

ARTIGO ORIGINAL

Novo filtro de partículas para estimação da volatilidade estocástica em modelos com alavancagem

A particle filtering algorithm for the estimation of stochastic volatility in models with leverage

Daniel Henrique Miguel de Souza ¹ and Claudio José Bordin Jr. ²

¹Universidade Federal do ABC (UFABC)

*daniel.henrique@aluno.ufabc.edu.br; claudio.bordin@ufabc.edu.br

Recebido: 11/11/2021. Revisado: 19/07/2022. Aceito: 26/06/2022.

Resumo

Neste trabalho, propõe-se um novo algoritmo de filtragem de partículas para a estimativa da volatilidade de preços no mercado financeiro a partir do modelo de volatilidade estocástica com alavancagem. Este método é baseado em um filtro de partículas Rao-Blackwellizado, diferindo de métodos anteriores por usar uma aproximação discreta para a função de importância ótima, sendo esta intratável. O desempenho do novo método foi avaliado por meio de simulações numéricas utilizando dados sintéticos, nos quais o algoritmo proposto se mostrou melhor que o estado da arte em termos de métricas de desempenho.

Palavras-Chave: Filtragem Estocástica; Filtro de Partículas; Métodos Bayesianos; Processamento de Sinais; Volatilidade Estocástica com Alavancagem

Abstract

In this work, we propose a new particle filtering algorithm for the estimation of the volatility of prices in the financial market according to model of stochastic volatility with leverage. This method is based on a Rao-Blackwellized particle filter, differing from previous methods for using a discrete approximation to the otherwise intractable optimal importance function. The performance of the new method was evaluated via numeric simulations using synthetic data, in which the proposed algorithm compared favorably to a previous one in terms of transient and steady-state performances.

Keywords: Bayesian Methods, Particle Filter, Signal Processing, Stochastic Filtering, Stochastic Volatility with Leverage.

1 Introdução

A revisão e o controle de variações de preços de ativos (Harvey and Shephard, 1996)(Lopes and Tsay, 2011)(Cohen et al., 1972)(Djurić et al., 2012)(Han et al., 2016) é de suma importância para diversas atividades financeiras e econômicas. Neste trabalho, estuda-se o problema de estimação ótima das variações de preços utilizando um modelo de Volatilidade Estocástica com Alavancagem (Harvey and Shephard, 1996), derivado da célebre equação de Black-

Scholes (Cohen et al., 1972), que pode ser descrito como

$$\begin{cases} X_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t-1} + \sigma u_t, \\ y_t = e^{X_t/2} v_t, \end{cases} \quad (1)$$

em que X_t é o logaritmo da volatilidade (*log-volatility*) no instante de tempo $t \in \mathbb{N}$ que representa, por exemplo, o índice de um dia, u_t e v_t são processos estocásticos Gaussianos de média nula e variância unitária, β_1 , β_2 e $\sigma > 0$ são

parâmetros desconhecidos e $y_t \triangleq \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$ é o retorno do ativo no instante de tempo t , em que P_t é o preço do ativo.

Em Djurić et al. (2012), sendo este o estado da arte, é estudada a estimação de X_t e da função densidade de probabilidade preditiva $p(y_{t+1}|y_{1:t})$, dadas as observações $y_{1:t} \triangleq y_1, y_2, \dots, y_t$, utilizando-se filtros de partículas (Doucet et al., 2001). A estimação de X_t a partir das observações $y_{1:t}$ constitui um problema de Filtragem Estocástica (Doucet et al., 2001); pelo fato de o modelo (1) ser não-linear nas observações, não é possível aplicar diretamente técnicas clássicas para a sua solução tais como o Filtro de Kalman (Kailath et al., 2000). Os filtros de partículas exibem complexidade computacional elevada, mas têm sido aplicados com sucesso em modelos não-lineares sujeitos a perturbações não-Gaussianas.

Além de Djurić et al. (2012), outros trabalhos empregaram técnicas semelhantes para a estimação da volatilidade de preços. Em Scharth and Kohn (2016), utiliza-se uma variação do filtro de partículas conhecida como *Auxiliary Sampling Importance Resampling Filter* (Arulampalam et al., 2002) para estimação da volatilidade de ativos, realizando-se testes práticos com preços de ações da IBM e da General Electric. Em Han et al. (2016), por sua vez, propõe-se a estimação da volatilidade de opções a partir de um filtro de partículas com um processo de reamostragem adaptativo, a depender do tamanho das amostras.

Em linha com Scharth and Kohn (2016); Han et al. (2016), este artigo descreve um novo algoritmo, alternativo ao de Djurić et al. (2012), que se baseia numa aproximação da função de importância ótima (Doucet et al., 2001). Conforme o observado em simulações numéricas, o novo algoritmo proposto exibe um desempenho transitório superior ao do método de Djurić et al. (2012), que utiliza a função de importância a priori (Doucet et al., 2001) que, ao contrário da ótima, ignora a observação mais recente. O principal desafio neste caso é que a função de importância ótima não possui uma expressão fechada dada a não-linearidade do modelo.

O texto a seguir está organizado da seguinte forma: na Seção 2 é descrito com detalhes o problema de filtragem estocástica, alguns métodos com soluções analíticas para este problema e suas respectivas aproximações. Na Seção 3, por sua vez, detalha-se a descrição do modelo de Volatilidade Estocástica da Eq. (1). Prosseguindo, na Seção 4, é apresentada a solução para estimação do estado X_t proposta em Djurić et al. (2012) e, na Seção 5, introduz-se o novo método proposto. Em seguida, na Seção 6, é apresentada uma análise comparativa entre o algoritmo de Djurić et al. (2012) e a solução proposta neste trabalho, na qual o comportamento dos diferentes métodos é analisado através de simulações computacionais utilizando dados sintéticos. Finalmente, na Seção 7, são feitas considerações finais acerca do conteúdo exposto.

2 Filtragem Estocástica

Nesta seção introduz-se o problema de filtragem estocástica em sua forma geral (Seção 2.1), descrevendo-se em seguida com detalhes os principais filtros utilizados na literatura e suas respectivas aplicações (Arulampalam et al.,

2002): na Seção 2.3, apresenta-se o filtro de Kalman (Kailath et al., 2000), seguido do seu algoritmo derivado, o Filtro de Kalman estendido (EKF) (Sayed, 2011) na Seção 2.4. Finalizando a Seção, é apresentado o Filtro de Grelha (Seção 2.5).

2.1 Formulação Geral

Problemas de filtragem estocástica (Arulampalam et al., 2002) estão presentes em muitas áreas da ciência, visto que a situação-problema desse tipo de filtragem consiste em estimar uma variável desconhecida chamada genericamente de *estado*, a partir de observações parciais, geradas por meio de um modelo probabilístico. Na área de engenharia por exemplo, problemas como rastreamento de alvos (Bordin and Bruno, 2008), equalização de canais de comunicação (Asif et al., 2014) e estimação do estado de um sistema elétrico de potência (Punskeya, 2003) podem ser modelados e resolvidos como problemas de filtragem estocástica. Problemas de econometria (Lopes and Tsay, 2011)(Taylor, 1982) também podem ser abordados através dessa metodologia.

Exceto para algumas poucas classes de modelos, o problema de filtragem estocástica necessita de métodos computacionais complexos e intensivos para a obtenção de soluções adequadas. Porém, o avanço da tecnologia possibilitou a implementação prática desses métodos, tendo como consequência um grande avanço na análise e resolução de tais problemas.

O problema de filtragem estocástica é baseado na representação no espaço de estados de um sistema, e consiste na estimação da variável de estado X_n no instante $n \in \mathbb{R}$ dada uma sequência de observações prévias $y_{1:n} \triangleq y_1, \dots, y_n$ geradas como

$$x_n = f_n(X_{n-1}, v_{n-1}, \theta_n), \quad (2)$$

$$y_n = h_n(X_n, u_n, \theta_n), \quad (3)$$

em que $f_n(\cdot, \cdot)$ é a chamada função de transição de estados, $h_n(\cdot, \cdot)$ é a função de observação e θ_n é um vetor de parâmetros e v_n e u_n são processos estocásticos conhecidos respectivamente como “ruído de excitação” e “ruído de observação”.

Em geral, $f_n(\cdot, \cdot)$ e $h_n(\cdot, \cdot)$ podem ter caráter não-linear e seus argumentos podem ter dimensões distintas.

2.2 Estimativa Recursiva de um Estado

A estimação ótima da variável de estado dadas as observações passadas só é possível quando a densidade a *posteriori* da mesma, representada por $p(X_n|y_{1:n})$, puder ser determinada. Para isso, é necessário fazer algumas suposições adicionais acerca do problema; supondo que os parâmetros θ_n sejam conhecidos e v_n e u_n sejam independentes, tem-se como resultante um modelo Markoviano (Doucet et al., 2001) (*Hidden Markov Model* – HMM), ou seja, X_n condicionado em X_{n-1} é independente de $\{X_l, y_l\}$, $l < n$ (Doucet et al., 2001). Como consequência, a densidade a

posteriori requerida tem expressão recursiva dada por

$$p(X_n | y_{1:n-1}) = \int_{\mathbb{R}^N} p(X_n | X_{n-1}) p(X_{n-1} | y_{1:n-1}) dX_{n-1}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} p(X_n | y_{1:n}) &= \frac{p(y_n | X_n) p(X_n | y_{1:n-1})}{p(y_n | y_{1:n-1})} \\ &= \frac{p(y_n | X_n) p(X_n | y_{1:n-1})}{\int_{\mathbb{R}^N} p(y_n | X_n) p(X_n | y_{1:n-1}) dX_n}, \end{aligned} \quad (5)$$

uma vez que

$$p(y_n | y_{1:n-1}) = \int_{\mathbb{R}^N} p(y_n | X_n) p(X_n | y_{1:n-1}) dX_n. \quad (6)$$

O passo de predição (Eq. (4)), baseado no modelo dinâmico, determina a distribuição do estado no instante n com base nas observações passadas. Já o passo de filtragem (Eq. (5)), atualiza essa distribuição incorporando a observação do instante n . A constante de normalização do passo de filtragem é representada pela Eq. (6).

A densidade *a posteriori* $p(X_n | y_{1:n})$ possui expressão, recursiva ou fechada, com número constante de parâmetros, em dois casos principais (Arulampalam et al., 2002): no caso em que $\{v_n, u_n\}$ forem conjuntamente gaussianos e estatisticamente independentes e f_n e h_n forem funções lineares, o problema pode ser solucionado pelo filtro de Kalman (Kailath et al., 2000); quando X_n possuir uma distribuição discreta com suporte finito, a solução é dada pelo chamado filtro de grelha (*grid filter*) (Arulampalam et al., 2002).

Para os demais casos, resta recorrer a métodos subótimos para aproximar $p(X_n | y_{1:n})$. No tutorial de Arulampalam et al. (2002), descrevem-se diversas técnicas para este fim: uma variação do Filtro de Kalman para modelos não-lineares chamada de *filtro de Kalman estendido* (EKF), aproximações do Filtro de Grelha para modelos em que o espaço estado é contínuo (*Approximate Grid Filter Methods*) e os filtros de partículas (Doucet et al., 2001), que aproximam $p(X_n | y_{1:n})$ através de um pente de impulsos ponderados, em que os pontos de suporte (as chamadas “partículas”) evoluem de acordo com uma regra probabilística.

2.3 Filtro de Kalman

Analisando o problema descrito na Seção 2.2, pode-se mostrar em Arulampalam et al. (2002) que se as funções f_n e h_n forem conhecidas e lineares, e que os ruídos de excitação e de observação (u_n e v_n respectivamente) forem processos estocásticos Gaussianos com parâmetros conhecidos, as Eq. (4) e Eq. (5) possuem expressão analítica que constituem o chamado filtro de Kalman.

O filtro de Kalman pode ser deduzido num contexto de minimização do erro médio quadrático de estimação dos estados a partir das observações ou num contexto Bayesiano, como a seguir. Baseado nas suposições anteriores, o

modelo da ?? pode ser reescrito como

$$\begin{cases} X_n &= F_n X_{n-1} + u_n \\ y_n &= G_n^T X_n + v_n \end{cases} \quad (7)$$

em que X_n é a variável de estado desejada, y_n é a observação no instante n , F_n e G_n^T são matrizes determinísticas conhecidas e u_n (ruído de excitação) e v_n (ruído de observação) são independentes e definidas como

$$\begin{aligned} X_0 &\sim \mathcal{N}(\bar{X}_0, \Sigma_0), \\ u_n &\sim \mathcal{N}(0, Q_0), \\ v_n &\sim \mathcal{N}(0, \Xi_n), \end{aligned}$$

em que Q_0 e Ξ_n são as covariâncias de u_n e v_n , respectivamente.

Esse modelo relaciona o estado X_n , de dimensão $RL \times 1$ à observação y_n de dimensão $R \times 1$. Os cálculos implementados pelo filtro de Kalman se utilizam de dois passos: o passo de predição e o passo de filtragem, descritos a seguir.

2.3.1 Passo de Predição

O passo de predição (Arulampalam et al., 2002) possibilita que o filtro de Kalman produza estimativas do estado atual dadas as observações passadas. Para a sua dedução, parte-se de

$$\begin{aligned} p(X_n | y_{1:n-1}) &= \int_{X_{n-1} \in \mathbb{R}^L} p(X_n | X_{n-1}) \\ &\quad \cdot p(X_{n-1} | y_{1:n-1}) dX_{n-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Tomando-se o seguinte passo de indução, em que se supõem que as densidades $p(X_n | X_{n-1})$ e $p(X_{n-1} | y_1, \dots, y_{n-1})$ são Gaussianas com os parâmetros

$$\begin{aligned} p(X_n | X_{n-1}) &\sim \mathcal{N}(X_n | F_n X_{n-1}; Q_{n-1}); \\ p(X_{n-1} | y_{1:n-1}) &\sim \mathcal{N}(X_{n-1} | \bar{X}_{n-1}; \Sigma_{n-1}), \end{aligned}$$

segue, como consequência, que

$$\begin{aligned} p(X_n | X_{1:n-1}) &= \int_{X_{n-1} \in \mathbb{R}^L} \mathcal{N}(X_n | F_n \bar{X}_{n-1}; Q_{n-1} \\ &\quad + F_n \Sigma_{n-1} F_n^T) \mathcal{N}(X_{n-1} | \bar{X}_{n-1}; \Sigma_{n-1}) dX_{n-1}. \end{aligned}$$

Disto resulta que o passo de predição do filtro de Kalman é dado por Bruno (2013)

$$p(X_n | X_{1:n-1}) = \mathcal{N}(X_n | \bar{X}_{n|n-1}; \Sigma_{n|n-1}),$$

sendo os parâmetros determinados por

$$\begin{cases} \bar{X}_{n|n-1} &= F_n \bar{X}_{n-1} \\ \Sigma_{n|n-1} &= Q_{n-1} + F_n \Sigma_{n-1} F_n^T \end{cases} \quad (9)$$

2.3.2 Passo de Filtragem

No passo de filtragem (Arulampalam et al., 2002), a densidade preditiva (8) é combinada com a observação do instante atual através da relação

$$p(X_n | y_{1:n}) = \frac{p(y_n | X_n) p(X_n | y_{1:n-1})}{\int_{\mathbb{R}^L} p(y_n | X_n) p(X_n | y_{1:n-1}) dX_n}. \quad (10)$$

Dando continuidade ao processo de indução e explorando o fato de $p(y_n | X_n)$ e $p(X_n | y_{1:n-1})$ serem Gaussianas, com os parâmetros

$$p(y_n | X_n) \sim \mathcal{N}(y_n | G_n^T, X_n; \Xi_n),$$

$$p(X_n | y_{1:n-1}) \sim \mathcal{N}(X_n | \bar{X}_{n-1}; Q_{n-1} + F_n \Sigma_{n-1} F_n^T),$$

segue que o numerador da Eq. (10) pode ser reescrito, após longas manipulações (Bruno, 2013), como

$$\mathcal{N}(y_n | G_n^T F_n \bar{X}_{n-1}; \Xi_n + G_n^T (Q_{n-1} + F_n \Sigma_{n-1} F_n^T) G_n) \cdot \mathcal{N}(X_n | \bar{X}_n; \Sigma_n).$$

Como resultado final do passo de filtragem, tem-se que

$$p(X_n | y_{1:n}) = \mathcal{N}(X_n | \bar{X}_n; \Sigma_n), \quad (11)$$

sendo os parâmetros atualizados como

$$\begin{cases} \Sigma_n = \Sigma_{n-1} - \Sigma_{n-1} G_n [\Xi_n + G_n^T \Sigma_{n-1} G_n]^{-1} \\ \quad \cdot G_n^T \Sigma_{n-1} \\ \bar{X}_n = \bar{X}_{n-1} + \Sigma_{n-1} G_n [\Xi_n + G_n^T \Sigma_{n-1} G_n]^{-1} \\ \quad \cdot [y_n - G_n^T \bar{X}_{n-1}] \end{cases}$$

em que

$$\Sigma_{n|n-1} = Q_{n-1} + F_n \Sigma_{n-1} F_n^T,$$

$$X_{n|n-1} = F_n \bar{X}_{n-1},$$

sendo o fator $\Sigma_{n|n-1} G_n [\Xi_n + G_n^T \Sigma_{n|n-1} G_n]^{-1}$ conhecido como *Ganho de Kalman* (Kailath et al., 2000). Note que, como (11) é Gaussiana, a hipótese de indução utilizada no passo de predição foi confirmada.

2.4 Filtro de Kalman Estendido (EKF)

Como visto na Seção 2.3, o filtro de Kalman resolve exatamente o problema de filtragem estocástica para modelos lineares com ruídos de excitação e observação Gaussianos. Caso as condições de linearidade do sistema não sejam satisfeitas, o filtro de Kalman estendido (EKF) provê soluções aproximadas, determinando as matrizes de covariância através da linearização do modelo em questão. Para isto, considere o modelo

$$\begin{cases} X_n &= f_n(X_{n-1}, u_n) \\ y_n &= g_n(X_n, v_n) \end{cases} \quad (12)$$

em que X_n é a variável de estado desejada, y_n é a observação no instante n , $f_n(\cdot, \cdot)$ é a função de transição de estados e $g_n(\cdot, \cdot)$ é a função de observação. Além disso, tem-se o ruído de excitação $u_n \sim N(0, \Xi_n)$ e o ruído de observação $v_n \sim N(0, Q_n)$.

Para o caso geral do EKF, o passo de predição é determinado através das aproximações

$$\begin{cases} \bar{X}_{n|n-1} &= f_n(\bar{X}_{n-1}, 0), \\ \Sigma_{n|n-1} &= F_n \Sigma_{n-1} F_n^T + L_n Q_n L_n^T, \end{cases} \quad (13)$$

em que L_n e F_n são determinadas pelas matrizes jacobianas

$$F_n = \left. \frac{\partial f_n}{\partial X_{n-1}} \right|_{X_{n-1}=\bar{X}_{n-1}},$$

$$L_n = \left. \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \right|_{X_{n-1}=\bar{X}_{n-1}}.$$

No passo de filtragem, por sua vez, são feitas as aproximações

$$\begin{cases} k_n &= \Sigma_{n|n-1} G_n (G_n \Sigma_{n|n-1} G_n^T + M_n \Xi_n M_n^T)^{-1} \\ \bar{X}_n &= \bar{X}_{n|n-1} + k_n (y_n - g_n(\bar{X}_{n|n-1}; 0)) \\ \Sigma_n &= (I - k_n G_n) \Sigma_{n|n-1} \end{cases} \quad (14)$$

em que G_n e M_n são determinados pelas derivadas

$$G_n = \left. \frac{\partial g_n}{\partial X_n} \right|_{X_n=\bar{X}_{n|n-1}},$$

$$M_n = \left. \frac{\partial g_n}{\partial v_n} \right|_{X_n=\bar{X}_{n|n-1}}.$$

Em ambos os passos, as esperanças dos estados ($\bar{X}_{n|n-1}$ e $\bar{X}_n$) são propagadas exatamente através das não-linearidades, mas as covariâncias ($\Sigma_{n|n-1}$ e Σ_n) são aproximadas tomando-se uma expansão de primeira ordem (Kailath et al., 2000).

2.5 Filtro de Grelha

O filtro de grelha (*Grid Filter*) (Arulampalam et al., 2002) fornece recursivamente os valores da densidade *a posteriori* $p(X_n | y_1, \dots, y_n)$ no caso que o estado é discreto e consiste em um número finito de valores.

Considere que no instante $n - 1$ o estado possa ser discretizado em N_s estados ($X_{n-1}^{(i)}$, $i = 1, \dots, N_s$). Para cada estado X_n , a probabilidade condicional dadas as medições até o instante $n - 1$ é denotada por $w_{n-1|n-1}^{(i)} \triangleq \Pr(X_{n-1} = X_{n-1}^{(i)} | y_1, \dots, y_{n-1})$, ou seja,

$$p(X_{n-1} | y_1, \dots, y_{n-1}) = \sum_{i=1}^{N_s} w_{n-1|n-1}^{(i)} \delta(X_{n-1} - X_{n-1}^{(i)}), \quad (15)$$

em que δ denota o delta de Dirac.

Substituindo a Eq. (15) nas Eq. (4) e Eq. (5), podem-se

deduzir os passos de predição e de filtragem do filtro de grelha, respectivamente, como (Arulampalam et al., 2002)

$$w_{n|n-1}^{(i)} \triangleq \sum_{j=1}^{n_s} w_{n-1|n-1}^{(j)} p(X_n^{(i)} | X_{n-1}^{(j)}),$$

$$w_{n|n}^{(i)} \triangleq \frac{w_{n|n-1}^{(i)} p(y_n | X_n^{(i)})}{\sum_{j=1}^{n_s} w_{n|n-1}^{(j)} p(y_n | X_n^{(j)})}.$$

A densidade *a posteriori* é então exatamente dada por

$$p(X_n | y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n_s} w_{n|n}^{(i)} \delta(X_n - X_n^{(i)}). \quad (16)$$

2.5.1 Aproximações do Filtro de Grelha

De forma análoga à relação entre o filtro de Kalman estendido e o filtro de Kalman, o filtro de grelha também possui variações que trazem soluções aproximadas para casos que violam as premissas necessárias para o seu uso. Em Arulampalam et al. (2002), descrevem-se métodos aproximados (*Approximate Grid Based-Methods*), que podem prover soluções aproximadas para sistemas com estados contínuos. Para isto, o estado contínuo é decomposto em n_s células fixadas *a priori*, levando à aproximação da densidade *a posteriori* em $n - 1$ dada por

$$p(X_{n-1} | y_1, \dots, y_{n-1}) \approx \sum_{i=1}^{n_s} w_{n-1|n-1}^{(i)} \delta(X_{n-1} - X_{n-1}^{(i)}). \quad (17)$$

De forma análoga ao filtro de grelha, substituindo (17) em (4) e (5), obtêm-se os passos de predição (Eq. (18)) e de filtragem (Eq. (19))

$$p(X_n | y_1, \dots, y_{n-1}) \approx \sum_{i=1}^{n_s} w_{n|n-1}^{(i)} \delta(X_n - X_n^{(i)}), \quad (18)$$

$$p(X_n | y_1, \dots, y_n) \approx \sum_{i=1}^{n_s} w_{n|n}^{(i)} \delta(X_n - X_n^{(i)}), \quad (19)$$

em que

$$w_{n|n-1}^{(i)} \triangleq \sum_{j=1}^{n_s} w_{n-1|n-1}^{(j)} \int_{X \in X_n^{(i)}} p(X | X_{n-1}^{(j)}) dX, \quad (20)$$

$$w_{n|n}^{(i)} \triangleq \frac{w_{n|n-1}^{(i)} \int_{X \in X_n^{(i)}} p(y_n | X) dX}{\sum_{j=1}^{n_s} w_{n|n-1}^{(j)} \int_{X \in X_n^{(j)}} p(y_n | X) dX}. \quad (21)$$

em que as integrais em (20) e (21) surgem porque $X_n^{(i)}$, $i = 1, \dots, n_s$ representam regiões do espaço contínuo de estados.

3 Modelo de Volatilidade Estocástica

No modelo empregado em Djurić et al. (2012), o processo v_t (Eq. (1)) possui variância unitária e é suposto independente e identicamente distribuído (i.i.d.) para todo t . O processo u_t , por sua vez, é correlacionado com $z_t^T \triangleq [v_{t-1}, v_{t-2}, v_{t-1}, \dots, v_{t-l}]^T$, $l > 0$. Seja

$$C \triangleq E \left[\begin{bmatrix} u_t \\ z_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t & z_t^T \end{bmatrix} \right] \triangleq \begin{bmatrix} 1 & c^T \\ c & I_l \end{bmatrix}$$

supostamente não-singular, em que I_l denota a matriz identidade $l \times l$ e $c \triangleq [\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_l]^T \in \mathbb{R}^{l \times 1}$.

A função densidade de probabilidade (f.d.p.) conjunta de $[u_t \ z_t^T]^T$ é dada por

$$p([u_t \ z_t^T]^T) = \mathcal{N}(0, C), \quad (22)$$

em que $\mathcal{N}(0, C)$ denota uma f.d.p. Gaussiana com média nula e matriz de covariância C .

O modelo, portanto, possui $l + 3$ parâmetros invariantes que podem ser colecionados no vetor

$$\theta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \sigma \ \rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_l]^T \in \mathbb{R}^{l+3}.$$

Por conveniência, o modelo de (Eq. (1)) pode ser reescrito como (Djurić et al., 2012)

$$\begin{cases} X_t = h_t \beta + \zeta u_t' \\ y_t = e^{X_t/2} v_t \end{cases}, \quad (23)$$

em que $u_t' \sim \mathcal{N}(1, 0)$ é i.i.d. (diferentemente de u_t), $\beta \triangleq [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_{l+2}]$, $\beta_k = \sigma \rho_{k-2}$ para $k \geq 3$, $\zeta \triangleq \sigma \sqrt{1 - c^T c}$, e

$$h_t \triangleq [1 \ X_{t-1} \ y_{t-1} e^{-(X_{t-1}/2)} \ \dots \ y_{t-l} e^{-(X_{t-l}/2)}].$$

4 Filtro de Partículas Utilizando Função de Importância a Priori

Os Filtros de Partículas (Doucet et al., 2000) são técnicas para a solução aproximada de problemas de filtragem estocástica. Basicamente, uma estimativa empírica da distribuição¹ *a posteriori* da sequência de estados $X_{1:t}$ é obtida como

$$P(dX_{0:t} | y_{1:t}) \approx \sum_{m=1}^M w_t^{(m)} \delta_{X_{0:t}^{(m)}}(dX_{0:t}), \quad (24)$$

em que $X_{0:t}^{(m)}$ são as partículas, amostradas de uma f.d.p. arbitrária $\pi(X_{0:t}^{(m)}, y_{1:t})$ chamada de *função de importância*, $w_t^{(m)}$ são os pesos das partículas, M é o número de partícu-

¹Ao longo do texto, usa-se $p(\cdot)$ para denotar a f.d.p. e $P(\cdot)$ para denotar a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória.

las e $\delta_{X_{0:t}}^{(m)}(\cdot)$ denota uma massa delta de Dirac localizada em $X_{0:t}^{(m)}$.

Os pesos podem ser atualizados recursivamente através da expressão (Djurić et al., 2012)

$$w_t^{(m)} \propto w_{t-1} \frac{p(y_t, X_t^{(m)} | X_{0:t-1}^{(m)}, y_{1:t-1}^{(m)})}{\pi(X_t^{(m)} | X_{0:t-1}^{(m)}, y_{1:t-1}^{(m)})}, \quad (25)$$

em que $\sum_{m=1}^M w_t^{(m)} = 1$.

Observa-se que a variância dos pesos tende a aumentar com o número de iterações (Doucet et al., 2000). Para contrabalançar este efeito, pode-se lançar mão do processo de *reamostragem* (Doucet et al., 2000) do conjunto de partículas e pesos, que produz um novo conjunto com pesos uniformes.

Explorando relações de independência condicional induzidas por (Eq. (23)), verifica-se que (Eq. (25)) pode ser reescrita como

$$w_t^{(m)} \propto w_{t-1} \frac{p(y_t | X_t^{(m)}) p(X_t^{(m)} | X_{0:t-1}^{(m)}, y_{1:t-1}^{(m)})}{\pi(X_t^{(m)} | X_{0:t-1}^{(m)}, y_{1:t-1}^{(m)})}, \quad (26)$$

em que $p(y_t | X_t^{(m)}) = \mathcal{N}(0, e^{X_t^{(m)}})$ e a função de importância *a priori* é definida como

$$\pi(X_t^{(m)} | X_{0:t-1}^{(m)}, y_{1:t-1}^{(m)}) \triangleq p(X_t^{(m)} | X_{0:t-1}^{(m)}, y_{1:t-1}^{(m)}), \quad (27)$$

de forma que (Eq. (26)) se reduz a

$$w_t^{(m)} \propto w_{t-1} p(y_t | X_t^{(m)}). \quad (28)$$

Para calcular $p(X_t^{(m)} | X_{0:t-1}^{(m)}, y_{1:t-1}^{(m)})$, observe inicialmente que

$$\begin{aligned} p(X_t^{(m)} | X_{0:t-1}^{(m)}, y_{1:t-1}^{(m)}, \beta, \zeta) &= \\ &= p(X_t^{(m)} | X_{t-1}^{(m)}, y_{t-1}^{(m)}, \beta, \zeta) = \mathcal{N}(h_t^T \beta; \zeta^2), \end{aligned} \quad (29)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} p(X_t^{(m)} | X_{0:t-1}^{(m)}, y_{1:t-1}^{(m)}) &= \\ &= \int p(X_t^{(m)}, \beta, \zeta | X_{0:t-1}^{(m)}, y_{1:t-1}^{(m)}) d\beta d\zeta \\ &= \int p(X_t^{(m)} | X_{0:t-1}^{(m)}, y_{1:t-1}^{(m)}, \beta, \zeta) \\ &\quad \cdot p(\beta, \zeta | X_{0:t-1}^{(m)}, y_{1:t-1}^{(m)}) d\beta d\zeta. \end{aligned} \quad (30)$$

Em Djurić et al. (2012), é mostrado que a f.d.p. $p(X_t | X_{0:t-1}, y_{1:t-1})$ é uma t de Student univariada (O'Hagan

and Forster, 2004), definida como

$$p(X_t | X_{0:t-1}, y_{1:t-1}) = \mathcal{T}(\nu_t, \eta_t, a_t) \triangleq \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_t + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu_t}{2}\right)} a_t^{\left(\frac{-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{(X_t - \eta_t)^2}{a_t}\right)^{-\frac{\nu_t + 1}{2}}. \quad (31)$$

Na Equação (31), $\nu_t \triangleq t - l - 3$ representa os graus de liberdade, Γ denota a função gama, e²

$$\eta_t \triangleq h_t \left(H_{t-1}^T H_{t-1} \right)^{-1} H_{t-1}^T \tilde{X}_{t-1}, \quad (32)$$

$$a_t \triangleq r_{t-1} \left(1 + h_t^T \left(H_{t-1}^T H_{t-1} \right)^{-1} h_t \right), \quad (33)$$

$$\tilde{X}_{t-1} \triangleq [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_{t-1}]^T, \quad (34)$$

$$h_t \triangleq \left[1 \ X_{t-1} \ y_{t-1} e^{-(X_{t-1}/2)} \dots y_{t-l} e^{-(X_{t-l}/2)} \right], \quad (35)$$

$$H_{t-1} \triangleq [h_1 \ \dots \ h_{t-1}]^T, \quad (36)$$

$$r_t \triangleq r_{t-1} + \frac{(X_t - h_t^T \hat{\beta}_{t-1})^2}{1 + h_t^T \left(H_{t-1}^T H_{t-1} \right)^{-1} h_t}, \quad (37)$$

$$\hat{\beta}_{t-1} \triangleq \left(H_{t-1}^T H_{t-1} \right)^{-1} H_{t-1}^T \tilde{X}_{t-1}. \quad (38)$$

Utilizando-se (Eq. (31)) chega-se ao algoritmo referencial na área, proposto em Djurić et al. (2012). A partir de $\chi_{t-1} \triangleq \{X_{0:t-1}^{(m)}, w_{t-1}^{(m)}\}_{m=1}^M$, o conjunto de partículas e pesos disponível instante de tempo $t - 1$, o algoritmo determina χ_t através dos seguintes passos:

Algoritmo 1: Filtro de Partículas de Djurić et al. (2012)

i. Calcule

- $R_{t-1}^{(m)} \triangleq \left(\left(H_{t-1}^{(m)} \right)^T H_{t-1}^{(m)} \right)^{-1}$,
- $\hat{\beta}_{t-1}^{(m)} \triangleq R_{t-1}^{(m)} \left(H_{t-1}^{(m)} \right)^T \tilde{X}_{t-1}^{(m)}$,
- $h_t^{(m)}$ conforme (Eq. (35)).

ii. Calcule

- $\eta_t^{(m)} = \left(h_t^{(m)} \right)^T \hat{\beta}_{t-1}^{(m)}$,
- $a_t^{(m)} = r_{t-1}^{(m)} \left(1 + \left(h_t^{(m)} \right)^T R_{t-1}^{(m)} h_t^{(m)} \right)$.

iii. Amostre $X_t^{(m)} \sim \mathcal{T}(\nu_t, \eta_t^{(m)}, a_t^{(m)})$ através de (Eq. (31)).

iv. Atualize os pesos das partículas através de

$$\tilde{w}_t^{(m)} \propto w_{t-1}^{(m)} p(y_t | X_t^{(m)}) = w_{t-1}^{(m)} \mathcal{N}(0, e^{X_t^{(m)}}).$$

²Por concisão, o índice subscrito (m) referente às partículas será omitido onde não for absolutamente necessário.

- v. Normalize os pesos como $w_t^{(m)} = \frac{\bar{w}_t^{(m)}}{\left(\sum_{m=1}^M w_t^{(m)}\right)}$.
- vi. A partir de χ_t , determine a estimativa

$$\hat{X}_t = \sum_{m=1}^M w_t^{(m)} X_t^{(m)}.$$

- vii. Reamostrasse χ_t utilizando um dos métodos descritos em Doucet et al. (2000).
- viii. Calcule $r_t^{(m)}$ através de (Eq. (37)).
- ix. Calcule

$$k_t^{(m)} = \frac{R_{t-1}^{(m)} h_t^{(m)}}{1 + h_t^{(m)T} R_{t-1}^{(m)} h_t^{(m)}}. \quad (39)$$

- x. Calcule $\hat{\beta}_t^{(m)}$ a partir de $\hat{\beta}_{t-1}^{(m)}$ através de

$$\hat{\beta}_t^{(m)} = \hat{\beta}_{t-1}^{(m)} + k_t^{(m)} \left(X_t - \left(h_t^{(m)} \right)^T \hat{\beta}_{t-1}^{(m)} \right). \quad (40)$$

- xi. Atualize $R_{t-1}^{(m)}$ para $R_t^{(m)}$, através de

$$R_t^{(m)} = \left(I - k_t^{(m)} \left(h_t^{(m)} \right)^T \right) R_{t-1}^{(m)}. \quad (41)$$

em que I denota a matriz identidade.

5 Novo Algoritmo Proposto

Uma maneira de melhorar o desempenho do algoritmo de Djurić et al. (2012) seria empregar a função de importância ótima (Doucet et al., 2000), definida como

$$\pi_{\text{opt}}(X_t | X_{0:t-1}, Y_{1:t}) \triangleq p(X_t | X_{0:t-1}, Y_{1:t}), \quad (42)$$

assim chamada por minimizar a variância dos pesos dado χ_t .

Pode-se verificar, explorando relações de independência condicional induzidas por (Eq. (1)), que

$$\begin{aligned} \pi_{\text{opt}}(X_t | X_{0:t-1}, Y_{1:t}) &= \frac{p(X_t, Y_t | X_{0:t-1}, Y_{1:t-1})}{p(Y_t | X_{0:t-1}, Y_{1:t-1})} \\ &= \frac{p(Y_t | X_t) p(X_t | X_{0:t-1}, Y_{1:t-1})}{\int p(Y_t | X_t) p(X_t | X_{0:t-1}, Y_{1:t-1}) dX_t}. \end{aligned}$$

Infelizmente, dada a não-linearidade do modelo (Eq. (1)), a integral acima não possui expressão analítica. Para contornar este problema, propõe-se empregar a aproximação discreta

$$P(X_t | X_{0:t-1}, Y_{1:t-1}) \approx \sum_{j=1}^J \delta_{X_{t,j}}(dX_t), \quad (43)$$

em que $X_{t,j} \sim p(X_t | X_{0:t-1}, Y_{1:t-1})$. Substituindo a aproximação proposta na expressão da função de importância

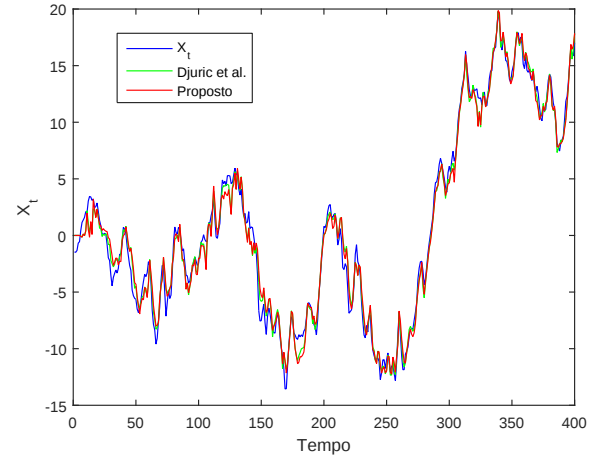


Figura 1: Estimativas geradas pelos algoritmos da Seção 4 (Djurić et al. (2012)) e da Seção 5 (Proposto) em comparação ao valor verdadeiro de X_t ao longo de uma única realização.

ótima, obtém-se que

$$\Pi_{\text{opt}}(X_t | X_{0:t-1}, Y_{1:t}) \approx \frac{\sum_{j=1}^J p(Y_t | X_{t,j}) \delta_{X_{t,j}}(dX_t)}{\sum_{j=1}^J p(Y_t | X_{t,j})}. \quad (44)$$

A geração de amostras de (Eq. (44)) é fácil por se tratar de uma distribuição discreta. Substituindo-se a aproximação (Eq. (43)) no numerador e (Eq. (44)) no denominador de (Eq. (26)), resulta que

$$\begin{aligned} w_t &\propto w_{t-1} \frac{p(Y_t | X_t) p(X_t | X_{0:t-1}, Y_{1:t-1})}{\pi_{\text{opt}}(X_t | X_{0:t-1}, Y_{1:t})} \\ &\approx \sum_{j=1}^J p(Y_t | X_{t,j}). \end{aligned} \quad (45)$$

Observe que o algoritmo proposto difere do algoritmo de Djurić et al. (2012) apenas nos passos 3 e 4.

6 Resultados

Nessa seção, são analisados os desempenhos dos algoritmos descritos nas Seções 4 e 5.

Para tanto, realizam-se simulações numéricas nas quais os algoritmos processaram 400 amostras sucessivas de dados sintéticos gerados de acordo com o modelo da Eq. (23), em 1000 realizações independentes.

Para a geração dos dados, utilizam-se os seguintes parâmetros: $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0,99$, $\sigma = 1$ e $c = 0,9$. Esses parâmetros correspondem a um processo sem tendência ($\beta_1 = 0$), com amostras altamente correlacionadas ($\beta_2 = 0,99$) e com forte alavancagem ($c = \rho = 0,9$). Os filtros de partículas empregaram $M = 300$ partículas e o algoritmo da Seção 4 utilizou $J = 4$.

A Fig. 1 ilustra o resultado obtido ao longo de uma única

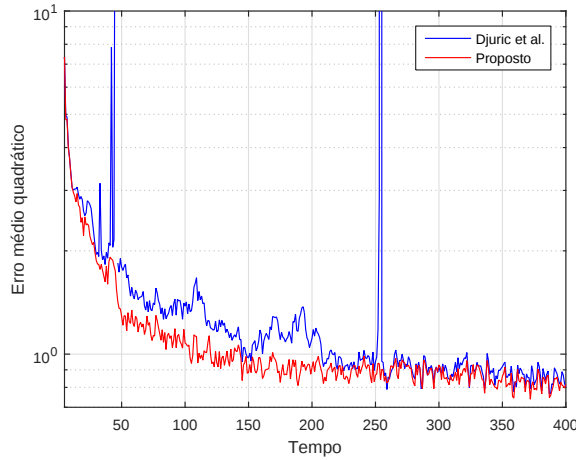


Figura 2: Valores médios ao longo de 1000 realizações do erro quadrático de estimação ($\sigma_{X,t}^2$) para os algoritmos da Seção 4 (Djurić et al. (2012)) e da Seção 5 (Proposto) em função do tempo.

realização pelos algoritmos da Seção 4 (Djurić et al.) e da Seção 5 (Proposto) em comparação ao valor verdadeiro de X_t gerado pelo modelo (Eq. (23)). Como se pode observar, as estimativas geradas pelos dois algoritmos se aproximaram dos valores verdadeiros de X_t .

Calculou-se para os mesmos algoritmos a variância média do erro de estimação, definida como

$$\tilde{\sigma}_X^2 = \frac{1}{R \cdot T} \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T |rX_t - r\hat{X}_t|^2,$$

em que o índice subscrito à esquerda indica o índice da realização, R o número de realizações e T o número de amostras processadas. Os valores obtidos utilizando-se $R = 1000$ realizações independentes foram de 0,8813 para o algoritmo da Seção 3 e 0,8454 para o algoritmo da Seção 4, o que ilustra a vantagem do algoritmo proposto, que emprega uma aproximação da função de importância ótima, em relação ao método que usa a função de importância *a priori*.

Na Fig. 2, por sua vez, é mostrado o valor de

$$\sigma_{X,t}^2 \triangleq \frac{1}{R} |rX_t - r\hat{X}_t|^2,$$

ou seja, o erro quadrático médio de estimação ao longo das realizações em função do tempo, para $R = 1000$ realizações. Como se pode observar, para o algoritmo proposto $\sigma_{X,t}^2$ se aproxima mais rapidamente de um comportamento assintótico e exibe valores inferiores aos correspondentes do algoritmo de Djurić et al. (2012). Vale observar ainda que o algoritmo de Djurić et al. divergiu em algumas realizações, produzindo valores elevados de erro, o que não ocorreu para o algoritmo proposto.

6.1 Simulação com Dados Reais

O desempenho dos algoritmos estudados também foram testados com dados reais. Para esse fim, utilizaram-se os algoritmos das Seção 3 e 4 para estimar a volatilidade preço das ações da Petrobras (PETR4) e a densidade preditiva $p(y_{n+1}|y_{1:n})$, necessária para o cálculo de outras métricas de risco, como o *Value-at-Risk* e o *Expected Shortfall* (Djurić et al., 2012).

Primeiramente, estimou-se a volatilidade de PETR4. Visando obter uma análise de um período relativamente longo, utilizou-se para cálculo dos retornos y_t os preços de fechamento da ação da Petrobras PETR4 em um período de 10 anos, sendo escolhido o intervalo entre os dias 01 de Janeiro de 2008 e 01 de Janeiro de 2018. Os preços de fechamento do período indicado foram retirados de Yahoo (2018). A volatilidade histórica da PETR4 do período foi calculada pelo método descrito em Gunn (2009).

Para a análise do desempenho, empregaram-se os resultados de 300 realizações independentes de cada algoritmo. Porém, para fins de ilustração, utilizou-se apenas uma realização. O resultado pode ser visto na Fig. 3.

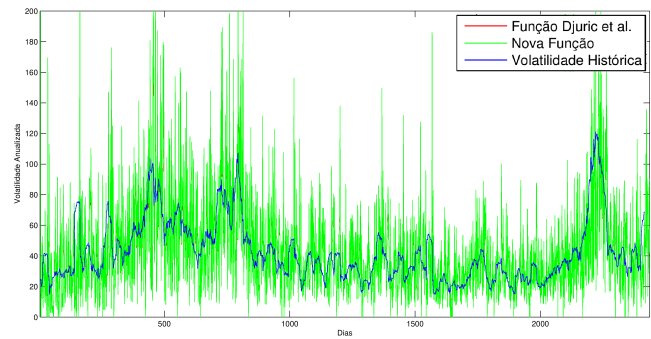


Figura 3: Comparação entre Volatilidade Histórica da Ação PETR4 com as estimativas da Volatilidade Implícita obtidas pela função de Djurić e a função proposta nesse trabalho.

Pela Fig. 3, percebe-se que a volatilidade da PETR4 teve seus maiores picos entre os dias 275 e 794 (01/10/2008 a 05/03/2010) e no dia 2221 (29/01/2014). Esses picos podem ser atribuídos aos efeitos da crise de 2008 (Krugman, 2010) que se estenderam ao longo do tempo e a outras razões decorrentes do envolvimento da empresa na Operação Lava Jato.

Em relação ao comportamento dos filtros estocásticos, observa-se que esses algoritmos acompanharam a tendência da volatilidade histórica em grande parte do período analisado, tendo pouca discrepância em relação à volatilidade calculada. Note que, por se tratar de uma série temporal real, a volatilidade verdadeira não é acessível, já que se trata de uma variável oculta. O algoritmo com função de importância *a priori* de Djurić et al. (2012) teve um desvio padrão médio (ao longo do tempo e das realizações) de 3,7015%, enquanto a função proposta teve um desvio de 3,0944%, reforçando o melhor desempenho do método proposto, como pode ser observado na Fig. 4.

Utilizando a mesma série temporal, foram também es-

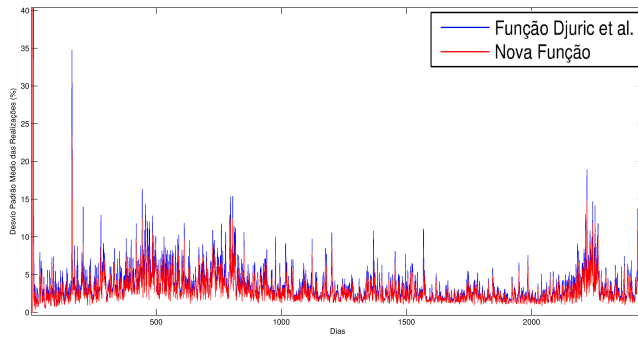


Figura 4: Desvio Padrão obtido entre a volatilidade histórica da PETR4 e as estimativas obtidas pelo Filtro de Partículas com ambas funções de importância.

timadas as seguintes métricas de risco:

- *Value at Risk* (VaR), definido como (Djurić et al., 2012)

$$VaR_{\alpha} = \sup [y \in \mathbb{R} : F_Y(y) \leq \alpha], \quad (46)$$

em que F_Y é a Função Distribuição calculada em α . Geralmente, faz-se α igual a 95%, 97,5% ou 99% (Alexander, 2009).

- *Expected Shortfall* (ES), calculado como (Djurić et al., 2012)

$$ES_{\alpha} = \mathbb{E}[Y|Y \leq VaR_{\alpha}] = \frac{1}{F_Y(VaR_{\alpha})} \int_{-\infty}^{VaR_{\alpha}} y dF_Y(y). \quad (47)$$

- *Excess Shortfall* (es), dado por (Djurić et al., 2012)

$$es_{\alpha} = ES_{\alpha} - VaR_{\alpha}. \quad (48)$$

Para averiguação dos efeitos, realizaram-se novas simulações com um modelos de ordem $l = 2$ (Seção 3) e 500 realizações independentes. Adotaram-se como métricas de desempenho f_1 , a porcentagem média de vezes que o retorno previsto para o dia seguinte é menor que o valor em risco e f_2 , a porcentagem média de vezes em que o mesmo retorno previsto é menor que o ES, chegando-se aos resultados mostrados na Fig. 5.

Algoritmo Djuric		Algoritmo Novo (J=4)		Algoritmo Novo (J=10)	
f1	f2	f1	f2	f1	f2
0.0357	0.0105	0.0247	0.0133	0.0179	0.0175

Figura 5: Valores médios das métricas de desempenho f_1 e f_2 em função da ordem suposta para o modelo. Compararam-se os algoritmos de Djuric et al. e o proposto, com parâmetro $J = 4$ e 10.

Para o cálculo de f_1 e f_2 , utilizaram-se $VaR_{5\%}$ e $ES_{5\%}$. Pode-se perceber pelos resultados que, das 500 realizações, o número máximo de vezes que o retorno foi menor que o valor em risco foi em 3,5% das realizações, e o máximo de excedência do $ES_{5\%}$ foi em 1,75% das realizações.

Observe que há uma diferença considerável na porcentagem média de vezes em que o retorno é menor que o valor em risco (3,51% com o algoritmo de Djuric et al. contra 1,79% no novo algoritmo), ao custo de um acréscimo na porcentagem média de vezes em que o retorno é menor que o ES (1,05% com o algoritmo de Djuric et al. contra 1,75% com algoritmo novo).

7 Conclusões

Neste trabalho, apresentou-se um novo algoritmo para a estimação do estado de um modelo de volatilidade estocástica. O algoritmo proposto difere de métodos anteriores por empregar uma aproximação para a função de importância ótima, que não possui forma analítica tratável. Como se observou através de simulações numéricas, o algoritmo proposto tem um desempenho superior em termos de variância média das estimativas produzidas, além de exibir um comportamento transitório mais favorável.

Vale ressaltar que os filtros de partículas produzem soluções aproximadamente ótimas caso o modelo suposto seja verdadeiro. Caso haja incerteza sobre o modelo subjacente à série temporal, métodos baseados em técnicas de inteligência artificial podem ser mais adequados.

Referências

- Alexander, C. (2009). *Market Risk Analysis, Value at Risk Models*, Vol. 4, John Wiley & Sons.
- Arulampalam, M., Maskell, S., Gordon, N. and Clapp, T. (2002). A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking, *IEEE Transactions on Signal Processing* 50(2): 174–188. <https://doi.org/10.1109/78.978374>.
- Asif, A., Mohammadi, A. and Saxena, S. (2014). Reduced order distributed particle filter for electric power grids, *2014 IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. (ICASSP)*, pp. 7609–7613. <https://doi.org/10.1109/icassp.2014.6855080>.
- Bordin, C. J. and Bruno, M. G. (2008). Particle filters for joint blind equalization and decoding in frequency-selective channels, *IEEE Trans. Signal Process.* 56(6): 2395–2405. <https://doi.org/10.1109/tsp.2007.914965>.
- Bruno, M. G. S. (2013). *Sequential Monte Carlo methods for nonlinear discrete-time filtering*, Morgan & Claypool Publishers, San Rafael, CA, USA. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-02535-8>.
- Cohen, J. B., Black, F. and Scholes, M. (1972). The valuation of option contracts and a test of market efficiency, *The J. Finance* 27(2): 399–417. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1972.tb00969.x>.
- Djurić, P. M., Khan, M. and Johnston, D. E. (2012). Particle filtering of stochastic volatility modeled with leverage, *IEEE J. Sel. Topics Signal Process.* 6(4): 327–336. <https://doi.org/10.1109/jstsp.2012.2201695>.

- Doucet, A., De Freitas, N. and Gordon, N. (2001). *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Statistics For Engineering and Information Science, Springer, New York, NY, USA. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3437-9>.
- Doucet, A., Godsill, S. and Andrieu, C. (2000). On sequential monte carlo sampling methods for bayesian filtering, *Statist. comput.* **10**(3): 197–208. <https://doi.org/10.1023/A:1008935410038>.
- Gunn, M. (2009). *Trading regime analysis: the probability of volatility*, John Wiley & Sons.
- Han, J., Zhang, X.-P. and Wang, F. (2016). Gaussian process regression stochastic volatility model for financial time series, *IEEE J. Sel. Topics Signal Process.* **10**(6): 1015–1028. <https://doi.org/10.1109/jstsp.2016.2570738>.
- Harvey, A. C. and Shephard, N. (1996). Estimation of an asymmetric stochastic volatility model for asset returns, *J. Bus. Econ. Statist.* **14**(4): 429–434. <https://doi.org/10.2307/1392251>.
- Kailath, T., Sayed, A. H. and Hassibi, B. (2000). *Linear estimation*, Vol. 1, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA. <https://doi.org/10.1109/TIT.2005.848662>.
- Krugman, P. (2010). A crise de 2008 e a economia da depressão, *Revista de Economia Política* **30**(1): 180–182.
- Lopes, H. F. and Tsay, R. S. (2011). Particle filters and bayesian inference in financial econometrics, *J. Forecasting* **30**(1): 168–209. <https://doi.org/10.1002/for.1195>.
- O’Hagan, A. and Forster, J. J. (2004). *Kendall’s advanced theory of statistics*, Vol. 2B: Bayesian Inference, Arnold, London, UK.
- Punskaya, E. (2003). *Sequential Monte Carlo methods for digital communications*, PhD thesis, Dept. Eng., Univ. Cambridge, UK.
- Sayed, A. H. (2011). *Adaptive filters*, 1 edn, Wiley-IEEE Press, Hoboken, NJ, USA.
- Scharth, M. and Kohn, R. (2016). Particle efficient importance sampling, *J. Econometrics* **190**(1): 133–147. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2015.03.047>.
- Taylor, S. J. (1982). Financial returns modelled by the product of two stochastic processes—a study of the daily sugar prices 1961–75, *Time series analysis: theory and practice* **1**: 203–226.
- Yahoo (2018). Preço de fechamento da petróleo brasileiro s.a. - petrobras (petr4.sa) entre 01/01/2008 e 01/01/2018. Disponível em <https://br.financas.yahoo.com/quote/PETR4.SA>.