

OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA VIA UMA SUAUIZACÃO DO ESO EM PROBLEMAS DA ELASTICIDADE PLANA

A SMOOTHING EVOLUTIONARY STRUCTURAL OPTIMIZATION PROCEDURE APPLIED TO PLANE STRESS PROBLEMS

Hélio Luiz Simonetti¹, Francisco de Assis das Neves² e Valério S. Almeida³

^{1,2,3}Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto

Campus Morro do Cruzeiro, Bauxita, 35400-000, Ouro Preto - MG – Brasil

E-mail: heliosimonetti@ig.com.br / fassis@em.ufop.br / valerio@em.ufop.br

RESUMO

O artigo aborda a otimização topológica em problemas de elasticidade plana linear considerando a minimização do volume com restrição de tensão e empregando um índice de performance como monitoramento para o encontro da região de ótimo. Utiliza-se para este fim o método clássico da otimização evolucionária estrutural, ou ESO - Evolutionary Structural Optimization. Este procedimento de otimização baseia-se na retirada sistemática e gradativa dos elementos com menores tensões em comparação com a tensão máxima da estrutura, procedimento também conhecido como um processo *hard-kill*. Propõe-se neste trabalho uma variante do método ESO, denominado de SESO - Smoothing ESO, cuja filosofia se baseou na observação de que, se o elemento não for realmente necessário à estrutura, naturalmente sua contribuição de rigidez vai diminuindo progressivamente, até que ele não tenha mais influência, isto é, sua remoção é feita de forma suave, atenuando os valores da matriz constitutiva do elemento, como se este estivesse em processo de danificação. Define-se também o índice de performance para o monitoramento deste processo evolucionário suavizado. As aplicações do ESO e do SESO são feitas com o método dos elementos finitos, mas considerando um elemento finito triangular e de alta ordem. Por fim, implementou-se um filtro espacial em termos de controle de tensão, o qual, associado à técnica SESO, se mostrou ser bastante estável e eficiente na eliminação da formação do tabuleiro.

Palavras-chave: Otimização evolucionária topológica. Método dos elementos finitos. Formulação livre. Elemento finito triangular.

ABSTRACT

Topological optimization problems based on the stress criteria are solved using two techniques in this paper. The first technique is the conventional Evolutionary Structural Optimization (ESO), which is known as the “hard kill”, since the material is discretely removed; that is, the elements under low stress that are being inefficiently utilized have their constitutive matrix suddenly reduced. The second technique, proposed in this paper, is called Smoothing ESO (SESO) – which is based on the philosophy that if an element is not really necessary for the structure, naturally its contribution to the structure’s stiffness will gradually diminishing until it no longer any influence in the structure, that is, their removal is done smoothly. This procedure is known as “soft-kill”; that is, not all the elements removed in the structure using the criterion ESO are discarded. Thus the elements returned to the structure must provide a good conditioning system that will be resolved in the next iteration and because of this, are considered important for the optimization process. To the investigation and validation of the implemented techniques, classic examples of bi-dimensional elasticity were evaluated on a benchmark scale as described in literature.

Keywords: Topological optimization. Evolutionary structural optimization ESO. Finite element method. Free formulation. Triangular finite element.

1. INTRODUÇÃO

A otimização topológica (OT) é um campo de pesquisa da engenharia que tem o objetivo de projetar a topologia ótima de estruturas segundo determinado conjunto de critérios de projeto, podendo ser a procura do menor peso da estrutura, ou a restrição a um dado valor limite de tensão, deslocamento ou de frequência do projeto.

A OT é um tema recente no campo da otimização estrutural. Entretanto, os conceitos básicos que dão suporte teórico ao método foram estabelecidos há mais de um século, conforme Rozvany et al. (1995). A grande vantagem da OT em contraste com os métodos tradicionais de otimização, como a otimização de forma ou a otimização paramétrica, é que esses métodos não são capazes de alterar o leiaute da estrutura original; assim, não auxiliam o projeto conceitual da estrutura. Dessa forma, a aplicação da OT tem se mostrado um caminho profícuo de pesquisas ligadas a projetos de interesse de indústrias, uma vez que facilita a moldagem de materiais sob certas condições de projeto.

Os métodos de OT buscam a solução ótima através da variação do domínio, isto é, topologia da estrutura e, no que diz respeito a estruturas contínuas, são divididos em duas grandes classes de abordagens, conforme Eschenauer e Olhoff (2001): a abordagem micro, ou baseada no material, e abordagem macro, ou baseada na geometria.

A abordagem micro trata da existência de uma microestrutura porosa, que define as relações constitutivas do material em função da sua geometria e da densidade volumétrica de uma célula unitária representativa do material, que, por sua vez, é representada por variáveis contínuas, sucessivamente distribuídas, no espaço do domínio fixo estendido, que consiste numa região do espaço onde pode existir a estrutura. (STUMP, 2006). Um exemplo para este grupo é o método SIMP (Simple Isotropic Material with Penalization). (BENDSØE, 1989; ROZVANY et al., 1992).

Na abordagem macro, a topologia da estrutura é modificada mediante a inserção de furos no domínio. Como exemplo deste grupo de OT se pode citar o ESO (Evolutionary Structural Optimization), que é baseado no cálculo da função objetivo quando um elemento é removido da malha de elementos finitos, e TSA (Topological Sensitivity Analysis), baseado em uma função escalar, denominada derivada topológica, que fornece para cada ponto do domínio de definição do problema a sensibilidade da função custo quando um pequeno furo é criado. (LABANOWSKI et al., 2004).

Além desses métodos, têm-se aplicado na resolução de problemas de OT as técnicas estocásticas, com destaque para o uso do algoritmo genético (KANE et al., 1995; KAWAMURA et al., 2002; KRISHNAMOORTHY et al., 2002; LAGAROS et al., 2002), e a técnica do *simulated annealing* (KIRKPATRICK et al., 1983). Entretanto, a principal desvantagem dessas técnicas aplicadas na OT é a busca da região ótima quando está associado à otimização de centenas ou até milhares de parâmetros, o que aumenta exponencialmente o tempo de processamento, muitas vezes inviabilizando sua aplicação.

Dentre os trabalhos mais aplicados na OT, o ESO tem se destacado por ser um método heurístico com formulação simples, a qual é baseada na observação na natureza, de fácil inserção dentro de um código computacional clássico do MEF, sem intrincadas manipulações matemáticas e de fácil adição de novas restrições ao projeto, mas o ESO tem levado a uma condição topológica ótima.

Nesse contexto, este artigo apresenta uma variante do método ESO, denominado de SESO, por se aplicar um procedimento de suavização do ESO e, em adição, ao invés de se usar uma malha estruturada com elementos finitos quadrilaterais, o que é comum, empregam-se elementos finitos triangulares de alta ordem, permitindo a geração de malhas não estruturadas e, assim, facilitando geometrias mais complexas. São apresentados alguns exemplos clássicos obtidos na literatura que demonstram que o procedimento desenvolvido é robusto e genérico.

2 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA (ESO)

O método ESO foi desenvolvido a partir de observações das estruturas na natureza, tais como ossos, árvores e conchas, numa tentativa de se analisar como essas estruturas adquiriram forma ao longo do processo de evolução natural. Assim, Xie e Steven (1993) desenvolveram uma maneira bem simples de impor modificações na topologia da estrutura, feita mediante heurística de remoção gradual e sistemática de elementos finitos da malha, correspondentes a regiões que não contribuem efetivamente para a boa performance da estrutura.

Define-se, inicialmente, uma malha de elementos finitos que circunscreva toda a estrutura, ou domínio de projeto, de forma a incluir as condições de contorno em forças e deslocamentos, cavidades e demais condições iniciais de projeto. Em um processo iterativo, avaliam-se os parâmetros de interesse de otimização, neste artigo, em especial, a diminuição da massa mediante um critério de tensão máxima da estrutura. Assim, avaliam-se as tensões de cada elemento conforme o uso da inequação:

$$\sigma_e^{vm} < RR \cdot \sigma_{max}^{vm} \quad (1a)$$

$$RR_{i+1} = RR_i + RE \quad i = 0,1,2,3,\dots \quad (1b)$$

com σ_e^{vm} e σ_{max}^{vm} sendo, respectivamente, as tensão principais de Von Mises do elemento “e” e máxima da estrutura na iteração efetiva “i”; RR é um fator denominado de razão de rejeição.

Em cada iteração, os elementos que satisfaçam à inequação (1a) são retirados da estrutura (Figura 1). O fator RR é aplicado para controlar o processo da remoção da estrutura ($0,0 \leq RR \leq 1,0$). O mesmo ciclo de remoção dos elementos usados pela desigualdade (1a) é repetido até que não haja mais elementos que satisfaçam mais a esta inequação (1a). Quando essa situação ocorre, um estado de equilíbrio é alcançado. O processo evolucionário é definido adicionando-se a RR uma razão de evolução (RE). Assim, um novo ciclo de evolução inicia-se, até que não existam mais elementos a serem eliminados com esta nova RR. A RR será atualizada conforme a equação (1b), até a obtenção de uma configuração otimizada, alcançada pelo controle de um parâmetro de performance, denominado de índice de performance (PI). Este procedimento também é conhecido como um método *hard-kill* e pode ser interpretado como segue:

$$D_i(j) = \begin{cases} D_0 & \text{se } j \in G_i \\ 0 & \text{se } j \in \bar{G}_i \end{cases} \quad (2)$$

onde $D_i(j)$ é a matriz constitutiva do elemento $j \in \Omega$ na i-ésima iteração; D_0 é a matriz constitutiva inicial do projeto; $W = G_i + \bar{G}_i$ é o domínio da estrutura e $G_i = \{W / (s_e / s_{VM}^{MAX}(W))^3 \cdot RR_i\}$ é o conjunto dos elementos que não serão removidos da estrutura (sólido); $\bar{G}_i = W - G_i = \{W / (s_e^{VM} / s_{VM}^{MAX}(W)) < RR_i\}$ é o conjunto dos elementos que serão removidos da estrutura (vazio), todos na i-ésima iteração.

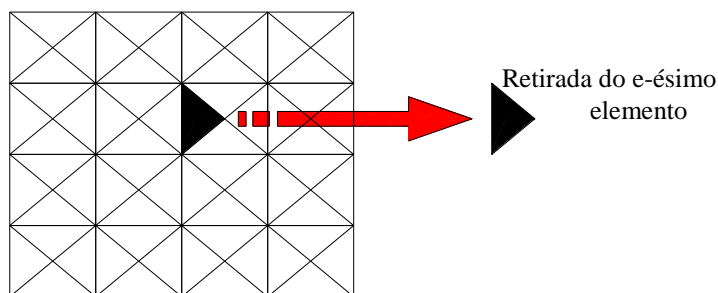


Figura 1 – Algoritmo Evolucionário: baseado na retirada de elemento da malha.

3 SUAUIZAIÃO DA OTIMIZAIÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA (SESU)

Pode-se aplicar sobre o método ESO uma condiçãu de relaxaçãu, ou de suavizaçãu do ESO, apresentando assim um procedimento (*soft-kill*), de modo que o material, ou seja, os elementos que deveriam ser removidos pelo critério ESO - seguindo a inequaçãu (1a) - sãu organizados em n grupos e alocados em ordem crescente de tensões, sendo ponderados segundo uma funçãu $0 \leq \eta(j) \leq 1$.

Assim, p% desses n grupos sãu removidos, os grupos que contêm os elementos com menores tensões (domínio G_{LS}), e os grupos (1-p%) sãu devolvidos à estrutura, domínio G_{GS} . Esta remoçãu e devoluçãu de elementos à estrutura pode ser feita por uma funçãu, linear ou hiperbólica, que pondera a razãu $\sigma_e^{VM} / \sigma_{VM}^{MAX}$ dentro do domínio $\bar{\Gamma}$, isto é, permite que elementos que tenham sua tensões próximas e abaixo da tensãu máximu, σ_{VM}^{MAX} sejam reintegrados à estrutura a cada iteraçãu, o que proporciona um melhor condicionamento do novo sistema de equaçãus e a diminuicãu da formaçãu do “tabuleiro de xadrez”, quando comparado ao ESO, porque esses elementos sãu importantes para a estrutura, nãu devendo ser eliminados ainda nesta iteraçãu.

O procedimento *soft-kill* usado no SESU pode ser interpretado assim:

$$D_i(j) = \begin{cases} D_0 & \text{if } j \in G_i \\ D_0 \times \eta_j(\bar{\Gamma}) & \text{if } j \in G_{GS_i} \\ 0 & \text{if } j \in G_{LS_i} \end{cases} \quad (3)$$

onde $\bar{\Gamma} = G_{LS_i} + G_{GS_i}$ é o domínio dos elementos que atendem à inequaçãu (1a); G_{LS_i} é o domínio dos elementos que devem ser excluídos efetivamente; G_{GS_i} o domínio dos elementos que sãu devolvidos à estrutura; $0 \leq \eta_j(\bar{\Gamma}) \leq 1$ é funçãu reguladora que pondera o valor da razãu $\sigma_e^{VM} / \sigma_{VM}^{MAX}$ dentro do domínio $\bar{\Gamma}$ e pode eliminar o problema do “tabuleiro de xadrez”, tudo dentro da iteraçãu “i”. Veja-se esquema da Figura 2.

A suavizaçãu proposta pode ser realizada através de $\eta(\bar{\Gamma})$ usando uma funçãu linear do tipo $\eta(\bar{\Gamma}) = \alpha j + \beta$, uma funçãu trigonométrica do tipo $\eta(\bar{\Gamma}) = \text{sen}(\alpha j)$, pois essas funçãus sãu contínuas, portanto, diferenciáveis em todo o domínio $\bar{\Gamma}$ e têm imagem variando de 0 a 1.

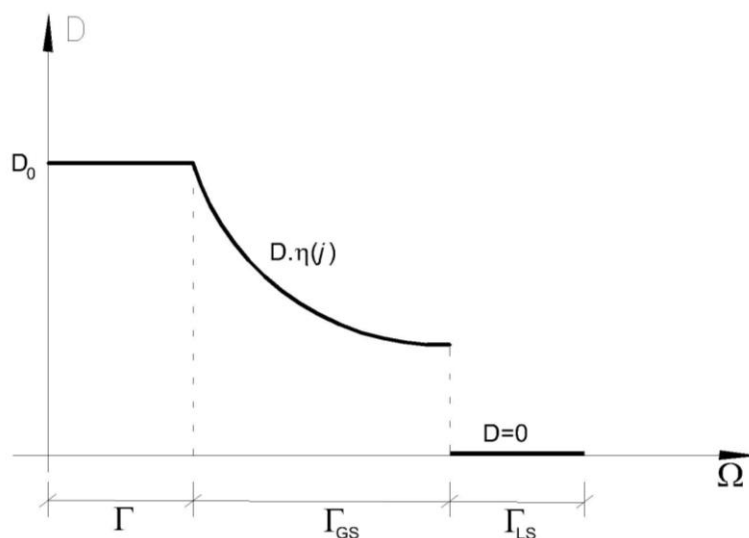


Figura 2 – Ilustra o valor da matriz constitutiva de cada grupo do domínio, iteração “i”

4 FILTRO ESPACIAL PARA O ELEMENTO FINITO TRIANGULAR

Constata-se que, quanto mais discretizado o domínio inicial do projeto, melhor o contorno da topologia ótima, além de descrever melhor o campo de deslocamentos e, conseqüentemente, o campo das deformações e tensões. Entretanto, o aumento desta discretização no domínio inicial do projeto, em conjunto com o uso de elementos finitos triangulares e de baixa ordem, provoca o aumento da formação do “tabuleiro de xadrez”.

Para tentar diminuir a formação deste tabuleiro empregou-se neste artigo um elemento finito não conforme de alta ordem, um elemento de membrana triangular com graus de liberdade rotacionais desenvolvido mediante a formulação livre, descrito por Bergan e Felippa (1985), mas cuja convergência é garantida por atender ao “teste do elemento individual”, proposto por Bergan e Hanssen (1975).

Além disso, desenvolveu-se um filtro espacial de tensão que tem o objetivo de diminuir a formação do tabuleiro. Este filtro suaviza a distribuição espacial das variáveis de projeto ao longo do domínio inicial e minimiza, também, a dependência da malha de elementos finitos, permitindo o controle da complexidade da topologia.

O parâmetro de controle do filtro é o raio de abrangência e, quanto maior for o raio, maior será a suavização da distribuição das tensões de Von Mises do elemento central no interior do domínio inicial. Porém, não se deve usar um valor pequeno, pois corre-se o risco de voltar ao problema da formação do “tabuleiro de xadrez”, e não se deve usar um valor grande, uma vez que culmina numa quantidade muito grande de elementos para calcular as tensões intermediárias de Von Mises, já que esta é calculada observando-se a distância entre os centroides do elemento central e os vizinhos de nós e arestas e os elementos cujos centroides estiverem dentro do círculo de raio r . Além disso, pode-se extrapolar o domínio de projeto e o algoritmo não consegue buscar a solução ótima (Figura 3).

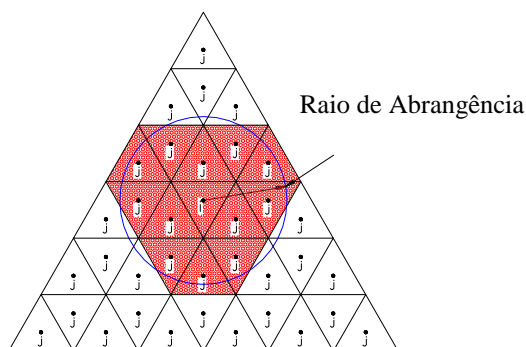


Figura 3 – Elemento central i sofrendo influencia dos elementos vizinhos dentro de um círculo de raio r

O modo como a tensão do elemento i sofre influência das tensões dos elementos j dentro de uma circunferência raio r é dada pela equação:

$$\sigma_i^{\text{ponderado}} = \frac{\sigma_i^{\text{vm}} \cdot A_i + \bar{w} \cdot \sum_j^{\text{NE}} \sigma_j^{\text{vm}} \cdot A_j}{A_i + \bar{w} \cdot \sum_j^{\text{NE}} A_j} \quad (4)$$

Onde o termo $\sigma_i^{\text{ponderado}}$ é a tensão de Von Mises ponderado do elemento “i”, que inicialmente apresenta tensão de Von Mises σ_i^{vm} , A_i é a área deste elemento “i”, A_j área do elemento “j” e σ_j^{vm} é a tensão de Von Mises do elemento “j”. O peso \bar{w} é dado pela equação:

$$\bar{w} = \frac{\sum_{j=1}^{\text{NE}} w_j}{\text{NE}} \quad (5)$$

onde:

$$w_j = \frac{R_{\text{max}} - R_{ij}}{R_{\text{max}}} \quad (6)$$

Na equação 5, NE representa o número de elementos finitos cujos centroides estão no interior da circunferência de raio de abrangência R_{max} . Na equação 6, R_{ij} é a distância entre os centroides dos elementos “i” e “j”. Assim, mesmo que haja um refinamento da malha, mas o raio seja mantido, a região delimitada pelo círculo será a mesma, agora com mais elementos triangulares que influenciam a tensão do elemento central. Isso justifica a redução da dependência da solução com relação ao nível de discretização da malha de EF; adicionalmente, é possível diminuir também a instabilidade de tabuleiro.

Em termos matemáticos, os filtros espaciais são uma restrição adicional à formulação do problema de otimização. Com o aumento do raio, os gradientes ficam restritos a valores menores; logo, a transição entre sólido (material) e vazio (sem material) torna-se mais suave, gerando mais elementos com tensões intermediárias. Percebe-se, fortemente, a sensibilidade da formulação do elemento finito utilizado à escolha do raio de abrangência, quando este assume um valor muito

grande, pois os gradientes das variáveis de projeto podem ficar restritos a taxas de variações bem pequenas, tais que o problema de otimização pode não ter solução para a condição inicial proposta.

5. INDICE DE PERFORMANCE PARA O SESO

O índice de performance (PI) é um parâmetro adimensional desenvolvido para controlar a retirada evolucionária dos elementos no processo iterativo, de forma a monitorar a razão entre o volume inicial e na iteração atual, quantificando as mudanças no volume e nos níveis de tensão máxima do processo de otimização. Mede a eficiência da topologia em cada iteração identificando o instante em que a estrutura atinge seu ótimo topológico. (LIANG, 2005).

É definido como sendo inversamente proporcional ao volume atual da estrutura e seu equacionamento parte da minimização do peso da estrutura, dado por:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } W(\mathbf{W}) &= \sum_j^{NE} W_j & (7) \\ \text{sujeito a } s_{j,\max}^{vm} - s^{projeto} &\leq 0 \end{aligned}$$

Adota-se o peso ótimo de projeto na iteração inicial por:

$$W_0^s = \frac{\alpha_{0,\max}^{vm}}{\alpha_{projeto}^{vm}} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} W_0 \quad (8)$$

E na iteração i:

$$W_i^s = \frac{\alpha_{i,\max}^{vm}}{\alpha_{projeto}^{vm}} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_i} W_i \quad (9)$$

Define-se o índice de performance como a razão entre o peso de projeto ótimo do projeto inicial sobre o peso ótimo na iteração i, ou seja:

$$PI = \frac{W_0^s}{W_i^s} = \frac{\alpha_{0,\max}^{vm}}{\alpha_{i,\max}^{vm}} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_i} \frac{W_0}{W_i} = \frac{\alpha_{0,\max}^{vm}}{\alpha_{i,\max}^{vm}} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_i} r_0 \frac{V_0}{r_i V_i} = \frac{\alpha_{0,\max}^{vm}}{\alpha_{i,\max}^{vm}} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_i} \frac{V_0}{V_i} \quad (10)$$

sendo r_0 , r_i os pesos específicos, e V_0 e V_i os volumes na primeira e i-ésima iteração. Pela expressão (10), minimizar o volume na i-ésima iteração equivale a maximizar o índice PI, e sabendo-se que para o estudo de problemas de estado plano de tensões a influência da espessura é diretamente proporcional à matriz constitutiva, a suavização aplicada pela equação (3) pode ser empregada à espessura, resultando em:

$$PI = \frac{\alpha_{0,\max}^{VM} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} \sum_{j=1}^{NE} A_0 t_j}{\alpha_{i,\max}^{VM} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_i} \sum_{j=1}^{NE} A_j t_j} = \frac{\alpha_{0,\max}^{VM} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} \sum_{j=1}^{NE} A_0 t_{j_0}}{\alpha_{i,\max}^{VM} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_i} \sum_{j=1}^{NE} A_j t_j h(j)} \quad (11)$$

de modo que o controle do ótimo é feito por este índice de performance.

6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Apresentam-se a seguir três exemplos numéricos, nos quais os parâmetros dos métodos empregados foram os mesmos, a saber: RR = 1%, ER = 2%, o emprego do grupo de 20%, a função reguladora dada por $h(j) = 10^{-2}$, os coeficientes da formulação livre do elemento finito são alfa de 1,5 e beta de 0,5. Empregou-se o índice de performance (PI) como critério de parada.

6.1. Exemplo 1

Este exemplo, retirado de Kim et al. (2002), é de uma viga curta em balanço, onde o módulo de elasticidade longitudinal é dado por $E = 210$ GPa, o coeficiente de Poisson de 0,3, e sua espessura de 1 mm.

Kim et al. (2002) avaliam este exemplo usando o ESO, inserindo uma metodologia em conjunto denominada de ICC (*intelligent cavity creation*), que é o controle da criação das cavidades ao longo do processo iterativo, mas seu critério de parada é realizado em termos de controle de volume final. Utiliza duas densidades de elementos finitos quadrangulares.

Empregam-se três densidades de malhas de elementos finitos triangulares, indicados na Tabela 1.

Na Figura 5 apresenta-se a configuração ótima final obtida por Kim et al. (2002) e, na Figura 6, compara-se este leiaute com o obtido na presente formulação para o mesmo volume final. Destaca-se que Kim et al. (2002) obtêm valores apenas para os volumes indicados, não conseguindo chegar aos volumes finais indicados nas figuras 7 e 8 com a presente formulação. Nota-se que as malhas otimizadas obtidas pelo SESO apresentam menos a formação de “tabuleiro de xadrez” que as obtidas pelo ESO, conforme as figuras 7 e 8.

Na Figura 9 nota-se que o índice de performance de ambas as formulações apresenta uma queda brusca nas iterações 120 e 155, respectivamente, para o ESO e SESO. Esses pontos são os volumes mínimos obtidos de 15% e 18%, otimizados sem a estrutura se transformar em membros hipostáticos, ou seja, onde há esta queda brusca de PI sabe-se que é a topologia otimizada alcançada no processo evolucionário.

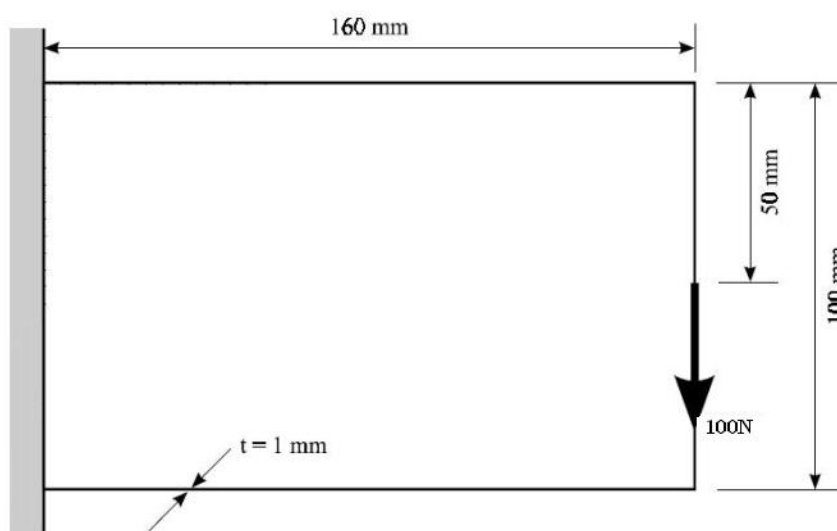


Figura 4 – Esquema da viga curta e balanço

Tabela 1 – Valores de volume final e tempo de processamento para as diversas análises

Qte de elementos	Método	Volume Final (% V_0)	Tempo (min)
5120	ESO	43,5	1,4
5120	SESO	42,7	2,2
11520	SESO	44,0	12
2560*	Kim et al.(2002)	43,6	não indicado
7840*	Kim et al.(2002)	37,2	não indicado

* Elementos quadrados

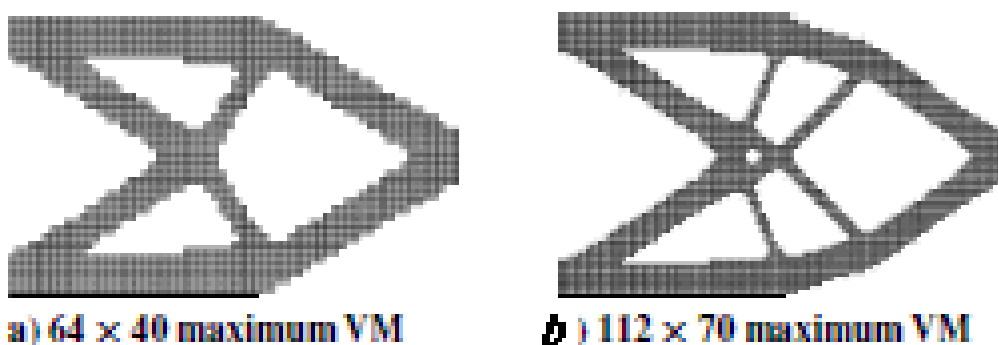


Figura 5 – a) configuração ótima obtida por Kim et al. (2002) para 2560 elementos b) configuração ótima obtida por Kim et al. (2002) para 7840 elementos



Figura 6 - configuração ótima obtida usando SESO para 11520 elementos triangulares, $V = 0,44 V_0$

O gráfico a seguir, Figura 7, indica as características da performance da estrutura otimizada, além de medir o sucesso desta otimização. Nota-se que a região acima da curva é uma região viável, mas a estrutura feita com este material será superdimensionada. A região abaixo da curva é uma região não viável, pois o material utilizado violará a restrição de tensão imposta no processo de otimização. Assim, a região sobre a curva é a região que atende às condições de ótimo proposta para a estrutura.

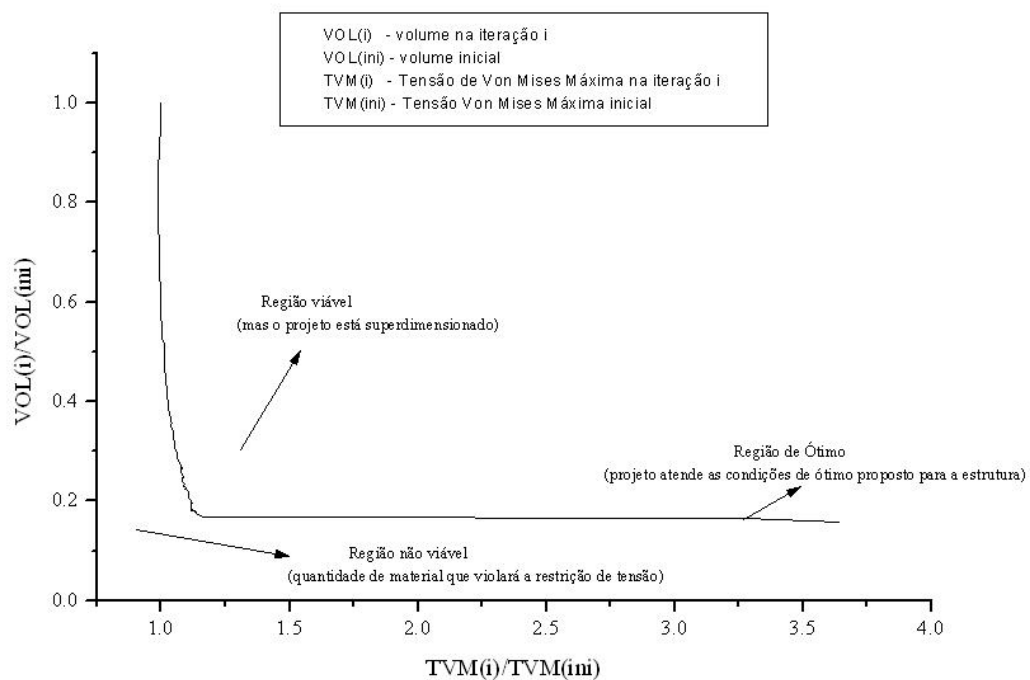


Figura 7 – Curva característica de performance para estruturas com restrição de tensão, para a malha de 11520 elementos

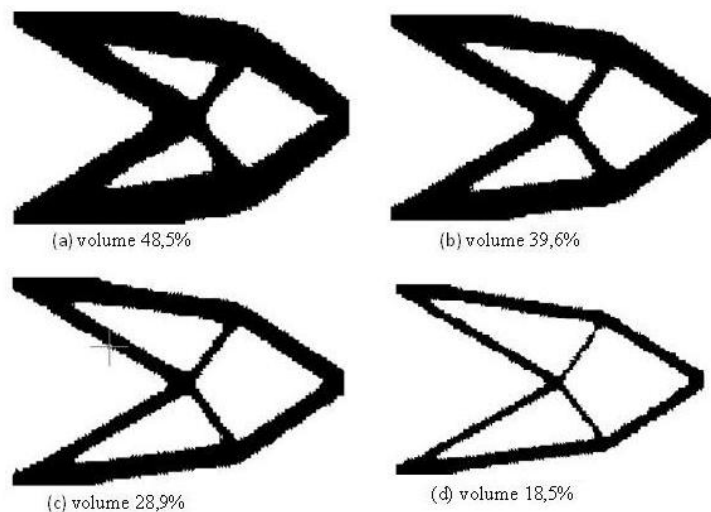


Figura 8 Diversas topologias ótimas obtidas para o SESO, impondo restrição de volume – 11520 elementos.

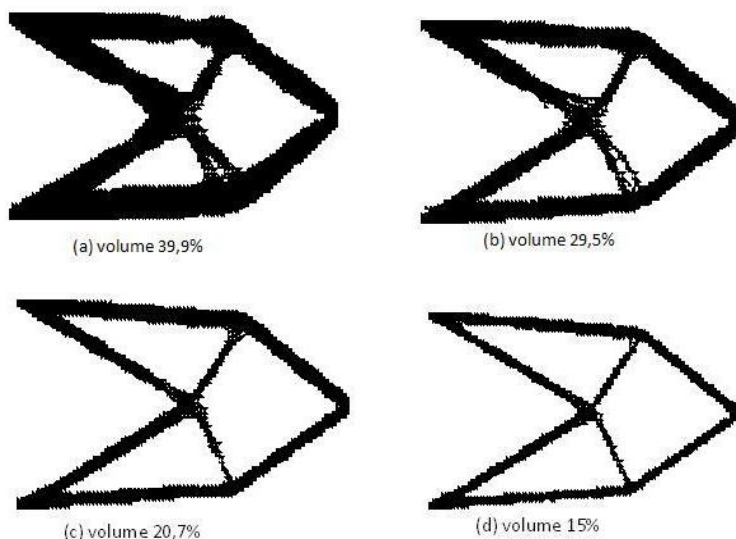


Figura 9 – Diversas topologias ótimas obtidas para o ESO, impondo restrição de volume – 11520 elementos.

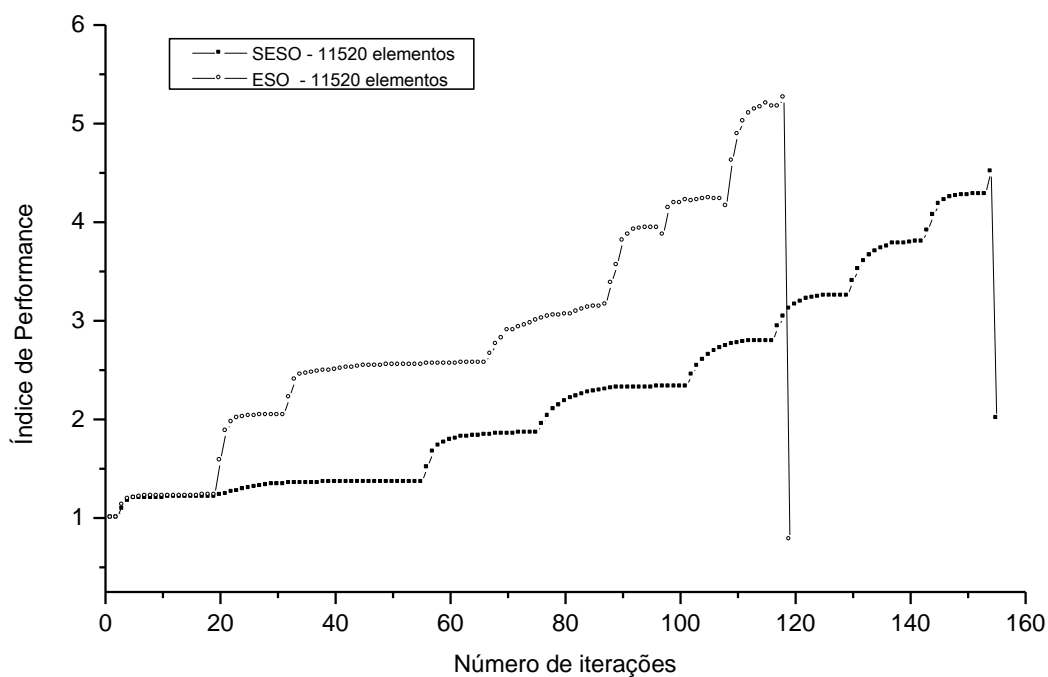


Figura 10 – Gráfico do índice de performance versus número de iteração, para o ESO ($V = 0,15 V_0$) e SESO ($V = 0,18 V_0$), com 11520 elementos

6.2 Exemplo 2

A viga possui a geometria indicada na Figura 11, com $E = 200 \text{ GPa}$, o coeficiente de Poisson de $0,3$ e sua espessura de 1 mm . O exemplo, retirado de Liang et al. (1999), é de uma viga curta em balanço. Na Figura 12a é apresentada a topologia ótica obtida pelo autor com o uso do ESO e com 2304 elementos quadrangulares e, nas figuras 12b e 12c, apresentam-se as respostas obtidas com a presente formulação, usando o SESO com 4608 elementos finitos e com um tempo de processamento de 4 min , enquanto o ESO teve um custo computacional de 5 min .

Destaca-se que o PI obtido por Liang et al. (1999) foi de 10,86 e o obtido neste artigo, de 10,85 e 10,83 para, respectivamente, o método ESO e sua variante SESO, demonstrando muito boa concordância neste aspecto também, mesmo para diferenças de metodologias e de elementos finitos serem distintas.

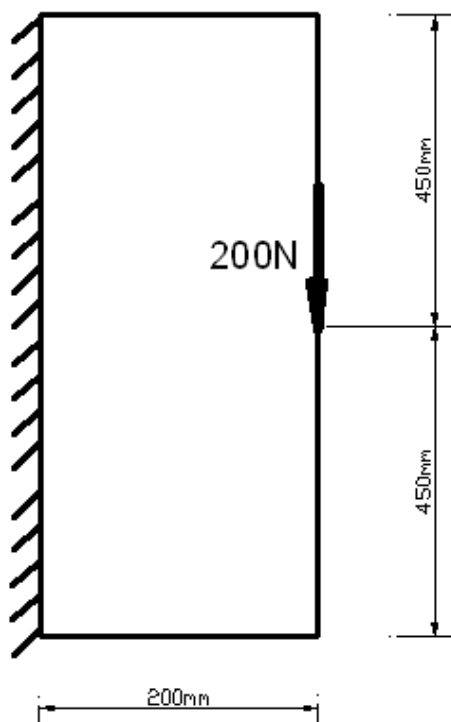


Figura 11 – Esquema da viga em balanço, geometria e carga

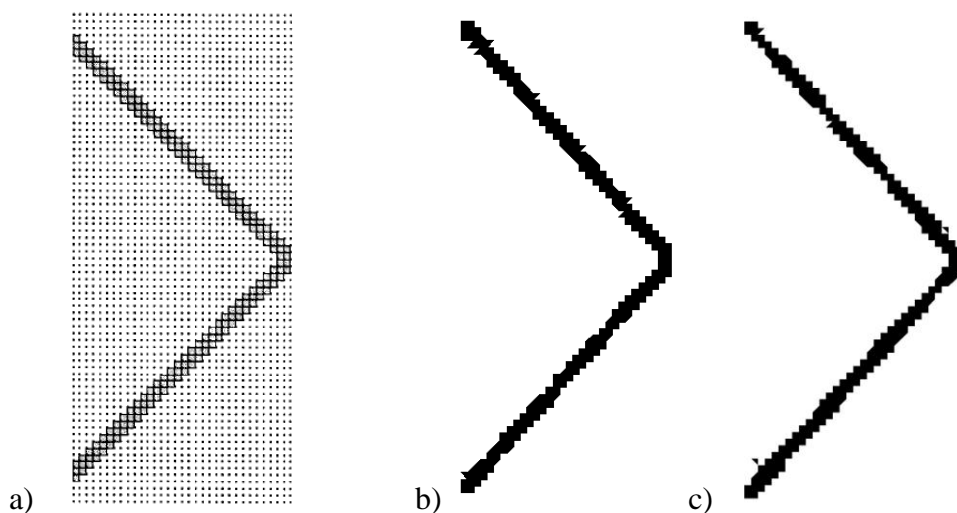


Figura 12 – Topologia ótima obtida por (a) Liang et al. (1999); b) SESO - presente formulação c) ESO - presente formulação

6.3 Exemplo 3

Neste exemplo o console é projetado para suportar uma carga de 500 KN, conforme ilustrado na Figura 13. A estrutura está engastada nas extremidades. As propriedades do material são coeficiente de Poisson de 0,15, módulo de elasticidade $E = 28567$ MPa e espessura de 25mm. O

exemplo é retirado de Liang et al. (2000), e na figura 14 é apresentado o histórico da topologia ótima obtida pelo autor.

Na Figura 15 é apresentado um histórico da topologia ótima obtida com a formulação usada neste artigo para otimização topológica via SESO e ESO com 22656 elementos finitos triangulares, com um custo computacional de uma 1h e 7min para o SESO, enquanto o ESO teve um tempo de processamento igual a 40min.

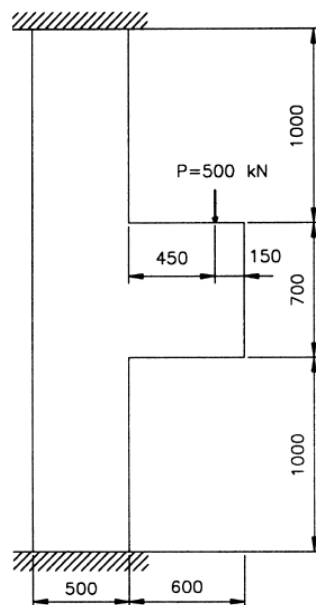


Figura 13 – Console - Liang et al. (2000)

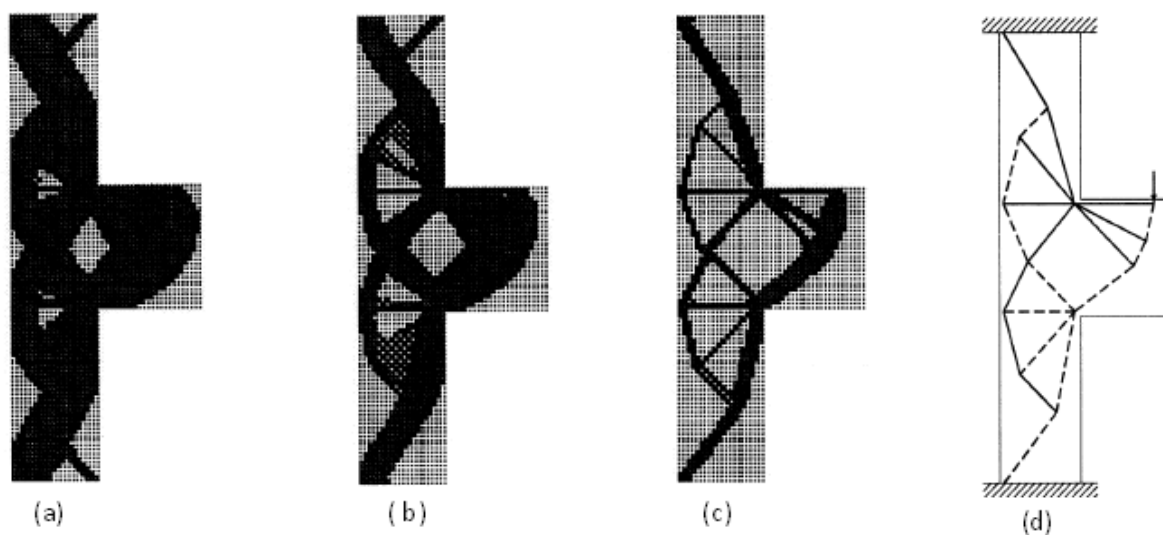


Figura 14 – Histórico da otimização topológica proposto por Liang et al. (2000):
(a) topologia na iteração 20, (b) topologia na iteração 40,
(c) topologia ótima, (d) modelo *strut-and-tie* ótimo

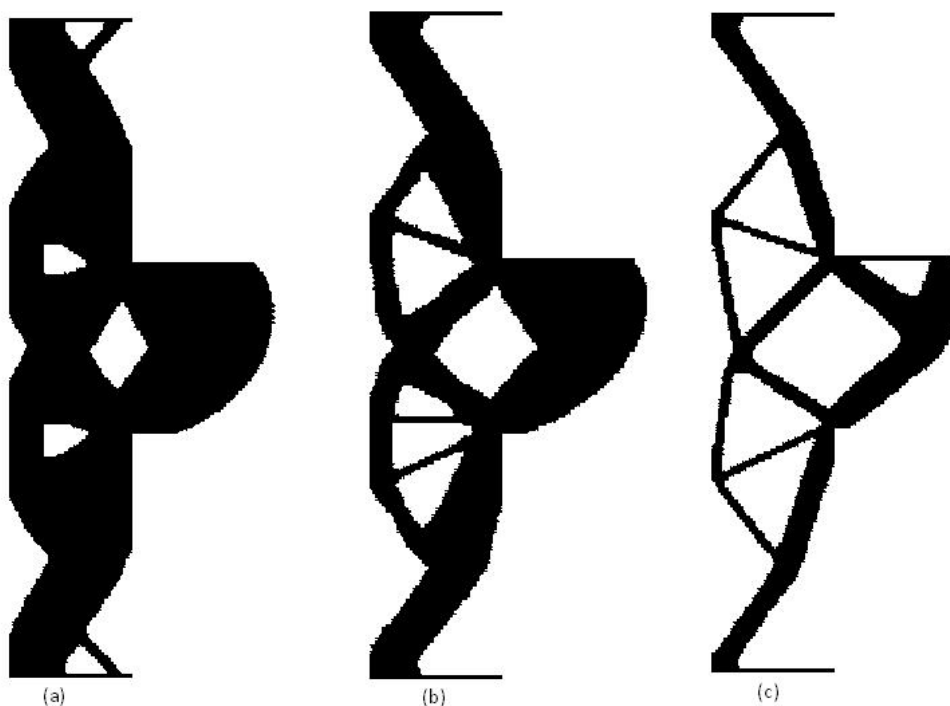


Figura 15 – Histórico da otimização topológica proposto neste trabalho via SESO:
(a) topologia na iteração 103, (b) topologia na iteração 192
(c) topologia ótima

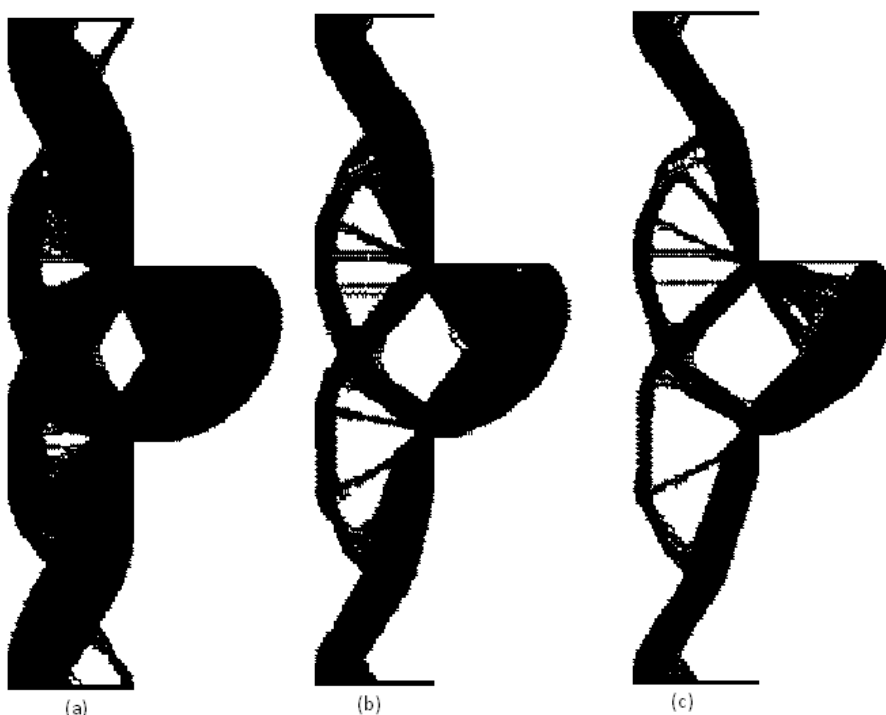


Figura 16 – Histórico da otimização topológica proposto neste trabalho via ESO:
(a) topologia na iteração 70, (b) topologia na iteração 132; (c) topologia ótima

Destaca-se que o PI obtido por Liang et al. (2000) foi de 1,34 e o obtido neste artigo, de 3,31 para o SESO e 2,18 para o ESO. Constata-se que o PI máximo de 2,18 para o ESO determinou a topologia ótima da estrutura com um volume de 45,5%, pois na iteração seguinte o PI torna-se menor que um; então, a estrutura não é viável para projeto. No procedimento de otimização usando a técnica SESO, verifica-se que o PI de 2,18 também é encontrado no mesmo volume de 45,5% do

volume inicial, mas, em virtude da sua suavização, o desempenho da estrutura não fica comprometido e o ótimo é alcançado com um volume de 30% do inicial, instante em que seu PI é máximo.

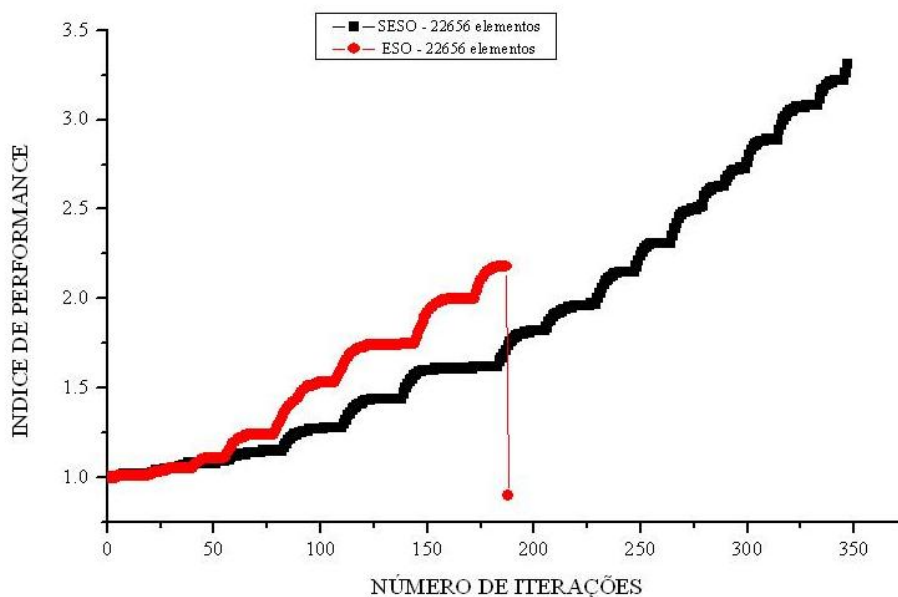


Figura 17 - Gráfico do índice de performance versus numero de iteração, para o ESO ($V = 0,45 V_0$) e SESO ($V = 0,30 V_0$), com 11520 elementos

7. CONCLUSÃO

O procedimento proposto neste trabalho para otimização topológica de estruturas bidimensionais usando uma variante do método clássico ESO, que aqui fora denominado de SESO, mostrou-se eficiente e apto a capturar o comportamento evolucionário e a determinar a forma ótima sobre critério de tensão máxima da estrutura com restrições de volume.

Na otimização topológica via ESO para melhor calibração dos parâmetros RR e ER devem-se realizar testes numéricos preliminares, pois elevados valores de RR e ER provocam singularidade à estrutura. Esta calibração não é relevante à técnica SESO, como notado em alguns exemplos usando o método ESO.

Tanto no ESO quanto no SESO, quanto mais discretizada for a malha, mais membros podem aparecer na sua configuração ótima, mostrando que em alguns exemplos existe uma grande dependência da malha de elementos finitos; entretanto, a técnica SESO é menos sensível a esta discretização.

O SESO apresenta, em geral, um custo computacional mais baixo. No entanto, no exemplo 3, o tempo do SESO foi maior que o do ESO. Isso se deve ao fato de que a suavização no campo das tensões permite uma retirada maior de elementos do que na técnica ESO. Assim, mesmo exigindo mais passos de RR devido a sua heurística de remoção de elementos, a técnica SESO mostrou-se mais eficiente computacionalmente.

Os problemas de instabilidade numérica “tabuleiro de xadrez” e da dependência da malha foram resolvidos com implementação de um filtro de densidade de tensão. Entretanto, o parâmetro de controle deste filtro é o raio de abrangência, que não deve ser muito pequeno, pois se corre o risco de voltar ao problema do tabuleiro, nem deve ser muito grande, já que extrapolaria o domínio de projeto e o algoritmo não consegue buscar uma solução ótima. O ESO, mesmo com o filtro em alguns exemplos, apresentou o tabuleiro, ao passo que o SESO não apresentou em nenhum exemplo este problema.

Por fim, a formulação do índice de performance para o caso do uso do SESO demonstrou ser adequada para o monitoramento da região ótima de projeto, em virtude dos resultados obtidos.

8. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação Gorceix e à Universidade Federal de Ouro Preto pelo financiamento deste trabalho.

9. REFERÊNCIAS

BENDSØE, M.P. Optimal Shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, v. 1, pp. 193-202, 1989.

BERGAN, P.G.; FELIPPA, C.A. A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Comp. Meths. in Appl. Mech. Eng.*, v.50, p.25-69, 1985.

BERGAN, P.G.; HANSSEN, L. A new approach for deriving “good” finite elements, MAFELAP II Conference, Brunel University, 1975. In: WHITEMAN, J. R. (Ed.). *The mathematics of finite elements and applications*. London: Academic Press, 1976. p.483-498

ESCHENAUER, H. A.; Olhoff, N. Topology optimization of continuum structures. *Applied Mechanic Review*, v.54, n.4, p. 331-390, 2001.

KANE, C.; JOUVE, F.; SCHOENAUER, M. Structural optimization in linear and nonlinear elasticity using genetic algorithms. In: ASME DESIGN AUTOMATIC CONFERENCE, 21st. Boston, MA, 1995.

KAWAMURA, H.; OHMORI, H.; KITO, N. Truss topology optimization by a modified genetic algorithm. *Structre and Multidisciplinary Optimization*, v. 23, p. 467-472, 2002.

KIM, H. et al. Determination of an optimal topology with a predefined number of cavities. *AIAA Journal*, v. 40, n. 4, Apr. 2002.

KIRKPATRICK, S. ; GELATT Jr., C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing, *Science*, v. 220, n. 4598, p. 671-680, 1983.

KRISHNAMOORTHY, P.; PRASANNA, P.V.; SUDARSHAN. Objected-oriented framework for genetic algorithms with application to space truss optmimization. *Journal of Computing in Civil Engineering*, v. 16, 2002.

LABANOWSKI, A. et al. ESO e TSA: uma análise comparativa de métodos de otimização topológica para elasticidade In: CILAMCE, XXV. 2004; Recife. *Proceedings ...*, 2004.

LAGAROS, M.; PAPADRAKAKIS, M.; KOKOSSALAKIS, G. Structural optimization using evolutionary algorithms. *Computers and Structures*, v. 80, p. 571-589, 2002.

LIANG, Q.Q. Performance-based optimization of structures: theory and applications. London: Spon Press, 2005.

LIANG, Q.Q.; XIE, Y.M.; STEVEN, G.P. Optimal selection of topologies for the minimum-weight design of continuum structures with stress constraints. *Proc Instn Mech Engrs, Part C*, v. 213, p. 755-762, 1999.

LIANG, Q.Q.; XIE, Y.M.; STEVEN, G.P. Topology optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures using an evolutionary procedure. *ACI Structural Journal*, v. 97, n. 2, p. 322-330, 2000.

ROZVANY, G.I.N.; BENDSØE, M.P.; KIRSCH, U. Layout optimization of structures. *Applied Mechanics Review*, v. 48, p. 41-119, 1995.

ROZVANY, G.I.N.; ZHOU, M.; BIRKER, T. Generalized shape optimization without homogenization. *Structural Optimization*, v. 4, p. 250-252, 1992.

STUMP, F.V. Otimização topológica aplicada ao projeto de estruturas tradicionais e estruturas com gradação funcional sujeitas a restrição de tensão. 2006. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da USP, São Paulo, 2006.

XIE, Y.M.; STEVEN, G.P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & Structures*, v. 49, n. 5, p. 885-896, 1993.