

OTIMIZAÇÃO DE ROTEIROS: ESTUDO DE CASO DE UMA DISTRIBUIDORA DE FERRO DE PASSO FUNDO/RS PARA A REGIÃO

OPTIMIZATION OF ITINERARIES: A CASE STUDY INVOLVING DELIVERY OF IRON ITEMS AMONG PASSO FUNDO / RS AND OTHER MUNICIPALITIES

Lisiane Milan Selong e Rosana Maria Luvezute Kripka

Instituto de Ciências Exatas e Geociências, Universidade de Passo Fundo - BR 285, Km 171
Passo Fundo/RS (rkripka@upf.br)

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo de caso sobre a otimização de roteiros na distribuição de ferro, de uma empresa localizada em Passo Fundo para 26 lojas filiais, localizadas em cidades da região, com a finalidade de se determinar o roteiro ótimo a ser realizado, que corresponda ao caminho de menor distância entre as cidades a serem visitadas, em cada distribuição. Realizou-se um estudo sobre o problema real, o qual foi representado através de um modelo matemático de otimização linear inteira, para o qual buscou-se encontrar uma solução ótima, através de técnicas de otimização. Como geralmente existe uma grande quantidade de variáveis em aplicações reais, também foram utilizados programas computacionais para a resolução do problema em questão. Devido às características do problema analisado, optou-se por realizar a otimização através do Solver do Excel. Assim, apresenta-se o problema real, a modelagem matemática utilizada, para sua resolução, e os resultados obtidos através da otimização das quatro principais rotas, realizadas pelo funcionário que transporta o ferro para a empresa. Como resultado, obteve-se uma redução média de 11,52% na distância total a ser percorrida, pelo funcionário, na distribuição do ferro realizada pela empresa.

Palavras-chave: Pesquisa Operacional, Programação Linear, Problema do Caixeiro Viajante.

ABSTRACT

This paper presents a case study on the optimization of itineraries involving the delivery of iron items among a center of distribution located in Passo Fundo and 26 filial stores, located in nearby municipalities. The study aimed to determine the optimal itinerary to be followed, which corresponds to shortest path among the municipalities to be visited in each course. A mathematical model of the real problem was performed in terms of linear programming. The problem's solution was obtained using the Excel's Solver facility. Results obtained for the four main routes, pointed out an average reduction of 11.52 % in the total distance to be covered.

Keywords: Operations Research, Linear Programming, Traveling Salesman Problem.

1. INTRODUÇÃO

Devido às rápidas transformações que ocorrem na atualidade, buscam-se sempre novas ferramentas, para que se possa acompanhar essas transformações. Com isso, acabam surgindo alguns problemas complexos, que necessitam do auxílio de ferramentas da matemática, para que possam ser resolvidos e analisados. Existem várias técnicas de resoluções utilizadas em aplicações reais. Neste trabalho, devido às características do problema a ser resolvido, foram utilizadas a Modelagem Matemática e a Otimização.

O problema real trata da otimização da distribuição de ferro de uma empresa localizada em Passo Fundo/RS, que o transporta para 26 cidades da região. A distribuição é realizada por um funcionário, que trabalha na própria empresa, o qual informou a existência de quatro principais rotas

diferentes. Os roteiros foram representados através de modelos matemáticos e foram otimizados, com a finalidade de se determinar quais deveriam ser os caminhos ótimos, ou seja, que correspondam aos roteiros de menor distância, visando economia de custos e de tempo, de modo que as entregas pudessem ser feitas de forma mais rápida e econômica. Para tanto, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre os assuntos relacionados ao problema, visando identificar modelos e métodos matemáticos adequados para sua resolução e, também, foi feita uma pesquisa de campo com funcionários da empresa, para se obter os dados reais necessários para a modelagem matemática do problema. Desta maneira, foi possível construir modelos matemáticos, para representar os problemas reais existentes, e resolvê-los pelos métodos matemáticos adequados, através de programas computacionais, chegando assim nas soluções ótimas correspondentes.

Assim, apresenta-se os resultados obtidos em relação ao processo de otimização de um problema real da distribuição de ferro realizada por uma empresa de Passo Fundo, para região, o qual foi transformado em modelos matemáticos de otimização, os quais foram otimizados, com objetivo de se obter as soluções ótimas para o problema, através de técnicas de otimização adequadas.

2. REFERÊNCIAL TEÓRICO

Segundo Andrade (1989), o nome “pesquisa operacional” apareceu pela primeira vez durante a Segunda Guerra Mundial, quando pesquisadores buscavam, descobrir métodos para resolver determinados problemas de operações militares. O sucesso dessas aplicações levou a que o mundo acadêmico e empresarial procurasse utilizar as técnicas criadas em problemas de administração.

Ehrlich (1985) afirma que pesquisa operacional “é um conjunto de técnicas quantitativas com o intuito de auxiliar o processo de decisão dentro de uma filosofia de modelagem e, preferivelmente, de otimização.” (1985, p. 11)

Os problemas que acontecem na vida real apresentam dificuldades de naturezas diferentes. Primeiramente, é preciso estabelecer, entre os indivíduos que querem estudar o problema em foco, certo consenso na percepção do problema. Da percepção e da definição de objetivos nasce a idéia do problema como um sistema.

A primeira etapa para resolver o problema é modelar o sistema a ser estudado. Nesta fase, é preciso identificar as variáveis exógenas e as endógenas ao sistema, assim como o seu inter-relacionamento. Quanto à natureza, o modelo poderá ser determinístico ou ter variáveis probabilísticas.

Quanto aos usos do modelo, de acordo com Ehrlich (1985), podem-se salientar as finalidades: preditivas, investigativas (ou descritivas ou explicativas) e normativas. Alerta Ehrlich:

É preciso sempre ter em mente que modelo algum jamais poderá captar toda a realidade. Entretanto, podemos construir modelos com o propósito de atender uma ou mais das três finalidades mencionadas acima. Uma simples linha que, baseando-se em dados do passado, procure extrapolar a tendência das vendas de uma firma pode ser útil do ponto de vista preditivo, sem que, por isso, lance luz alguma sobre a estrutura do mercado para o produto em pauta. O modelo de mecânica celeste que o mundo ocidental utilizou antes de Kepler ainda é bastante bom do ponto de vista preditivo. O modelo fornecia previsões muito boas para os fenômenos, sem, entretanto, concordar com a presente concepção da estrutura da dinâmica celeste. (1985, p. 11)

O autor afirma que é necessário lembrar que nenhum modelo abordará toda a realidade. Mas, podem-se obter modelos que atendam, pelo menos, a uma das três finalidades estabelecidas por ele.

A pesquisa operacional compõe-se por diversas técnicas quantitativas aplicadas às áreas de administração, produção, planejamento e organização. O sucesso dessas diversas técnicas, tanto entre

pesquisadores teóricos, como entre engenheiros, administradores e economistas, foi muito importante para a constituição deste setor do conhecimento humano, que vem apresentando grandes progressos. Depois de descobertas científicas muito importantes, também se percebe a utilização, graças às disciplinas aplicadas, desses resultados no cotidiano. É relativamente recente, de apenas três décadas, a preocupação com técnicas quantitativas para melhor aproveitamento, através de organização e planejamento dos conhecimentos acumulados. As aplicações da pesquisa operacional vão desde o balanceamento de linhas de produção em fábricas, ou fluxo ótimo de pacientes em hospitais, até ao estudo de estruturas sociais e de processos psicológicos.

Em aplicações da pesquisa operacional se emprega matemática, análise de sistemas e estatística. Além disso, para se resolver problemas muito grandes, nos quais são necessários muitos cálculos, geralmente são utilizados programas computacionais elaborados especificamente para resolução de problemas relativos à pesquisa operacional.

Dentre os diversos modelos de otimização existem os modelos de Programação Linear (PL). Segundo Goldbarg e Luna (2000), esse modelo é básico para a compreensão de todos os outros modelos da Programação Matemática, pois os conceitos, seguidos por ele, se estendem aos demais, oportunizando assim estudos mais avançados. Outra vantagem desse modelo é a eficiência dos algoritmos de solução já existentes, que possibilitam uma alta capacidade de cálculo, podendo ser usado facilmente através de planilhas, com o uso de computadores pessoais.

Os modelos de Programação Linear são um tipo especial de modelos de otimização, cuja função objetivo e restrições são lineares. Segundo Machado (1975) os modelos de Programação Linear (PL) são simples, mas bem frequente na prática. Conforme Goldbarg e Luna (2000), para que um sistema possa ser representado por meio de um modelo de PL, deve ter as seguintes características:

- Proporcionalidade: a quantidade de recurso consumido por uma dada atividade deve ser proporcional ao nível dessa atividade na solução final do problema. Além disso, o custo de cada atividade é proporcional ao nível de operação da atividade.
- Não Negatividade: deve ser sempre possível desenvolver dada atividade em qualquer nível não negativo e qualquer proporção de um dado recurso deve sempre poder ser utilizado.
- Aditividade: o custo total é a soma das parcelas associadas a cada atividade.
- Separabilidade: pode-se identificar de forma separada o custo (ou consumo de recursos) específico das operações de cada atividade.

Existem vários modelos de programação linear com certas estruturas que permitem o desenvolvimento de algoritmos eficientes e especializados para realizar suas otimizações.

Diversos problemas reais podem ser modelados, como problemas de Programação Linear, através de modelos de fluxo em redes, tais como o problema de transmissão de mensagens em redes de computadores, o problema do transporte de mercadorias das fábricas até o mercado consumidor, e também, o problema de determinação do caminho mínimo para se entregar mercadorias em várias cidades distintas, que trata-se do problema real abordado neste trabalho.

Nos problemas de fluxo em rede realiza-se o processo de otimização da distribuição de produtos, originados em pontos de oferta e consumidos em postos de demanda, dentro de uma rede de interligações possíveis. Os problemas de fluxo em rede podem ocorrer dentro de plantas industriais, sistema de comunicação e de transporte, de distribuição de água e outros, mas servem para outros modelos de situações diversas que se assemelham, por abstração. Geralmente a oferta e a demanda de cada produto possuem um valor conhecido. A distribuição dos produtos não precisa ser somente de um ponto de produção a um ponto de demanda, mas também podem ser utilizados pontos intermediários. As interligações podem possuir restrições de capacidade de tráfego e custos variados.

Um dos problemas clássicos de fluxo em redes é o Problema de Fluxo de Custo Mínimo, que consiste em determinar qual o melhor caminho a ser percorrido pelo fluxo, de produtos, em uma rede, que corresponda ao roteiro de menor custo possível. Dentre os problemas de fluxo com custo mínimo

em redes, destaca-se o problema do caixeiro viajante (PCV), o qual será utilizado na resolução do problema proposto.

O problema do Caixeiro viajante possui várias aplicações no cotidiano e diversos autores têm se utilizado desta modelagem matemática na resolução de problemas práticos. Barão, Kripka e Kripka (2009), apresentam a utilização do modelo do PCV para se encontrar o roteiro mais econômico para a coleta e destinação de resíduos, proposta para a coleta de lixo seletiva para o Município de Passo Fundo. Toso, Morabito e Clark (2008), abordam a resolução do problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes na indústria de nutrição animal, através da resolução do PCV assimétrico, onde buscam determinar o tamanho de cada lote de produção, assim como determinar a sequência de produção destes lotes de modo a satisfazer a demanda sem atrasos e minimizar os custos de produção e estoques. Nascimento et al. (2008) também utilizaram a modelagem e resolução do PCV para o estabelecimento da melhor ordem de ligação em mapeamento genético.

A seguir apresenta-se o problema o Caixeiro Viajante e a formulação matemática utilizada no presente trabalho.

3. PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

Conforme Golbarg e Luna (2000), o Problema do Caixeiro Viajante é um dos mais conhecidos problemas de programação matemática. Os problemas de roteamento lidam em sua maior parte com passeios ou tours sobre pontos de demanda ou oferta. Esses pontos podem ser representados por cidades, postos de trabalho ou atendimento, depósitos, etc. Um dos mais importantes tipos de passeios, o denominado hamiltoniano, tem esse nome, pois em 1857, Willian Rowan Hamilton propôs um jogo que chamou de “*Around the World*”. Esse jogo era realizado sobre um dodecaedro sendo que cada vértice estava associado a uma cidade. O objetivo do jogo era encontrar um caminho, através dos vértices do dodecaedro, que iniciasse e terminasse em uma mesma cidade sem nunca repetir uma visita. Uma solução do jogo de Hamilton chamou-se ciclo hamiltoniano. Apesar de Hamilton não ter sido o primeiro a propor esse problema, o seu jogo o divulgou. Hassler Whitney foi quem divulgou primeiramente esse problema em 1934. O problema do caixeiro viajante é um problema de otimização que está associado à determinação dos caminhos hamiltonianos em um grafo qualquer. O objetivo deste problema é encontrar em um grafo o caminho hamiltoniano de menor custo.

O Problema do Caixeiro Viajante é importante devido a pelo menos três características: grande aplicação prática, uma enorme relação com outros modelos, grande dificuldade de solução exata.

O problema do caixeiro é um clássico exemplo de problema de otimização combinatória (CAIXEIRO, 2009). O que se poderia fazer no primeiro momento para se resolver esse tipo de problema é reduzi-lo a um problema de enumeração: acham-se todas as rotas possíveis, depois se calcula o comprimento de cada uma delas, para então ver qual a menor. Quando se acha todas as rotas e estas são contadas, pode-se dizer que se está reduzindo o problema de otimização a um problema de enumeração. Se fizermos raciocínio combinatório simples, encontra-se o número de rotas para o caso de n cidades. Por exemplo, no caso de $n = 5$ cidades, a primeira e última posição são fixas; na segunda posição podemos colocar qualquer uma das quatro cidades restantes; na terceira posição podemos colocar qualquer uma das três cidades restantes e na quarta posição podemos colocar as duas cidades restantes, teremos apenas uma cidade para colocar na quinta posição. Consequentemente, o número de rotas seria: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Da mesma forma, se tivermos n cidades, como a primeira é fixa, fica fácil de perceber que o número total de escolhas que se pode fazer é $(n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$, ou seja, $(n-1)!$ caminhos possíveis. Quando o problema é simétrico a quantidade de caminhos possíveis reduz para $(n-1)!/2$.

Desta forma podemos gerar cada rota, calcular o comprimento total das viagens de cada rota e ver qual delas tem o menor comprimento total.

Analizando superficialmente, parece ser uma tarefa fácil, mas não é mesmo usando computadores muito bons. Pode-se perceber a complexidade de resolução de um PCV, através dos dados da Tabela 1, que apresenta o tempo necessário para resolução de problemas de acordo com o número de nós (n) envolvidos, na rede considerada, através da análise de todos os caminhos possíveis. A presença de um fatorial na medida do esforço computacional do método da redução torna inviável o uso do computador para problemas muito grandes. Por esse motivo pode-se dizer que o problema do caixeiro viajante é um problema NP-difícil, ou seja, possui ordem de resolução de complexidade não polinomial. O método reducionista torna-se prático para o caso de n ser bem pequeno, caso contrário não. Ainda não foi encontrado um método prático para resolver o problema do caixeiro viajante que envolva esforço polinomial e começa-se a pensar que este não existe. O fato de existir ou não um método que envolva esforço polinomial para resolver o problema do caixeiro viajante é um dos grandes problemas em aberto da Matemática. Se fosse descoberta uma forma de resolver o problema do caixeiro em tempo polinomial, poderia ser resolvida, também em tempo polinomial, uma grande quantidade de outros problemas matemáticos importantes. Mas se ficasse provado que é impossível resolver o problema do caixeiro em tempo polinomial, também fica entendido que uma grande quantidade de problemas importantes não teriam solução em tempo polinomial.

Tabela 1: Tempo necessário para resolução de um PCV com n nós

n	rotas por segundo	$(n-1)!$	cálculo total
5	250 milhoes	24	Insignificante
10	110 milhoes	362 880	0.003 seg
15	71 milhoes	87 bilhoes	20 min
20	53 milhoes	1.2×10^{17}	73 anos
25	42 milhoes	6.2×10^{23}	470 milhoes de anos

Fonte: (CAIXEIRO, 2009)

Existem várias formulações para o PCV, devido sua importância. Neste trabalho utilizou-se a formulação de Dantzig-Fulkerson-Johnson (DFJ), que representa o PCV sobre o grafo $G = (N, A)$, com N nós e A arestas, da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{sujeito a :} \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N \\ \sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset N \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i, j \in N \end{array} \right.$$

onde:

N : número de nós da rede;

$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \forall j \in N$: significa que todo fluxo que chega no nó j deve ser igual a 1;

$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \forall i \in N$: significa que todo fluxo que sai do nó i deve ser igual a 1;

S : é subgrafo de G ;

$|S|$: é o numero de vértices do subgrafo S ;

$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \forall S \subset N$: significa que devem ser evitados subciclos;

$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se fluxo passar pelo arco } (i,j) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Nesta formulação x_{ii} é nulo, pois não faria sentido sair do nó i e retornar para ele mesmo. Além disso, existem $n(n-1)$ variáveis inteiras e binárias e o problema possui o numero de restrições da ordem (2^n) .

3.1. Formulação matemática de um exemplo genérico de um PCV com 5 nós

Considerando um exemplo genérico do problema do caixeiro viajante com cinco nós, sua forma genérica pode ser visualizada na Figura 1.

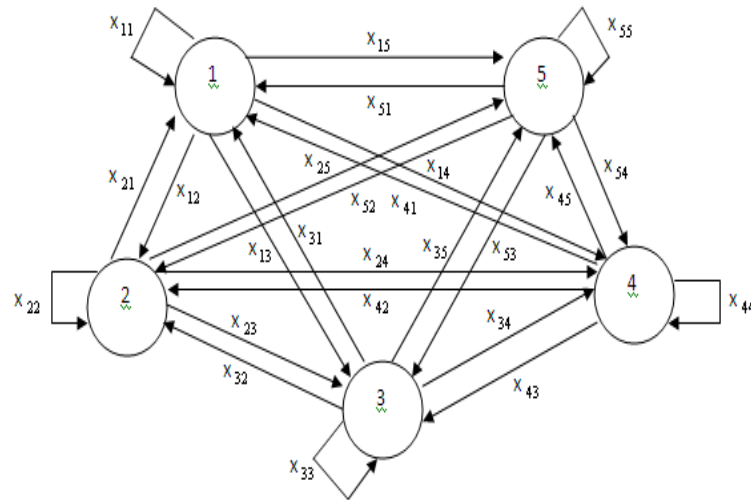


Figura 1: Problema do Caixeiro Viajante com 5 nós

A Função Objetivo do PCV será minimizar o custo das distâncias. Matematicamente é representada por:

$$\min \quad z = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^5 c_{ij} x_{ij}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \min \quad z = & c_{11}x_{11} + c_{21}x_{21} + c_{31}x_{31} + c_{41}x_{41} + c_{51}x_{51} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{15}x_{15} + c_{22}x_{22} + \\ & + c_{32}x_{32} + c_{42}x_{42} + c_{52}x_{52} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{25}x_{25} + c_{33}x_{33} + c_{43}x_{43} + c_{53}x_{53} + c_{34}x_{34} + c_{35}x_{35} + \\ & + c_{44}x_{44} + c_{54}x_{54} + c_{45}x_{45} + c_{55}x_{55} \end{aligned}$$

onde: c_{ij} : custo do arco (i, j) e x_{ij} : fluxo no arco (i, j)

As restrições do PCV poderão ser modeladas matematicamente da seguinte forma:

- a) O fluxo de entrada em cada nó deve ser igual a 1, para que não tenha mais que um caminho convergindo para um único nó. Então:

$$\sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &= 1 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &= 1 \end{aligned}$$

- b) O fluxo de saída de cada nó deve ser igual a 1, pois poderá partir um único caminho de cada nó. Então:

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &= 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} &= 1 \end{aligned}$$

c) O fluxo do nó para ele mesmo deve ser igual a zero. Então:

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \Rightarrow 1 - 1 = 0$$

ou seja:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 0 & S &= \{1\} \\ x_{22} &= 0 & S &= \{2\} \\ x_{33} &= 0 & S &= \{3\} \\ x_{44} &= 0 & S &= \{4\} \\ x_{55} &= 0 & S &= \{5\} \end{aligned}$$

d) Evitar subciclos, ou seja, caminhos que não percorram todos os nós do problema, assim, não satisfazendo o objetivo principal do problema. Então:

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \leq 2 - 1 \leq 1$$

ou seja:

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{21} &\leq 1 & S &= \{1,2\} \\ x_{13} + x_{31} &\leq 1 & S &= \{1,3\} \\ x_{14} + x_{41} &\leq 1 & S &= \{1,4\} \\ x_{15} + x_{51} &\leq 1 & S &= \{1,5\} \\ x_{23} + x_{32} &\leq 1 & S &= \{2,3\} \\ x_{24} + x_{42} &\leq 1 & S &= \{2,4\} \\ x_{25} + x_{52} &\leq 1 & S &= \{2,5\} \\ x_{34} + x_{43} &\leq 1 & S &= \{3,4\} \\ x_{35} + x_{53} &\leq 1 & S &= \{3,5\} \\ x_{45} + x_{54} &\leq 1 & S &= \{4,5\} \end{aligned}$$

e

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \leq 3 - 1 \leq 2$$

ou seja:

$$\begin{array}{ll}
 x_{12} + x_{21} + x_{13} + x_{31} + x_{23} + x_{32} \leq 2 & S = \{1,2,3\} \\
 x_{12} + x_{21} + x_{14} + x_{41} + x_{24} + x_{42} \leq 2 & S = \{1,2,4\} \\
 x_{12} + x_{21} + x_{15} + x_{51} + x_{25} + x_{52} \leq 2 & S = \{1,2,5\} \\
 x_{13} + x_{31} + x_{14} + x_{41} + x_{34} + x_{43} \leq 2 & S = \{1,3,4\} \\
 x_{13} + x_{31} + x_{15} + x_{51} + x_{35} + x_{53} \leq 2 & S = \{1,3,5\} \\
 x_{14} + x_{41} + x_{15} + x_{51} + x_{45} + x_{54} \leq 2 & S = \{1,4,5\} \\
 x_{23} + x_{32} + x_{24} + x_{42} + x_{34} + x_{43} \leq 2 & S = \{2,3,4\} \\
 x_{23} + x_{32} + x_{25} + x_{52} + x_{35} + x_{53} \leq 2 & S = \{2,3,5\} \\
 x_{24} + x_{42} + x_{25} + x_{52} + x_{45} + x_{54} \leq 2 & S = \{2,4,5\} \\
 x_{34} + x_{43} + x_{35} + x_{53} + x_{45} + x_{54} \leq 2 & S = \{3,4,5\}
 \end{array}$$

e

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \leq 4 - 1 \leq 3$$

ou seja:

$$\begin{array}{ll}
 x_{12} + x_{21} + x_{13} + x_{31} + x_{14} + x_{41} + x_{23} + x_{32} + x_{34} + x_{43} + x_{24} + x_{42} \leq 3 & S = \{1,2,3,4\} \\
 x_{12} + x_{21} + x_{13} + x_{31} + x_{15} + x_{51} + x_{23} + x_{32} + x_{35} + x_{53} + x_{25} + x_{52} \leq 3 & S = \{1,2,3,5\} \\
 x_{12} + x_{21} + x_{14} + x_{41} + x_{15} + x_{51} + x_{24} + x_{42} + x_{25} + x_{52} + x_{45} + x_{54} \leq 3 & S = \{1,2,4,5\} \\
 x_{13} + x_{31} + x_{14} + x_{41} + x_{15} + x_{51} + x_{34} + x_{43} + x_{54} + x_{45} + x_{35} + x_{53} \leq 3 & S = \{1,3,4,5\} \\
 x_{23} + x_{32} + x_{24} + x_{42} + x_{25} + x_{52} + x_{34} + x_{43} + x_{45} + x_{54} + x_{24} + x_{42} \leq 3 & S = \{2,3,4,5\}
 \end{array}$$

e) As variáveis devem ser binárias, admitindo valor 1 ou 0. Então:

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

ou seja:

$$\begin{array}{l}
 x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{33}, x_{43}, x_{53}, x_{34}, x_{35}, \\
 x_{44}, x_{54}, x_{45}, x_{55} \in \{0,1\}
 \end{array}$$

Além disso, foi dito que o PCV possui uma quantidade de restrições da ordem de 2^n . No exemplo acadêmico apresentado para uma rede com 5 nós foram necessárias 35 restrições, como já era esperado (ordem de $2^n = 32$).

Dessa forma, buscou-se investigar outros aplicativos que resolvessem problemas maiores e que facilitassem, também, a inserção dos dados do problema. Entre eles escolheu-se o software Excel que é apresentado a seguir.

3.2. Resolução do PCV através do Solver do Excel

Uma das maneiras de resolver o problema com o Excel é utilizando uma matriz de variáveis e custos. A seguir serão apresentados os passos que devem ser seguidos para se obter a otimização de um problema de programação linear ou de programação linear inteira (LACHTERMACHER, 2007).

Primeiramente os dados serão inseridos em duas matrizes, uma para as distâncias (custos) e outras para as variáveis.

Considerando um PVC com 5 nós. Na Figura 2 estão apresentadas as duas matrizes, sendo a primeira das distâncias (ou custos nos arcos) e a segunda das variáveis. Neste exemplo a matriz das distâncias é simétrica.

A segunda etapa é inserir equações referentes as restrições de fluxo de entrada no nó, cujo somatório deverá ser 1, e de fluxo de saída do nó, cujo somatório também deverá ser 1, ou seja, o somatório dos fluxos de entrada e saída deverão ser iguais a 1. As células H13 a H17 contêm os somatórios das linhas referentes às colunas C à G e as células C18, D18, E18, F18 e G18 contêm os somatórios das colunas referentes às linhas 13 à 17 (ver Figura 3).

O valor da função objetivo foi inserido na célula B2. Para chegarmos ao resultado correto da função objetivo devemos envolver as duas matrizes, as dos custos das variáveis e a das variáveis, usando a função do Excel SOMARPRODUTO. Isso pode ser visualizado na Figura 4. Em seguida, todos os dados, variáveis, função objetivo, restrições e parâmetros são inseridos no solver do Excel e é solicitado que seja realizada a otimização. Observa-se que inicialmente não são inseridas as restrições para evitar os subciclos.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Distâncias entre as cidades							
2								
3								
4								
5	Distâncias entre nós:	De/Para	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	
6		1,0	0,0	5,0	4,0	8,0	7,0	
7		2,0	5,0	0,0	3,0	1,0	9,0	
8		3,0	4,0	3,0	0,0	10,0	2,0	
9		4,0	8,0	1,0	10,0	0,0	6,0	
10		5,0	7,0	9,0	2,0	6,0	0,0	
11								
12	Variáveis :	De/Para	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	
13		1,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	
14		2,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	
15		3,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	
16		4,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	
17		5,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
18								

Figura 21 : Inserção da Matriz de distâncias e de variáveis

Ao ser solicitado que fosse realizada a otimização, o software gerou uma solução ótima, com custo zero, que dizia que todo $x_{ii} = 1$, para $i = 1, \dots, 5$, ou seja, que todo fluxo fosse do nó para ele mesmo. Esta solução apesar de ser possível não é a solução do problema, pois não apresenta um caminho único que inicie e termine no mesmo nó, visitando todos os nós da rede, com custo mínimo. Nesse caso, a solução indica que existem subciclos que se devam evitar. Assim, conforme o software indica os subciclos hamiltonianos, são inseridas restrições de modo que os subciclos obtidos nas otimizações sejam evitados. Após as inserções das restrições, para evitar os subciclos encontrados, novamente é solicitado ao software que faça a otimização do PCV.

H13 fx =SOMA(C13:G13)								
	A	B	C	D	E	F	G	H
4								
5	Distâncias entre nós:	De/Para	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	
6		1,0	0,0	5,0	4,0	8,0	7,0	
7		2,0	5,0	0,0	3,0	1,0	9,0	
8		3,0	4,0	3,0	0,0	10,0	2,0	
9		4,0	8,0	1,0	10,0	0,0	6,0	
10		5,0	7,0	9,0	2,0	6,0	0,0	
11								
12	Variáveis :	De/Para	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	
13		1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0
14		2,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	1,0
15		3,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0
16		4,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0
17		5,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1,0
18			1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	

Figura 3: Inserção de restrições de conservação de fluxo nos nós

B2		fx =SOMAPRODUTO(C6:G10;C13:G17)						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Distâncias entre as cidades							
2	FO=	18,0						
3								

Figura 4: Inserção da função objetivo

Para que fosse encontrada a solução ótima do problema, foi necessário inserir apenas quatro restrições para que os ciclos hamiltonianos fossem evitados, entre dois e três nós apenas, conforme apresenta a Figura 5.

C21 fx =E13+G15+C17									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19									
20	Restrições Adicionais:		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
21	(para evitar subciclos)		0,0					2,0	
22			1,0					1,0	
23			0,0					2,0	
24			1,0					1,0	
25									

Figura 5: Células para inserção de restrições para evitar subciclos hamiltonianos

Dessa forma, após inseridas todas as restrições necessárias para evitar subciclos identificados, foi possível encontrar o caminho ótimo, sendo, $x_{11}^* = 0$, $x_{12}^* = 1$, $x_{13}^* = 0$, $x_{14}^* = 0$, $x_{15}^* = 0$, $x_{21}^* = 0$, $x_{22}^* = 0$, $x_{23}^* = 0$, $x_{24}^* = 1$, $x_{25}^* = 0$, $x_{31}^* = 1$, $x_{32}^* = 0$, $x_{33}^* = 0$, $x_{34}^* = 0$, $x_{35}^* = 0$, $x_{41}^* = 0$, $x_{42}^* = 0$, $x_{43}^* = 0$, $x_{44}^* = 0$, $x_{45}^* = 1$, $x_{51}^* = 0$, $x_{52}^* = 0$, $x_{53}^* = 1$, $x_{54}^* = 0$ e $x_{55}^* = 0$ mostrando que o menor caminho é o 124531. Note, que este foi o resultado obtido também nas outras formas de

resolução apresentadas neste trabalho. Na Figura 6 pode ser visualizada toda a planilha que resultou na otimização do problema.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Distâncias entre as cidades								
2	FO=	18,0							
3									
4									
5	Distâncias entre nós:	De/Para	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0		
6		1,0	0,0	5,0	4,0	8,0	7,0		
7		2,0	5,0	0,0	3,0	1,0	9,0		
8		3,0	4,0	3,0	0,0	10,0	2,0		
9		4,0	8,0	1,0	10,0	0,0	6,0		
10		5,0	7,0	9,0	2,0	6,0	0,0		
11									
12	Variáveis :	De/Para	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0		
13		1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0	
14		2,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	1,0	
15		3,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	
16		4,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	
17		5,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	
18			1,0	1,0	1,0	1,0	1,0		
19									
20	Restrições Adicionais:		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
21	(para evitar subciclos)		0,0					2,0	
22			1,0					1,0	
23			0,0					2,0	
24			1,0					1,0	
25									

Figura 6: Resultado da otimização pelo Solver do Excel

4. PROBLEMA DE DISTRIBUIÇÃO DA EMPRESA MACONORTE

Na empresa Maconorte Comércio de Materiais de Construção, que é uma rede de material de construção, é transportado, cinco vezes por semana, ferro para as filiais localizadas em 26 cidades da região de Passo Fundo. Como, o caminhão, que transporta o ferro, faz muitas rotas diferentes, surgiu a curiosidade de saber qual seria o melhor caminho a ser feito pelo funcionário que leva o ferro, obtendo-se, assim, o percurso de distância mínima para distribuição do produto.

Assim, o objetivo, deste trabalho é elaborar modelos matemáticos que representem as principais rotas feitas pelo caminhão, analisar os modelos e resolvê-los pelo método mais adequado para o problema, obtendo assim os caminhos ótimos a serem percorridos, de modo que o gasto com o transporte seja mínimo.

Através de uma funcionária da empresa, com a autorização do gerente da mesma, obteve-se a lista das cidades pelas quais é transportado o ferro. Após, foi elaborado um questionário, o qual foi aplicado ao funcionário que transporta o ferro, para saber quais são as rotas mais utilizadas por ele, e por que ele faz aquele caminho. Com essas informações é possível desenvolver o modelo para chegarmos ao objetivo do trabalho.

Segundo o funcionário que transporta o ferro, as rotas feitas por ele semanalmente, são as seguintes: Passo Fundo à Marcelino Ramos, Passo Fundo à Nova Prata, Passo Fundo à São José do Ouro, Passo Fundo à Jacutinga e Passo Fundo à Selbach.

Para realizar a primeira rota ele sai de Passo Fundo, passa em Sertão, Estação, Getúlio Vargas, Erechim, Viadutos, Marcelino Ramos e volta para Passo Fundo. Para realizar a segunda rota ele sai de Passo Fundo, vai para Casca, Paraí, Nova Araça, Guaporé, Nova Prata e volta para Passo Fundo. Ao realizar a terceira rota ele sai de Passo Fundo, vai à Tapejara, Sananduva, Lagoa Vermelha, São José do Ouro e volta para Passo Fundo. Para realizar a quarta rota ele sai de Passo Fundo vai a Erechim,

São Valentim, Campinas do Sul, Jacutinga e retorna à Passo Fundo. Finalmente, para realizar a quinta rota, ele sai de Passo Fundo, vai para Selbach e volta para Passo Fundo.

Para obtermos as distâncias mínimas entre as cidades, foi utilizado o recurso Google Maps (2009), que é disponível gratuitamente no site do Google e é disponível também em Português. Primeiramente foi elaborada uma matriz contendo as 26 cidades, sendo que, cada uma pode ser um ponto de saída ou um ponto de chegada, ou seja, de todas as cidades pode-se chegar a todas as cidades, através do caminho mínimo indicado. A matriz com as distâncias mínimas pode ser visualizada na Tabela 2.

As cidades na matriz estão representadas pelos números de 1 a 26, e estas são as seguintes: 1 = Passo Fundo; 2 = Sertão; 3 = Estação; 4 = Getúlio Vargas; 5 = Erechim; 6 = São Valentim; 7 = Jacutinga; 8 = Viadutos; 9 = Marcelino Ramos; 10 = Nonoai; 11 = Casca; 12 = Paraí; 13 = Nova Araça; 14 = Nova Bassano; 15 = Nova Prata; 16 = Guaporé; 17 = Selbach; 18 = Salto do Jacuí; 19 = Tapejara; 20 = Sananduva; 21 = Lagoa Vermelha; 22 = São José do Ouro; 23 = Barracão; 24 = Machadinho; 25 = Campinas do Sul; 26 = David Canabarro.

As distâncias vistas na matriz, foram obtidas através do Google Maps, como já foi dito anteriormente. Para isso, basta entrarmos no site do Google e clicar na opção Mapas. Em seguida, clica-se na opção “Como chegar”, logo após digita-se no primeiro espaço a cidade de saída e no segundo a cidade de destino. Após se deve escolher a opção do meio de transporte e clicar no ícone “Como chegar” ao lado deste. O programa irá fornecer a distância mínima, o tempo gasto e ainda ao lado o mapa com a imagem do deslocamento. Um exemplo que será utilizado no trabalho pode ser observado na Figura 7.

Tabela 2: Distâncias mínimas entre as 26 cidades consideradas

De/Para	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	0	35,1	48,8	51,1	84,0	256	101	110	149	132	89,3	89,0	96,8	105	118	113	79,0	142	53,7	75,8	98,2	122	164	142	88,1	88,9
2	35,1	0	13,6	15,9	48,9	288	70,6	74,8	91,2	126	95,2	115	123	131	144	139	113	176	49,1	62,6	123	98,4	122	119	80,8	114
3	48,8	13,6	0	18,6	51,5	73,3	39,5	77,4	93,9	128	109	129	136	144	157	152	127	190	62,7	65,2	112	101	125	121	52,0	128
4	51,1	15,9	18,6	0	32,9	303	54,6	58,8	75,3	110	111	131	139	146	160	154	129	192	38,0	46,7	93,6	82,4	106	103	64,8	130
5	84,0	48,9	51,5	32,9	0	276	35,5	25,9	42,4	90,6	144	164	172	179	193	187	162	225	70,8	79,4	126	115	111	78,7	45,7	163
6	256	288	73,3	303	276	0	243	302	319	253	318	338	346	354	367	362	212	293	306	328	351	375	416	395	231	341
7	101	70,6	39,5	54,6	35,5	243	0	61,5	78,0	100	163	183	190	198	211	206	178	235	92,6	101	148	137	161	114	12,5	185
8	110	74,8	77,4	58,8	25,9	302	61,5	0	16,5	113	170	190	198	204	203	213	188	251	96,7	83,9	131	78,0	85,1	52,8	71,7	166
9	149	91,2	93,9	75,3	42,4	319	78,0	16,5	0	129	181	203	195	188	187	224	227	290	101	67,5	114	61,6	68,7	36,3	88,2	150
10	132	126	128	110	90,6	253	100	113	129	0	194	214	222	229	243	237	186	263	148	156	203	192	216	165	87,7	217
11	89,3	95,2	109	111	144	318	163	170	181	194	0	19,7	27,5	35,3	48,5	43,3	141	204	58,3	118	86,1	149	152	174	150	62,9
12	89,0	115	129	131	164	338	183	190	203	214	19,7	0	7,8	15,6	28,8	56,2	161	224	78,0	141	88,9	153	155	197	170	47,2
13	96,8	123	136	139	172	346	190	198	195	222	27,5	7,8	0	7,8	21,0	64,0	169	231	85,8	133	81,2	145	148	189	178	55,0
14	105	131	144	146	179	354	198	204	188	229	35,3	15,6	7,8	0	13,2	71,8	176	239	93,6	125	73,3	137	140	181	186	62,8
15	118	144	157	160	193	367	211	203	187	243	48,5	28,8	21,0	13,2	0	37,2	190	252	141	124	72,2	136	139	180	199	76,0
16	113	139	152	154	187	362	206	213	224	237	43,3	56,2	64,0	71,8	37,2	0	138	182	102	162	109	173	176	218	194	99,4
17	79,0	113	127	129	162	212	178	188	227	186	141	161	169	176	190	138	0	81,1	132	154	176	200	242	221	166	167
18	142	176	190	192	225	293	235	251	290	263	204	224	231	239	252	182	81,1	0	195	217	239	263	305	283	223	230
19	53,7	49,1	62,7	38,0	70,8	306	92,6	96,7	101	148	58,3	78,0	85,8	93,6	141	102	132	195	0	28,4	68,6	74,7	134	95,1	103	75,4
20	75,8	62,6	65,2	46,7	79,4	328	101	83,9	67,5	156	118	141	133	125	124	162	154	217	28,4	0	51,9	40,8	64,5	61,2	111	87,3
21	98,2	123	112	93,6	126	351	148	131	114	203	86,1	88,9	81,2	73,3	72,2	109	176	239	68,6	51,9	0	64,8	67,7	107	158	47,2
22	122	98,4	101	82,4	115	375	137	78,0	61,6	192	149	153	145	137	136	173	200	263	74,7	40,8	64,8	0	27,4	25,3	147	118
23	164	122	125	106	111	416	161	85,1	68,7	216	152	155	148	140	139	176	242	305	134	64,5	67,7	27,4	0	33,3	171	120
24	142	119	121	103	78,7	395	114	52,8	36,3	165	174	197	189	181	180	218	221	283	95,1	61,2	107	25,3	33,3	0	124	143
25	88,1	80,8	52,0	64,8	45,7	231	12,5	71,7	88,2	87,7	150	170	178	186	199	194	166	223	103	111	158	147	171	124	0	174
26	88,9	114	128	130	163	341	185	166	150	217	62,9	47,2	55,0	62,8	76,0	99,4	167	230	75,4	87,3	47,2	118	120	143	174	0

Fonte: (MAPS, 2009)

O programa nos fornece também o caminho inverso do que procuramos. Por exemplo, se quisermos, como na Figura 7, saber a distância de Passo Fundo para Sertão, basta clicarmos na seta que fica ao lado do espaço onde escrevemos as cidades e vamos obter a distância de Sertão para Passo Fundo.

Desta forma, foi utilizado o Google Maps (2009) para se encontrar todas as distâncias mínimas entre as cidades consideradas. Como o problema é simétrico basta utilizarmos o recurso descrito anteriormente para encontrar o inverso dos caminhos.

Foram resolvidas neste trabalho somente as quatro primeiras rotas, pois a quinta envolve apenas dois nós, e não teria sentido resolvê-la.

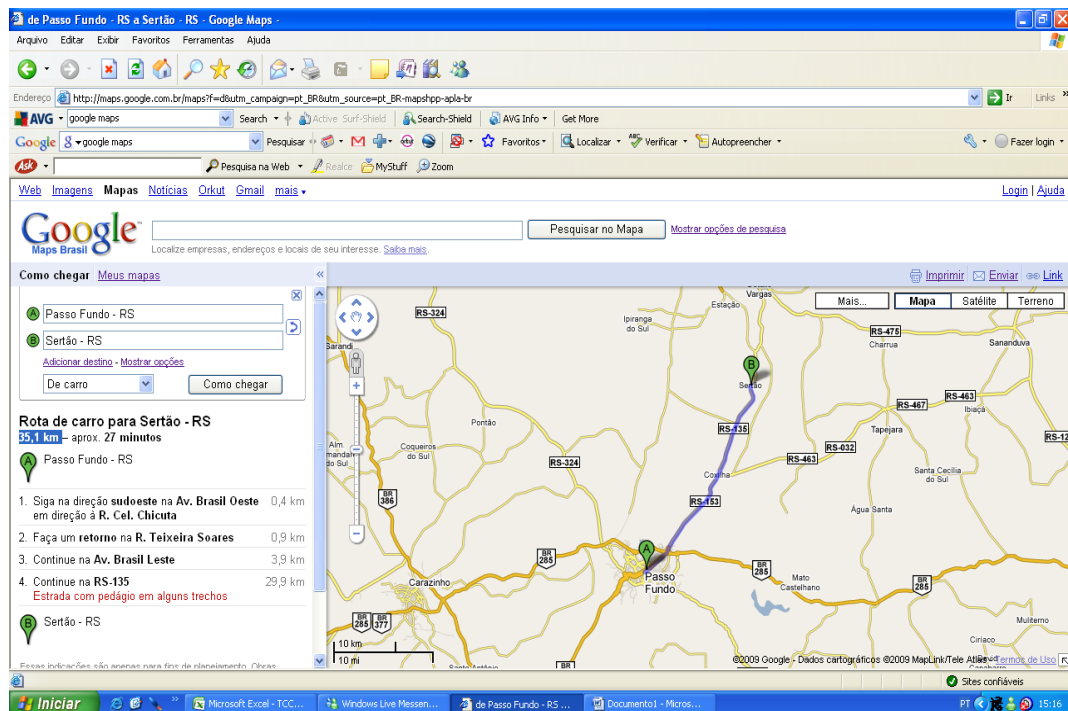


Figura 7: Exemplo de obtenção da distância mínima entre Passo Fundo e Sertão através do Google Maps (2009)

Com todos os dados necessários definidos, foi possível construir a matriz dos custos das variáveis e a matriz das variáveis e resolver o problema. Primeiramente foi resolvida a primeira rota feita pelo funcionário, ou seja, de Passo Fundo à Marcelino Ramos.

Após ser otimizada a primeira rota no Solver do Excel, chegou-se ao resultado que para a primeira rota deve ser usado o seguinte caminho: Passo Fundo – Sertão – Estação – Erechim–Marcelino Ramos – Viadutos – Getúlio Vargas – Passo Fundo. Para chegar no caminho ótimo, que neste caso foi 269 Km, foi necessário adicionar algumas restrições para que fossem evitados os subciclos hamiltonianos. Isso pode ser visto nas Figuras 8 e 9.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	1ª Rota												
2													
3	F.O. =	269											
4													
5													
6													
7	Distâncias entre os nós:			De/Para	1	2	3	4	5	8	9		
8				1	0	35,1	48,8	51,1	84	110	149		
9				2	35,1	0	13,6	15,9	48,9	74,8	91,2		
10				3	48,8	13,6	0	18,6	51,5	77,4	93,9		
11				4	51,1	15,9	18,6	0	32,9	58,8	75,3		
12				5	84	48,9	51,5	32,9	0	25,9	42,4		
13				8	110	74,8	77,4	58,8	25,9	0	16,5		
14				9	149	91,2	93,9	75,3	42,4	16,5	0		
15													
16													
17	Variáveis:			De/Para	1	2	3	4	5	8	9		
18				1	0	1	0	0	0	0	0	1	
19				2	0	0	1	0	0	0	0	1	
20				3	0	0	0	0	1	0	0	1	
21				4	1	0	0	0	0	0	0	1	
22				5	0	0	0	0	0	0	1	1	
23				8	0	0	0	1	0	0	0	1	
24				9	0	0	0	0	0	1	0	1	
25					1	1	1	1	1	1	1		
26													

Figura 8: Resultado da otimização da primeira rota

B3		=SOMARPRODUTO(E8:K14;E18:K24)											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
25					1	1	1	1	1	1	1		
26													
27													
28	Restrições Adicionais:				0	0	0	0	0	0	0	0	
29					1								1
30					0								1
31					0								2
32					2								2
33					0								1
34					1								1
35					0								3
36					2								2
37					0								2
38					0								3
39													

Figura 29: Inserção de restrições para evitar subciclos na primeira rota

O caminho obtido pelo Solver do Excel é diferente daquele feito pelo motorista que transporta o ferro. O caminho feito por ele resulta em uma distância de 291,6 Km e o que o Solver encontrou gera uma distância de 269 Km. Pelo resultado obtido conclui-se que realmente foi encontrado um caminho mais vantajoso para o motorista realizar esta rota. Neste caso houve uma redução de aproximadamente 7,75% na distância percorrida.

A segunda rota analisada foi a de Passo Fundo à Nova Prata. Foram adicionados todos os dados no Solver do Excel e se obteve o resultado da otimização conforme pode ser visualizado na Figura 10 e 11.

B5		=SOMARPRODUTO(E9:J14;E18:J23)											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K		
1	2ª Rota												
2													
3													
4													
5	F.O.=	267,6											
6													
7													
8	Distância entre os nós:			De/Para	1	11	12	13	16	15			
9				1	0	69,3	89	96,8	113	118			
10				11	69,3	0	19,7	27,5	43,3	48,5			
11				12	89	19,7	0	7,8	56,2	28,8			
12				13	96,8	27,5	7,8	0	64	21			
13				16	113	43,3	56,2	64	0	37,2			
14				15	118	48,5	28,8	21	37,2	0			
15													
16													
17	Variáveis:			De/Para	1	11	12	13	16	15			
18				1	0	1	0	0	0	0		1	
19				11	0	0	0	0	1	0		1	
20				12	1	0	0	0	0	0		1	
21				13	0	0	1	0	0	0		1	
22				16	0	0	0	0	0	1		1	
23				15	0	0	0	1	0	0		1	
24					1	1	1	1	1	1		1	
25													

Figura 10: Resultado da otimização da segunda rota

27												
28	Restrições Adicionais:				0	0	0	0	0	0	0	
29					1							1
30					1							1
31					1							1
32												

Figura 11: Inserção de restrições para evitar subciclos na segunda rota

O caminho ótimo para esta rota, ao analisar o resultado na Figura 21 é: Passo Fundo – Casca – Guaporé – Nova Prata – Nova Araça – Paraí – Passo Fundo, o que gera uma distância de 267,6 km. Para chegar a este resultado foi necessário adicionar algumas restrições, pois apareceram ciclos hamiltonianos, mas como pode ser visto foram poucas. O caminho feito pelo motorista resulta em uma distância de 316 km. Novamente concluiu-se que o caminho encontrado pelo Solver otimiza, o caminho, gerando uma redução de aproximadamente 15,32% na distância a ser percorrida.

A próxima rota resolvida foi a terceira, que sai de Passo Fundo e vai à São José do Ouro. Como as rotas anteriores para resolver esta, foi necessário adicionar algumas restrições para evitar ciclos hamiltonianos. O caminho utilizado pelo motorista resulta em uma distância de 320,8 km. O resultado ótimo pelo Solver pode ser observado nas Figuras 12 e 13.

Para chegar ao resultado de 285,9 km foram adicionadas poucas restrições e melhor caminho a ser feito é Passo Fundo – Lagoa Vermelha – São José do Ouro – Sananduva – Tapejara – Passo Fundo. Ao comparar a distância obtida pelo Solver e aquela obtida, pelo caminho feito pelo motorista, conclui-se que a solução que o Solver encontrou é a melhor, indicando uma redução de aproximadamente 10,88%.

B4 f _x =SOMARPRODUTO(E9:I13;E19:I23)											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	3ª Rota										
2											
3											
4	F.O.	285,9									
5											
6											
7											
8	Distâncias entre os nós:			De/Para	1	19	20	21	22		
9				1	0	53,7	75,8	98,2	122		
10				19	53,7	0	28,4	68,6	74,7		
11				20	75,8	28,4	0	51,9	40,8		
12				21	98,2	68,6	51,9	0	64,8		
13				22	122	74,7	40,8	64,8	0		
14											
15											
16											
17											
18	Variáveis:			De/Para	1	19	20	21	22		
19				1	0	0	0	1	0		1
20				19	1	0	0	0	0		1
21				20	0	1	0	0	0		1
22				21	0	0	0	0	1		1
23				22	0	0	1	0	0		1
24					1	1	1	1	1		
25											

Figura 12: Resultado da otimização da terceira rota

26											
27											
28	Restrições Adicionais:			0	0	0	0	0	0		
29				1							1
30				2							2
31											
32											

Figura 13: Inserção de restrições para evitar subciclos na terceira rota

A quarta e última rota que foi resolvida, neste trabalho, é a que sai de Passo Fundo e vai a Jacutinga. O caminho ótimo encontrado pelo Solver foi o seguinte: Passo Fundo – São Valentim – Campinas do Sul – Jacutinga – Erechim – Passo Fundo, o que resulta na distância de 619 km. Para encontrar o caminho ótimo foi necessário adicionar restrições, pois o problema gerou ciclos hamiltonianos. Essas informações podem ser vistas nas Figuras 14 e 15.

B4		=SOMARPRODUTO(E9:I13;E17:I21)									
1	4ª Rota										
2											
3											
4	F.O.	619									
5											
6											
7											
8	Distâncias entre os nós:		De/Para	1	5	6	25	7			
9			1	0	84	256	88,1	101			
10			5	84	0	276	45,7	35,5			
11			6	256	276	0	231	243			
12			25	88,1	45,7	231	0	12,5			
13			7	101	35,5	243	12,5	0			
14											
15											
16	Variáveis:		De/Para	1	5	6	25	7			
17			1	0	0	1	0	0		1	
18			5	1	0	0	0	0		1	
19			6	0	0	0	1	0		1	
20			25	0	0	0	0	1		1	
21			7	0	1	0	0	0		1	
22				1	1	1	1	1		1	
23											

Figura 14: Resultado da otimização da quarta rota

24											
25	Restrições Adicionais:		0	0	0	0	0	0		0	
26			1							1	
27			2							2	
28											

Figura 15: Inserção das restrições para evitar subciclos na quarta rota

O caminho utilizado pelo motorista gerou uma distância de 704,5 km. Então, novamente como para as rotas anteriores, o Solver encontrou um caminho melhor que o utilizado pelo motorista. Neste último caso, houve uma redução de aproximadamente 12,14% na distância a ser percorrida.

Dessa forma, após a análise dessas quatro rotas, comparadas aos roteiros otimizados gerados, conclui-se que, com o Solver do Excel, foi possível encontrar caminhos mais curtos para o transporte do ferro, do que aqueles atualmente utilizados pela empresa.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática e suas ferramentas são muito úteis na solução de problemas reais, pois auxiliam na compreensão de problemas complexos, os quais exigem métodos quantitativos para que possam ser mensurados e analisados.

A realização deste trabalho possibilitou a determinação de quais seriam os roteiros de menor distância para que, uma empresa localizada em Passo Fundo, pudesse realizar a distribuição de ferro para cidades da região, de maneira mais rápida e, possivelmente, mais econômica.

Os cálculos dos roteiros de menor distância, foram realizados através da análise das quatro principais rotas semanais praticadas pela empresa, para as quais foram aplicadas técnicas de otimização adequadas, tendo em vista trazer benefícios tanto para a empresa, como para o cliente. Ressalta-se que a empresa realiza no total cinco rotas diferentes durante a semana e que, neste trabalho, foram resolvidas apenas quatro, pois uma das cinco envolve apenas duas cidades e, desta forma, não teria sentido resolvê-la.

Na otimização dos quatro roteiros, através do Solver do Excel, obteve-se que todas as soluções ótimas representavam caminhos menores do que os realizados pelo funcionário, que dirige o caminhão. No primeiro roteiro otimizado obteve-se uma redução na distância total percorrida de aproximadamente 7,75%, no segundo 15,32%, no terceiro, 10,88% e no quarto 12,14%, o que, em

média, demonstrou uma redução aproximada de 11,52%. Ao comparar o caminho feito pela empresa e o que o Solver encontrou como ótimo, a maior diferença entre as distâncias, foi de 85,5 Km, na rota que sai de Passo Fundo e vai à Jacutinga, retornando a Passo Fundo, chegando a uma redução de 12,4% na distância total a ser percorrida.

Nesse caso, a otimização pode trazer benefícios tanto para a empresa distribuidora, quanto para as lojas que vão receber a mercadoria. Ao se encontrar o menor caminho para a distribuição do ferro (o que em todos os casos implicou numa redução da distância a ser percorrida) pode-se reduzir tanto os gastos com combustível, como também, indiretamente, pode se minimizar o tempo de viagem de entrega da mercadoria para as lojas.

De maneira geral, o processo de modelagem matemática possibilita dar significado à conceitos abstratos, ao ser aplicado em problemas do cotidiano. Ressalta-se, a importância das ferramentas computacionais em tais aplicações, pois geralmente problemas reais apresentam um grande número de variáveis, o que torna a resolução manual difícil, demorada e, em alguns casos, quase impossível, como é o caso da complexidade de resolução do problema do caixeiro viajante, abordado neste estudo de caso. Além disso, também salienta-se a importância das técnicas de otimização no processo de tomada de decisões, pois suas aplicações, na resolução de problemas reais, podem ajudar muito na administração dos recursos físicos disponíveis, tendo em vista tanto a diminuição de custos, como, também, a maximização de lucros de uma empresa, a exemplo do estudo de caso apresentado neste trabalho.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, E.L. *Introdução à pesquisa operacional: métodos e técnicas para análise de decisão*. Rio de Janeiro. LTC, 1989.

BARAO, F. R. ; KRIPKA, Moacir ; KRIPKA, R. M. L. . Utilização de ferramentas de pesquisa operacional no suporte às tomadas de decisão na administração pública proposta de modelagem para coleta seletiva no município de Passo Fundo - RS. *Teoria e Evidencia Econômica* (UPF), v. 14, p. 63-85, 2008.

CAIXEIRO. Disponível em <<http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/caixeiro.html>>. Acesso em 09 mai. 2009.

EHRLICH, P. J. *Pesquisa operacional: curso introdutório*. São Paulo. Atlas, 1985.

GOLDBARG, M.C.; LUNA, H. P. L. *Otimização combinatória e programação linear : modelos e algoritmos*. Rio de Janeiro. Campus, 2000.

LACHTERMACHER, G. *Pesquisa Operacional na tomada de decisões: modelagem em Excel*. Rio de Janeiro. Elsevier, 2007.

MACHADO, H. V. *Programação Linear*. 10º Colóquio Brasileiro de Matemática Poços de Caldas 7/26, 1975.

MAPS Google. Disponível em <<http://maps.google.com.br/maps?hl=pt-BR&tab=wl>>. Acesso em: 19 abr. 2009.

NASCIMENTO, M. ; CAMPANA, A. C. M. ; SALGADO, C. C. ; CRUZ, C. D. ; PETERNELLI, L. A. . *O problema do caixeiro viajante aplicado ao estabelecimento da melhor ordem de ligação em*

mapeamento genético. In: 53 RBRAS Reunião Anual da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria. Lavras - MG : UFLA, 2008. v. 1. p. 174-174.

TOSO, E. A. V. ; MORABITO, R. ; CLARK, A. R. . Combinação de abordagens GLSP e ATSP para o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção de suplementos para nutrição animal. *Pesquisa Operacional*, v. 28, p. 423-450, 2008.