilância da Universidade de Passo Fundo, através de ferramentas matemáticas adequadas. Dessa forma, apresenta-se, por meio da revisão bibliográfica, a modelagem matemática para o problema do caixeiro-viajante, uma vez que o trabalho está direcionado para uma aplicação baseada nas noções desse tipo de problema. Também são apresentados os métodos utilizados para a resolução de modelos matemáticos com ferramentas computacionais. Finalmente, apresenta-se a modelagem do problema real, bem como o processo realizado para encontrar os roteiros otimizados para que vigilantes possam fazer o fechamento de um número determinado de prédios da UPF e suas implicações.

Palavras-chave: Modelagem matemática. Problema caixeiro-viajante. Otimização.

ABSTRACT

Abstract: The article presents the process of mathematical modeling to solve the real problem of optimizing the route surveillance department at the University of Passo Fundo, using appropriate mathematical tools. Thus, it is also present through literature review, the mathematical modeling for the Traveling Salesman Problem, once the work is directed to an application based on the notions of this kind of problem. Are also presented methods for solving mathematical models using computer tools. Finally, we present the modeling of the real problem, and the process undertaken to find optimized routes so they can do for closing a certain number of buildings in the UPF.

Keywords: Mathematical Modeling, Traveling Salesman Problem, Optimization.

1. INTRODUÇÃO

A matemática aplicada possui muita utilidade na atualidade, principalmente para a descrição e resolução de problemas reais ou abstratos. Porém, possui técnicas variadas de aplicações e resoluções.

No presente trabalho são abordados o processo de modelagem matemática para obtenção de problemas de otimização, ou seja, como se representam problemas reais em modelos matemáticos de otimização, para os quais se buscam valores extremos de funções restritas, e as técnicas de otimização adequadas para resolvê-los.

Atualmente, na Universidade de Passo Fundo (UPF), o setor de Vigilância é responsável pelo fechamento diário de todos os prédios do Campus I ao término das aulas. Nesse contexto, a proposta do presente trabalho consiste em apresentar uma modelagem matemática de otimização para o problema de roteamento dos vigilantes que trabalham na Universidade de Passo Fundo, que necessitam fechar todos os prédios percorrendo uma distância mínima; assim, não haverá a execução de deslocamentos desnecessários e, conseqüentemente, um melhor aproveitamento do tempo. Para tanto, realizou-se uma revisão bibliográfica com o objetivo de aprimorar conhecimentos sobre conceitos e técnicas de otimização que possibilitassem a modelagem matemática do problema do

caixeiro viajante, sua otimização através de técnicas matemáticas adequadas e sua posterior aplicação ao problema real de otimização de roteiros para o setor de Vigilância da UPF.

Também foi realizada uma pesquisa de campo para coleta de dados, o que possibilitou a construção do modelo matemático correspondente ao problema prático em questão, o qual foi resolvido por métodos matemáticos adequados, com o uso de aplicativos, obtendo-se a solução ótima para o problema real analisado, como apresentado a seguir.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Um dos maiores desejos do ser humano é o entendimento dos fenômenos que ocorrem ao seu redor e que influenciam tanto direta quanto indiretamente na evolução da humanidade. Com o passar dos tempos, o mundo foi sendo modificado e, com isso, os conhecimentos também precisaram ser transformados e adaptados. À medida que a complexidade tornava-se mais visível, os processos utilizados na tentativa de compreender o mundo tiveram que evoluir também.

No entanto, apesar de esse processo não ser simples, o homem tem se mostrado cada vez mais hábil em criar formas de representar e solucionar a sua relação com o mundo. Nessa busca incessante por respostas, explicações ou porquês dos respectivos acontecimentos, surge a contribuição da modelagem matemática, embora muitas pessoas não tenham a percepção de como esta ciência está presente de forma intensa e integral no cotidiano de cada indivíduo, no meio ambiente e no universo em geral.

Como a compreensão do mundo possui um alto grau de complexidade, tornou-se necessário recorrer às metáforas, uma vez que usar comparações faz brotar o dom do entendimento de maneira mais perceptível e frequente. Esse processo constitui um fenômeno de modelagem. Para Bean, “a essência da modelagem matemática consiste em um processo no qual as características pertinentes de um objeto ou sistema são extraídas, com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras, representadas em termos matemáticos (o modelo).” (2001, p. 53).

As situações-problema encontradas em diversos setores, como indústria, saúde e meio ambiente, exigem que sejam criados, ou no mínimo modificados, modelos matemáticos com a finalidade de descrever, entender e resolver os problemas enfrentados. De forma simplificada, a modelagem constitui uma transformação de problemas reais em problemas matemáticos, não apenas em áreas exatas como a física, a química e a biologia, mas também nas ciências humanas. Para Goldbarg e Luna (2005, p.1), “um modelo é um vínculo para uma visão bem estruturada da realidade”.

Entretanto, o mais impressionante é saber que todos já usaram modelos, mesmo sem possuir consciência disso. A modelagem muitas vezes ocorre de forma tão espontânea e simples em atividades práticas que se torna algo básico de uma explicação ou representação, como, por exemplo, desde a utilização de mapas, fotografias, desenhos, gráficos até as equações matemáticas. Isso ocorre porque a mente do homem trabalha automaticamente com comparações, num processo de substituição de estruturas que facilitam seu raciocínio.

Assim, a modelagem matemática é um método científico de pesquisa que usa símbolos e modelos matemáticos de representação de problemas reais para que, por meio de técnicas específicas, possam ser resolvidos, obtendo-se resultados suficientemente próximos da realidade em questão. O processo de tradução de um fenômeno ou problema de uma situação real em um conjunto de símbolos e relações matemáticas denomina-se “modelo matemático”, que pode ser formulado utilizando-se expressões numéricas, fórmulas, diagramas, equações algébricas, tabelas, etc.

A palavra “modelo” possui vários significados, porém neste trabalho será utilizada a definição de Goldbarg e Luna: “os modelos são representações simplificadas da realidade que preservam, para determinadas situações e enfoques, uma equivalência adequada”. (2005, p. 2).

Um modelo matemático possui grande utilidade quando baseado em noções já desenvolvidas e, através de uma elaboração cuidadosa, é possível fazer uma comparação das hipóteses esperadas com as hipóteses observadas. Uma das vantagens de se utilizar um modelo é que pode ser modificado, aprimorado ou substituído por outros sempre que houver necessidade de transformações, visando a uma descrição de maneira mais correta do fenômeno que está sendo estudado. Muitas vezes é necessário desconsiderar algumas informações que não tragam acréscimos à descrição do modelo, mas que, ao mesmo tempo, não desequilibrem a validade do mesmo.

Neste trabalho o enfoque da aplicação foi dado aos problemas de otimização combinatória, especialmente à modelagem matemática do problema do caixeiro-viajante.

3. PESQUISA OPERACIONAL

Para estruturar e solucionar os modelos, que podem ser expressos matematicamente, necessita-se de técnicas e, em alguns casos, de algoritmos.

Destaca-se aqui então a pesquisa operacional (PO), do inglês *operational research*, que reúne um importante conjunto de técnicas da modelagem matemática, onde os modelos são organizados de forma lógica e subsidiados por ferramentas matemáticas de representação, com os quais se objetiva determinar as melhores condições para o funcionamento dos modelos, podendo-se, assim, analisar sistemas complexos e tomar decisões.

Para Ehrlich (1985, p.11), “(...) é um conjunto de técnicas quantitativas com o intuito de auxiliar o processo de decisão dentro de uma filosofia de modelagem e, preferivelmente, de otimização”.

Um problema de otimização é constituído de uma função objetivo e um conjunto de restrições, ambos relacionados às variáveis de decisão. O problema pode ser de minimização ou de maximização da função objetivo. Otimizar o problema significa encontrar a solução ótima para o mesmo, obter os valores para as variáveis que correspondam ao menor (ou maior) valor possível para a função objetivo e, ainda, que não viole nenhuma restrição do problema.

Segundo Andrade, a pesquisa operacional teve origem na Segunda Guerra Mundial, “(...) quando equipes de pesquisadores procuraram desenvolver métodos para resolver determinados problemas de operações militares”. (1989, p.1). Contudo, no Brasil, a pesquisa operacional iniciou-se basicamente por volta da década de 1960. Após seu surgimento, muitas pessoas passaram a estudar a pesquisa operacional e a procurar novas técnicas para resoluções dos problemas desse novo campo, pois tem aplicação em diversas áreas, como finanças, agricultura, medicina, meio ambiente, entre outros.

Além de se caracterizar pelo uso de conhecimentos científicos por equipes interdisciplinares, objetivando uma melhor utilização dos recursos, a PO tem uma característica muito importante e que facilita o processo de análise de decisão: a utilização de modelos e suas resoluções, permitindo, assim, que a decisão possa ser avaliada e testada antes de ser implantada. De forma resumida, a PO consiste no desenvolvimento de métodos científicos de sistemas que sejam complexos, tendo como finalidade prever e comparar estratégias ou decisões alternativas (ARENALES, 2007, p.3).

Segundo Goldbarg e Luna (2005), existem muitas classificações possíveis para o problema de otimização, que podem ser caracterizadas quanto à relação entre as variáveis de decisão na função objetivo e nas restrições, quanto ao valor que podem assumir as variáveis e quanto à natureza da função objetivo. Para cada tipo de problema de otimização existem métodos de resolução específicos

que buscam as soluções otimizadas. Porém, encontrar soluções ótimas, ou mesmo aproximadas, para esses tipos de problemas é um desafio nem sempre fácil de ser realizado.

Portanto, com objetivo de programar atividades de sistemas complexos diversos foram desenvolvidas as técnicas de programação matemática.

Assim, a programação matemática consiste no conjunto das diversas técnicas para resolução dos principais modelos de pesquisa operacional.

Embora muitas vezes se relacione a palavra “programação” com processos de comandos computacionais, no presente trabalho utilizar-se-á o sentido de planejamento de atividades. Contudo, para resolução dos modelos será necessário o auxílio da programação computacional, pelo fato de o modelo possuir diversas variáveis e restrições.

Conforme Goldbarg e Luna (2005, p.11), as técnicas da programação matemática têm grande utilidade na solução de problemas de otimização. A variação que se encontra nas técnicas de resolução é bem maior do que no processo de modelagem, em virtude de que os métodos de resolução sofreram especializações e particularizações e acabaram agrupados em várias subáreas, tais como:

- *Programação linear* – onde as variáveis são contínuas e têm comportamento linear, tanto em relação às restrições como quanto à função objetivo;
- *Programação não-linear* – quando na função objetivo ou em qualquer uma das restrições do modelo existir não-linearidade;
- *Programação inteira* – quando as variáveis não podem assumir valores contínuos, somente valores discretos, implicando, assim, uma maior complexidade computacional.

Essas são apenas algumas das subáreas, mas existem outras, porém não citadas neste trabalho.

Assim, a partir do modelo matemático adaptado a cada caso particular, pode-se buscar a sua resolução otimizada por meio de técnicas de programação matemática adequadas.

Baseado nessas noções e concepções, neste trabalho se apresenta a modelagem de um problema real de otimização combinatória, o qual foi resolvido utilizando-se técnicas de otimização adequadas, através de recursos auxiliares computacionais, esses programas específicos de resolução de problemas de programação linear inteira, com número significativo de variáveis.

4. PROBLEMA DO CAIXEIRO-VIAJANTE

O problema do caixeiro-viajante – PVC (no inglês *traveling salesman problem* ou TSP) foi o primeiro problema de roteirização a ser estudado e dentro da programação matemática é um dos problemas mais tradicionais e conhecidos. Nos tempos modernos, a primeira vez que se mencionou sobre esse problema foi por Hassler Whitney, em 1934, em um trabalho na Princeton University. (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Em 1954, foi publicado por Dantzig, Fulkerson e Johnson um artigo que propôs uma “Solução de larga escala do problema do caixeiro-viajante” no jornal da Sociedade de Pesquisa Operacional da América. Nele foi proposta uma solução para o PCV, sendo esse um evento importante na história da otimização combinatória. (SOUZA, 1997).

4.1. Conceitos básicos

O objetivo do PVC é encontrar em um grafo $G = (V, A)$ o circuito hamiltoniano de menor custo.

Um grafo, numa definição bem simples, é um conjunto de vértices e arestas. Os vértices (ou nós) são pontos que podem representar cidades, depósitos, postos de trabalho ou atendimento. Por sua vez, as arestas são linhas que conectam os vértices, podendo representar ruas ou estradas, por exemplo.

Um circuito hamiltoniano é um passeio que percorre todos os vértices de um grafo e retorna ao vértice origem (início do passeio), passando por cada vértice apenas uma vez. Tal passeio recebe esse nome devido a Willian Rowan Hamilton, que em 1857 propôs um jogo ao qual denominou *Around the World*. O jogo foi elaborado sobre um dodecaedro e cada um dos vértices do jogo estaria relacionado a uma cidade importante da época. O objetivo era encontrar uma rota, através dos vértices do dodecaedro, que iniciasse e terminasse em uma mesma cidade, sem nunca repetir uma visita.

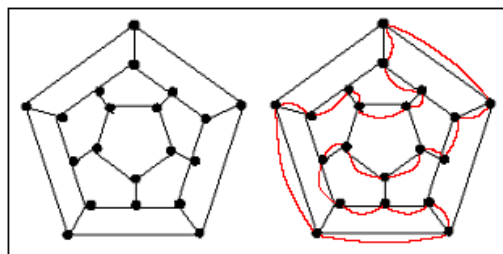


Figura 1 –Solução para o jogo *Around the World* (SISCORP, 2007).

Uma das soluções está apresentada na Figura 1. O jogador visita (entra e sai) todas as cidades e retorna ao vértice inicial. Como já foi citado, Hamilton não foi o primeiro a propor esse problema, mas o seu jogo ajudou a divulgá-lo.

O problema do caixeiro-viajante é importante em razão de, pelo menos, três características, conforme apresentam Goldbarg e Luna (2005): grande aplicação prática, grande relação com outros modelos e grande dificuldade de solução exata. Em suas diversas versões, o PCV está presente em inúmeros problemas práticos, como programação de operações de máquinas em manufatura, programação de transporte entre células de manufatura, otimização do movimento de ferramentas de corte, otimização de perfurações de furos em placas de circuitos impressos, problemas de roteamento de veículos, problemas de equenciamento de DNA, problemas de programação e distribuição de tarefas em plantas, trabalhos administrativos, etc.

O PCV pertence à classe de problemas considerados difíceis. A busca de uma solução ótima pode “custar caro”, pois, à medida que aumentamos o número de vértices, o tempo para a resolução do problema aumenta de forma significativa, tornando às vezes a resolução inviável para os computadores atuais. Em problemas difíceis são utilizadas algumas técnicas para tentar resolver o problema em tempo hábil.

Uma técnica pode ser fazer uma aproximação através de algoritmos que, dentro de uma determinada porcentagem da solução ótima, garantem uma solução correta. Analisando o pior caso e o melhor caso que o algoritmo pode produzir, é possível avaliar sua complexidade e a proximidade das suas soluções em relação àquela que é ótima. Assim, com o uso de algoritmos de aproximação torna-se possível encontrar soluções de boa qualidade para problemas difíceis em tempo computacional aceitável.

Portanto, em resumo, o problema do caixeiro-viajante consiste, basicamente, em encontrar o roteiro ou sequência de cidades a serem visitadas por um caixeiro-viajante que minimize a distância total percorrida e assegure que cada cidade seja visitada exatamente uma vez. O problema pode ser simétrico (grafo não orientado), ou seja, não depende da direção ou sentido das arestas, ou assimétrico (grafo orientado), que considera o sentido das arestas.

Na literatura existem várias formulações matemáticas para este problema apresentadas por Goldbarg (2005), sendo a escolhida e utilizada neste trabalho a formulação de Dantzig-Fulkerson-Johnson (DFJ).

4.2. Formulação de Dantzig-Fulkerson-Johnson

Em 1954, Dantzig-Fulkerson-Johnson, para resolver um problema com 49 cidades, formularam o PCV como um problema de programação 0-1 sobre um grafo $G = (N, A)$. Como as condições do problema exigem, essa formulação possui restrições tanto de controle de fluxo nos nós, como de eliminação de possíveis sub-rotas.

Segundo Goldberg (2005, p. 332), a forma geral da formulação matemática de Dantzig-Fulkerson-Johnson é dada por:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \quad (2)$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subset N \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in N \quad (4)$$

onde:

- $x_{ij} = 1$, se o arco $(i, j) \in A$ for escolhido para integrar a solução;
- $x_{ij} = 0$, caso contrário;
- S é um subgrafo de G ;
- $|S|$: número de vértices do subgrafo S .

Nessa formulação assume-se que:

- x_{ii} não existe, pois é sem acepção sair do nó e retornar para ele mesmo;
- $n(n-1)$ é o número de variáveis;
- as variáveis são inteiras e binárias;
- o problema possui número de restrições na ordem (2^n) .

O conjunto de restrições indicados por (1) determina os fluxos de chegada dos nós; o conjunto de restrições indicados por (2) determina os fluxos de saída dos nós; o conjunto de restrições indicados por (3) evita os ciclos desconexos entre os nós, ou seja, evita os circuitos pré-hamiltonianos; o conjunto de restrições indicados por (4) determina que as variáveis sejam binárias, ou seja, podem assumir apenas os valores 0 ou 1.

Dessa forma, pelo fato de a solução ser uma combinação entre os caminhos possíveis, o problema do caixeiro-viajante possui natureza combinatória, implicando, assim, a respectiva formulação do problema.

O problema do caixeiro-viajante é um clássico exemplo de problema de otimização combinatória. A primeira sugestão para a resolução desse tipo de problema é achar todas as rotas possíveis e calcular o comprimento de cada uma para, após, escolher o menor. Diz-se que o problema de otimização está sendo reduzido a um de enumeração no momento em que se acham todas as rotas e contam-se as mesmas.

Fazendo um raciocínio combinatório, encontra-se o número de rotas para o caso de n cidades. Por exemplo, no caso de $n = 4$ cidades, têm-se a primeira e a última posição fixas, restando três opções para a segunda posição, duas para a terceira e uma para a quarta. Consequentemente, o número de rotas é $3 \times 2 \times 1 = 6$, resultado obtido também, no exemplo, ao realizar a contagem diretamente sobre as rotas nas figuras dos caminhos.

Dessa forma, para o caso de n cidades, como a primeira é fixa, o número total de escolhas que se podem fazer é $(n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$. Usando a notação de fatorial predefinida tem-se: $(n-1)!$ caminhos possíveis.

Cabe ressaltar que para um problema simétrico a quantidade de caminhos possíveis é dada por $\frac{(n-1)!}{2}$, sendo os caminhos de ida e volta com o mesmo valor.

Assim, pode-se gerar cada rota, calcular o comprimento total das viagens de cada uma e ver qual delas tem o menor comprimento total. Porém, essa não é uma tarefa tão simples quanto parece ser, mesmo usando os melhores computadores, com capacidades relativamente significantes.

O problema é que a quantidade $(n-1)!$ cresce rapidamente à medida que o n cresce, e o computador torna-se incapaz de executar o que lhe foi solicitado para problemas de grande porte. Isso significa dizer que o problema do caixeiro-viajante pertence à classe conhecida como NP – difícil (do inglês, *np hard- Non-Deterministic Polynomial time* - tempo polinomial não determinístico), o que significa que possui ordem de complexidade não polinomial.

Pelo fato de existirem muitos problemas importantes nesta classe, existe um esforço intensivo para encontrar algoritmos para resolver problema NP em um tempo que seja polinomial em relação ao tamanho da entrada. Contudo, existe um grande número de problemas NP que resistem a tais tentativas. Em outras palavras, isso significa dizer que não é possível resolver os problemas pertencentes a essa classe até sua resolução ótima, por meio de métodos determinísticos (ou exatos) clássicos de otimização, e atualmente têm sido utilizados métodos heurísticos nas respectivas resoluções.

5. TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO

Existem métodos exatos e heurísticos para a resolução de problemas de otimização combinatória, porém os métodos exatos se tornam limitados computacionalmente, ou seja, são aplicáveis apenas para problemas pequenos e com poucas restrições e variáveis. Para solucionar o PCV, os algoritmos exatos existentes tornam-se inviáveis quando se tem um grande número de cidades a serem visitadas, pois isso implica um número elevado de roteiros a serem analisados.

Como os métodos exatos só são possíveis para problemas relativamente pequenos, geralmente, no processo de otimização combinatória utilizam-se os métodos heurísticos, pois, além de fornecerem boas soluções, são bem mais rápidos.

As soluções otimizadas dos métodos heurísticos são obtidas por meio de análises de soluções geradas aleatoriamente, que podem ou não estar dentro da região factível (que satisfazem as restrições do problema) e que podem convergir para a solução ótima. E para verificar a eficiência relativa do método pode-se comparar o resultado obtido com outro resultado do problema utilizando algum outro método heurístico.

Conforme Souza (1997), existem três grandes classes de procedimentos para resolver o PCV, as quais são:

- procedimentos de construção de rotas, que constroem rotas ótimas ou quase ótimas considerando a matriz de distâncias (custos);
- procedimentos de melhorias de rotas, que efetuam melhorias em rotas já existentes;

- procedimentos de composição de algoritmos, que constroem uma rota inicial com o auxílio de um dos procedimentos de construção de rotas e utilizam a melhoria para obter um resultado mais eficiente, evitando cruzamento entre rotas e outros problemas. Este é relativamente rápido computacionalmente e fornece excelentes resultados.

Além disso, encontram-se diversas aplicações de métodos heurísticos para resolução do PCV, entre os quais podemos citar:

- *Otimização por enxame de partículas*: baseia-se na seguinte ideia: em um enxame de insetos, quando um encontra um caminho a seguir para buscar comida, por exemplo, em pouco tempo os demais o seguirão. Porém, para que a exploração do espaço seja facilitada, cada partícula deve ter certo nível de aleatoriedade em seu movimento; assim, cada uma das partículas é influenciada pelo enxame, mas também pode explorar uma região, porém com extensão restrita (BREVE, 2007).
- *Otimização por colônia de formigas*: inspira-se no comportamento das formigas na busca por alimentos e resolve problemas computacionais por meio de técnicas probabilísticas, podendo ser encontrados bons caminhos em grafos. Segundo Breve (2007), as formigas, inicialmente, não andam em sentido fixo, mas, quando encontram alimento, ao retornar para a colônia, deixam trilhas de feromônio. Assim, quando outras formigas encontrarem esse mesmo caminho, tendem a segui-lo, deixando de andar aleatoriamente, e novamente, se encontrarem alimento, reforçarão a trilha. Mas essas trilhas tendem a evaporar com o passar do tempo, reduzindo sua força de atração de outras formigas. Quanto mais tempo a formiga levar para fazer o percurso de ida e volta do caminho, mais feromônios irão evaporar. Portanto, o ideal é um caminho mais curto, onde os feromônios permanecerão por mais tempo, atraindo assim mais formigas para seguir esse caminho e buscar alimentos. O algoritmo baseia-se nesse comportamento e faz uma simulação de formigas andando pelos grafos de certo problema. A resolução do PCV dessa forma é bastante utilizada. (BREVE, 2007).
- *Algoritmos genéticos*: foram inventados com o objetivo de imitar o processo de evolução da natureza. Essa evolução se dá por meio dos cromossomos e através de um processo de seleção natural os cromossomos que apresentam uma estrutura que melhor se adapta ao meio ambiente se reproduzem com maior frequência, pois a reprodução é o ponto no qual a evolução se processa. Combinando-se materiais genéticos, obtêm-se novos cromossomos. Uma das vantagens de um algoritmo genético é a simplificação que permite na formulação e solução de problemas de otimização. É um procedimento iterativo que mantém uma população de estruturas que representam possíveis soluções de um problema, sendo utilizado principalmente para os problemas NP – difíceis, resolvendo-os num tempo plausível. Mesmo não sendo um método exato, normalmente converge para o ótimo. Inicialmente, um conjunto de cromossomos é selecionado formando uma população; a partir disso, são feitas buscas por boas soluções na população, avaliando o ajuste de cada cromossomo. Em seguida, são selecionados os cromossomos pais e aplicam-se operações de cruzamento sobre eles e de mutação sobre os filhos gerados, formando-se, assim, uma nova população e repetindo esse processo até que algum critério estabelecido seja alcançado (RODRIGUES, 2000).
- *Simulated Annealing*: é um método para encontrar soluções ótimas para problemas complexos de otimização. Tem sua origem na mecânica estatística, analisando o comportamento dos átomos em relação à variação da temperatura. Resumindo, *annealing* (recozimento) é o

processo de aquecimento de um sólido até seu ponto de fusão, seguido de um resfriamento de forma gradual e lenta, até que se alcance novamente seu enrijecimento.

O algoritmo *Simulated Annealing*, oferece uma forma de escapar do ótimo local analisando a vizinhança da solução corrente e aceitando a solução que traga melhora mas, aceitando também solução que piore a solução corrente com uma probabilidade que é menor quanto maior for a distância entre essa solução e a solução corrente. A condição para aceitar ou rejeitar um movimento que aumente a função de custo (ou seja solução pior) é determinado por uma sequência de números randômicos, mas com uma probabilidade controlada. (...) O algoritmo então procede tentando um certo número de movimento na vizinhança em cada temperatura, enquanto o parâmetro temperatura é gradualmente reduzido. (ARAUJO, 2001)

6. RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS ATRAVÉS DO SOLVER DO EXCEL

Atualmente, existem muitos programas computacionais de fácil acesso e interpretação, que resolvem problemas de natureza combinatória. Dentre esses foi escolhido Solver do Excel para resolvermos o problema do caixeiro-viajante aplicado ao setor de Vigilância da UPF, por ser uma ferramenta simples e prática de ser utilizada na resolução deste tipo de problema.

A resolução por meio do Excel baseia-se na construção de matrizes que representam variáveis e custos e trabalha com a interpretação dos resultados, acrescentando restrições que indicam os ciclos hamiltonianos, conforme a necessidade (LACHTERMACHER, 2007).

Inicialmente, os dados são colocados em forma de matriz, sendo uma para as distâncias (custos) e outra para as variáveis.

A função objetivo deve ser representada por uma célula que contenha uma fórmula envolvendo a matriz dos custos das variáveis e a matriz das variáveis. Além disso, devem ser inseridas em células fórmulas indicando as restrições quanto ao fluxo de entrada e saída nos nós, sendo que para todos a soma deve ser igual a 1.

Na barra de ferramentas do Excel encontra-se o Solver. Para sua utilização é preciso selecionar a célula da função objetivo, o tipo de problema (no caso, minimização), a célula das variáveis e as restrições. Também é possível selecionar opções que o Solver fornece para uma melhor resolução do problema. Com essas informações, basta solicitar que o Solver resolva o problema para se obterem os resultados, o qual fornece uma resposta detalhada do ótimo encontrado.

Caso sejam encontrados subciclos na solução otimizada, são inseridos como novas restrições e a otimização é novamente efetuada, até que a solução ótima não contenha subciclos, o que garante a solução ótima para o problema.

A resolução do PCV pelo Excel torna-se mais fácil, pelo fato de não existir a necessidade de serem inseridas inicialmente todas as restrições existentes do problema para se evitarem possíveis subciclos. Durante o processo de otimização, as restrições são inseridas apenas quando identificadas nas otimizações intermediárias realizadas. No caso de um problema com um número grande de variáveis, o número de restrições desta natureza também é, naturalmente, muito grande, e a resolução por meio do Solver do Excel torna-se mais viável.

7. PROBLEMA VIGILÂNCIA DA UPF

Na UPF, ao término das atividades de cada turno, os funcionários do setor de Vigilância têm como função fechar todos os prédios da universidade e retornar ao seu posto de vigilância. Qual seria o melhor caminho pelo qual um funcionário poderia percorrer esse trajeto obtendo uma distância mínima?

Segundo entrevista, com aplicação de questionário, feita ao encarregado de Segurança Patrimonial da UPF, os vigilantes são subdivididos por regiões, pois dessa forma numa região menor é possível ter um melhor controle de segurança (Figura 2). Essas regiões são chamadas de “postos”, totalizando nove postos no Campus I na universidade. O responsável por acionar os alarmes de cada prédio é o vigilante líder ou seu substituto, pois apenas eles possuem as senhas dos alarmes. Os vigilantes não ficam sempre fixos no mesmo posto, sendo distribuídos conforme escala feita pelo setor de Segurança Patrimonial.

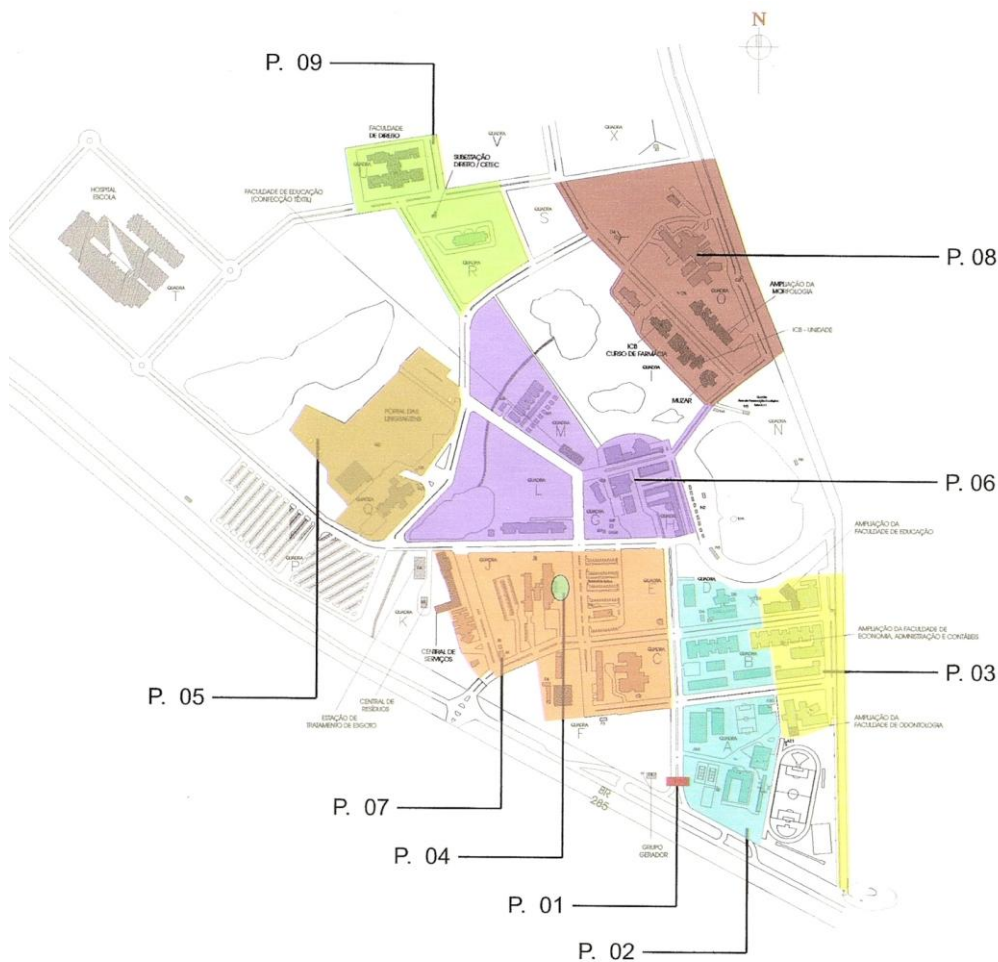


Figura 2: Divisão em setores da UPF

Fonte: Setor de Vigilância da UPF

Conforme a Tabela 1, cada posto tem uma quantia de prédios, ambientes ou portões principais, os quais serão chamados de nós.

Pelo fato de não terem um caminho predeterminado para realizar o fechamento dos prédios, a solução mais lógica (ou conforme a necessidade) é aplicada.

Para obter as distâncias entre os prédios, foram realizados os seguintes procedimentos:

- primeiramente, foram recebidos dois mapas, um a planta baixa e contendo todos os prédios da UPF com seus respectivos nomes e o outro os prédios separados pelos postos;
- em seguida, foram visitados todos os prédios para identificar no mapa suas entradas principais e poder, assim, obter uma distância mais aproximada da distância real;

- finalmente, para os números aproximados das distâncias, foi utilizado um recurso computacional via satélite, o Google Earth (2007). Nesse programa é possível ver localidades, bem como suas ruas, cruzamentos, prédios, etc.; também é possível calcular distâncias entre pontos definidos, as quais são fornecidas em centímetros, metros, quilômetros, polegadas, pés, jardas, milhas, entre outras unidades.

Tabela 1 – Postos de vigilância e número de nós.

POSTO	QUANTIDADE DE NÓS
P. 01	1
P. 02	14
P. 03	7
P. 04	1
P. 05	2
P. 06	8
P. 07	6
P. 08	4
P. 09	2

Fonte: Pesquisa realizada junto ao setor de Vigilância da UPF

Assim, selecionando o destino, o programa fornece a imagem do local e, a partir disso, pode-se escolher um trajeto e verificar a distância do caminho marcado. Com as distâncias definidas pode-se montar a matriz dos custos das variáveis e resolver o problema.

Como exemplo apresenta-se a resolução do posto com maior número de nós do Campus I – Passo Fundo, que no caso corresponde ao posto P.02, que possui 14 nós. Porém, apenas 12 nós são fechados pelos vigilantes, pois nesse posto estão incluídos o Restaurante Universitário e o Diretório Central de Estudantes, que são abertos e fechados pelos responsáveis, não pelos vigilantes.

Os prédios da UPF estão nomeados por siglas, compostas de letras e números, também utilizadas no trabalho.

As distâncias entre os prédios do P. 02 foram encontradas pelo Google Earth e, a partir delas, construíram-se as matrizes no Excel. Em seguida informaram-se todas as restrições iniciais necessárias, sendo elas:

- As variáveis serão binárias.
- O fluxo de chegada em cada nó deve ser igual a 1.
- O fluxo de saída de cada nó deve ser igual a 1.
- $x_{ii} = 0$, para evitar sair do nó e retornar para ele mesmo.
- Ciclo formado por dois nós apenas deverá ser menor ou igual a 1.

Além disso, foi necessário identificar no Solver que se trata de um modelo linear e que é um problema de minimização.

Como solução inicial, foi escolhido e utilizado o seguinte caminho lógico para fechamento do P. 02:

A12 → A1 → A2 → A4 → A3 → A6 → B3 → B2 → B1 → B5 → D2 → D6 → A12,

o qual possui distância total a ser percorrida de 1.286, 41 m.

À medida que o Solver ia resolvendo o problema, soluções com subciclos iam aparecendo; por isso, tornou-se necessário interpretar as soluções que continham ciclos hamiltonianos e acrescentá-los nas restrições, pois não estavam satisfazendo o objetivo principal do problema. Ao todo foram inseridas mais 30 restrições até encontrar a solução ótima desse problema.

Nas Figuras 3,4, 5 e 6 apresentam-se a estrutura do problema e a solução ótima obtida.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		Para	A12	A1	A2	A3	A4	A6	B2	B3	B1	B5	D2	D6
2	De	A12	0	40,49	36,2	106,16	131,95	206,49	180,1	206,21	316,44	376,08	398,37	466,39
3		A1	40,49	0	39,64	129,08	140,31	231,75	209,09	230,18	343,9	409,75	434,79	484,46
4		A2	36,2	39,64	0	97,57	105,16	185,37	174,45	182,78	283,16	358,28	384,4	435,8
5		A3	106,16	129,08	97,57	0	5,5	145,62	57,54	137,18	111,88	190,57	218,95	267
6		A4	131,95	140,31	105,16	5,5	0	82	41,34	75,38	151,79	220,52	246,67	296,59
7		A6	206,49	231,75	185,37	145,62	82	0	112,3	48,93	223,54	297,56	327,07	369,62
8		B2	180,1	209,09	174,45	57,54	41,34	112,3	0	96,91	112,87	191,46	218,92	268,29
9		B3	206,21	230,18	182,78	137,18	75,38	48,93	96,91	0	210,02	285,69	313,68	361,61
10		B1	316,44	343,9	283,16	111,88	151,79	223,54	112,87	210,02	0	141,56	172,38	218,53
11		B5	376,08	409,75	358,28	190,57	220,52	297,56	191,46	285,69	141,56	0	37,84	76,08
12		D2	398,37	434,79	384,4	218,95	246,67	327,07	218,92	313,68	172,38	37,84	0	45,5
13		D6	466,39	484,46	435,8	267	296,59	369,62	268,29	361,61	218,53	76,08	45,5	0

Figura 3 – Distâncias entre os nós

16		Para	A12	A1	A2	A3	A4	A6	B2	B3	B1	B5	D2	D6	
17	De	A12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
18		A1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
19		A2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
20		A3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
21		A4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
22		A6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
23		B2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
24		B3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
25		B1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
26		B5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
27		D2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
28		D6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
29			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Figura 4 – Variáveis contendo a solução ótima do problema e fluxos de chegada e saída totalizando valor 1 para cada nó.

O42			=SOMARPRODUTO(C2:N13;C17:N28)												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
30															
31			1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1		
32			0	0	1	0	0	1	0	0	0	1			
33			1	0	0	0	0	0	0	0	0				
34			0	0	0	0	0	0	1	0					
35			0	0	0	1	0	0	0						
36			0	0	0	0	0	0							
37			0	0	0	0	0								
38			0	0	0	0									
39			0	0	0										
40			0	0											
41			0												
42															1113,23

Figura 5 – Restrições evitando ciclos com dois nós e célula da Função Objetivo.

=E17+D19+C18				
C	D	E	F	G
	RESTRIÇÕES ADICIONAIS			2
				4
				2
				0
				0
				0
				0
				0
				3
				3
				3
				0
				0
				0
				1
				4
				2
				1
				0
				0
				5
				1
				0
				0
				4
				4
				2
				2
				3
				0

Figura 6 – Restrições adicionais necessárias para encontrar a solução ótima.

O resultado apresentado pelo Solver pode ter a seguinte forma de interpretação do resultado:

A12 → A3 → B1 → B5 → D6 → D2 → B2 → B3 → A6 → A4 → A2 → A1 → A12

A Figura 7 mostra o caminho ótimo baseado nas informações do Solver, apresentado na imagem do Google Earth (2007). Esse caminho possui distância total de 1.113, 23 m, ou seja, esse é o caminho mais curto para percorrer todos os prédios do P.02.



Figura 7 – Caminho ótimo para o problema do P. 02 (GOOGLE EARTH, 2007).

Comparando a distância total a ser percorrida do resultado otimizado com a distância da solução inicial utilizada, obteve-se uma redução de 173, 18 m, o que equivale a uma redução de 13,46% da distância total percorrida. Essa variação em um problema mais complexo tende a aumentar, ou seja, quanto maior for o número de nós, maior poderá ser a redução da distância percorrida ao se obter o caminho otimizado para o problema.

Essa redução comprova que o Solver encontrou um caminho melhor que aquele que parecia mais lógico a percorrer.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática está presente de forma intensa no ambiente em que se vive, apesar do fato de muitas pessoas muitas vezes não identificarem situações que poderiam ser analisadas quantitativamente por meio da resolução de modelos matemáticos.

Todo o processo de modelagem de um problema real, bem como sua resolução, contribui com aspectos positivos, uma vez que a resolução quantitativa de um problema geralmente possibilita melhorias dos processos analisados. Além disso, atualmente, com o auxílio de ferramentas computacionais, o processo torna-se mais rápido e fácil de ser executado.

A realização deste trabalho permitiu não somente encontrar uma redução real no percurso a ser realizado nos roteiros realizados pelo setor de vigilância, mas aprimorar conhecimentos, aproximando teoria e prática.

Especificamente no problema apresentado, a distância total a ser percorrida utilizando o caminho lógico para fechamento do P. 02 seria 1.286, 41 m. Após a otimização obteve-se que o caminho mais curto para percorrer todos os prédios do P.02, com distância mínima total de 1.113, 23 m, ou seja, obteve-se uma redução de 173, 18 m, o que equivale a uma redução de 13,46% da distância total percorrida. Essa redução comprova que o Solver encontrou um caminho melhor que aquele que parecia mais lógico a percorrer.

Assim, por meio do modelo matemático do problema do caixeiro-viajante foi possível construir um modelo matemático de otimização para o problema de roteiros dos vigilantes da UPF. Além disso, percebe-se que a redução percentual encontrada, ao se comparar o caminho ótimo com o caminho inicial do problema da vigilância, tende a aumentar à medida que se aumenta a extensão do problema, pois para problemas maiores a redução na distância dos caminhos torna-se cada vez mais significativa.

A otimização de um problema real como esse é de grande importância, pois acarreta uma aplicabilidade real de sua resolução, evitando percorrer algumas distâncias desnecessárias e, conseqüentemente, otimizando também o tempo de realização do percurso.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDRADE, Eduardo Leopoldino de. *Introdução à pesquisa operacional: métodos e modelos para a análise de decisão*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1989.
- ARAUJO, Aroldo Alexandre de. *Algoritmo simulated annealing: uma nova abordagem*. 2001. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.
- ARENALES, Marcos et al. *Pesquisa operacional: para cursos de engenharia*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- BEAN, Dale. O que é modelagem matemática? *Educação Matemática em Revista*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática do RS, n. 9, p. 49-57, 2001.
- BREVE, Fabrício Aparecido. *Otimização por enxame de partículas (PSO) e otimização por colônias de formigas (ASO) aplicadas ao problema do caixeiro viajante (TSP)*. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <<http://skooter.no-ip.org:8081/fabricio/trabalhos/compbio3.php>>. Acesso em: 29 ago. 2007.
- EHRLICH, Pierre Jacques. *Pesquisa operacional: curso introdutório*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1985.
- GOLDBARG, Marco César; LUNA, Henrique Pacca L. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2005.
- GOOGLE Earth. Disponível em: <<http://earth.google.com/>>. Acesso em: 25 out. 2007.
- LACHTERMACHER, G. *Pesquisa operacional na tomada de decisões: modelagem em Excel*. Rio de Janeiro. Elsevier, 2007.
- LINDO. Disponível em <<http://www.lindo.com>>. Acesso em: 25 ago. 2007.

RODRIGUES, Marco Antonio Pereira. *Problema do caixeiro viajante: um algoritmo para resolução de problemas de grande porte baseado em busca local dirigida*. 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

SISCORP. Disponível em: <http://www.siscorp.com.br/siscorpnews/sexta_edicao/mapa1.gif>. Acesso em 24 out. 2007.