

ARTIGO ORIGINAL

Aplicação de um código de otimização estocástica multiobjetivo na viticultura na Serra Gaúcha

Application of a multi-objective stochastic optimization code to viticulture in Serra Gaúcha

Vinícius Kuczynski Nunes ¹ and Gustavo Mendes Platt ¹

¹Programa de Pós-Graduação em Sistemas e Processos Agroindustriais (PPGSPA) – Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Santo Antônio da Patrulha, Brasil

*vkunes1@gmail.com; gmplatt@furg.br

Recebido: 08/07/2025. Revisado: 30/03/2026. Aceito: 26/04/2026.

Resumo

Background: Na viticultura, em algumas ocasiões, o produtor tem um problema de tomada de decisão para determinar o uso da terra para produção de uvas de mesa (para produção de sucos, como a Uva Isabel) ou uvas viníferas (para produção de vinhos finos). Considerando tal situação, o objetivo do presente trabalho é desenvolver e empregar um código computacional para solucionar um problema de otimização bi-objetivo, de modo a minimizar o consumo de água de irrigação na lavoura, e maximizar o benefício econômico proveniente da viticultura. Para atingir o objetivo foi empregado um algoritmo interativo baseado na solução de problemas de programação linear estocásticos multiobjetivos. **Resultados:** Após aplicação da metodologia numérica para solução do problema de otimização, determina-se fração de área da produção a ser destinada para uvas para produção de sucos e uvas para produção de vinhos finos, de acordo com um parâmetro de relaxação envolvendo os diferentes objetivos e cenários do problema. **Conclusões:** Os resultados obtidos indicaram que a escolha do tipo de uva a ser plantada depende de diferentes variáveis, de caráter econômico (preços de venda e custos de produção de suco de uva e de vinho) e inerentes à própria lavoura (produtividades e coeficientes das culturas). Além disso, o código desenvolvido apresenta-se como uma ferramenta flexível para diferentes situações de tomada de decisão.

Palavras-Chave: Programação Linear Estocástica Multiobjetivo; Viticultura; Pegada Hídrica.

Abstract

Background: In viticulture, producers sometimes have a decision-making problem in determining the use of land to produce table grapes (for juice production, for instance, the Isabella grape) or wine grapes (for fine wine production). Considering this situation, the aim of this work is to develop and apply a computational code to solve a bi-objective optimization problem in order to minimize irrigation water consumption and maximize the economic benefit from viticulture. To achieve the objective, an interactive algorithm was used based on the solution of multi-objective stochastic linear programming problems. **Results:** After applying the numerical methodology to solve the optimization problem, the fraction of the production area to be allocated to grapes for juice production and grapes for fine wine production was determined, according to a relaxation parameter involving the different objectives and scenarios of the problem. **Conclusions:** The results obtained indicate that the choice of the type of grape to be planted depends on different variables, both economic (sales prices and production costs for grape juice and wine) and inherent to the crop itself (yields and crop coefficients). In addition, the code developed is a flexible tool for different decision-making situations.

Keywords: Multiobjective Linear Stochastic Programming; Viticulture; Water Footprint.

1 Introdução

O mercado do vinho tem sofrido fortes mudanças nos últimos anos, com a redução de demanda, por exemplo, em países europeus e com o aumento das áreas de plantio em novas regiões (The Sofia Globe Staff, 2025). O Brasil produz cerca de 1,5 milhões de toneladas/ano de uvas (dados de 2022) – onde 50% são empregados para produção de sucos e vinhos – com destaque para a Região Sul do país e para o Estado de Pernambuco (Embrapa Uva e Vinho, 2022).

A produção de uvas implica, por sua vez, em uso de água para lavoura, e uma métrica atualmente usada para avaliar tal uso é a chamada pegada hídrica. A pegada hídrica é a quantidade total de água consumida no processo produtivo de um bem ou de um serviço (Hoekstra, 2017). A porção da pegada hídrica referente ao uso de águas superficiais ou subterrâneas é chamada de pegada hídrica azul (Hoekstra et al., 2012).

O presente trabalho propõe a aplicação de um código computacional para a solução de um problema de programação linear estocástica, de maneira a definir o quanto de área um produtor (ou uma região produtora de um município, estado ou país) deve utilizar para produção de uva para suco ou uvas viníferas (para vinhos finos), considerando dois objetivos conflitantes, quais sejam: a lucratividade e o uso de água. Os produtos considerados como possibilidades de escolha são o suco de uva e o vinho. É importante salientar que o modelo possui duas restrições intrínsecas: primeiro que ambas áreas, dedicadas à produção de uva para sucos e uva para vinhos, apresentem valor maior que zero, e segundo que a soma das áreas seja menor que a área total disponível para plantação. Uma vez que as pegadas hídricas e os custos de produção/preços de venda para suco de uva e para vinhos são (por hipótese) distintos, há, portanto, objetivos conflitantes e espaço para tomada de decisão. Tendo em conta a importância da Região Sul do país para a viticultura nacional, o cenário a ser estudado emprega dados geográficos e climáticos da Serra Gaúcha, em particular do município de Bento Gonçalves. Um problema similar (mas sem a contabilização do uso de água na lavoura) foi abordado por Turvey et al. (2006) para produção de *ice wine* e vinhos de mesa, considerando aspectos como custo com seguros para a produção das uvas. Uma aplicação de otimização envolvendo cálculos de pegada hídrica foi proposta por Saed et al. (2019) para a bacia do Rio Zarrinehrud, no Irã. O objetivo central do trabalho foi minimizar o uso de água azul (proveniente de irrigação) em relação ao consumo total de água e, simultaneamente, maximizar um certo benefício econômico da implantação de um empreendimento agrícola. Tal estudo também envolveu análise de cenários (como a presente proposta), mas com atribuição arbitrária de pesos para cada um dos objetivos. Ademais, não foram consideradas análises probabilísticas de ocorrência de cenários (o que será aplicado no presente estudo).

O problema em questão caracteriza-se como um Programação Linear Estocástica Multiobjetivo (representado como MOLSP). Diversos algoritmos interativos (isto é, que demandam a interferência do usuário em algum ponto do processo) têm sido propostos para a solução deste tipo de problema, como o Protrade (Goicoechea et al., 1979), o

Interest (Muñoz et al., 2010) e o Strange (Teghem et al., 1986) (este último restrito a problemas lineares). Tendo em conta trabalhos anteriores (Platt, Nunes, Espindola, Aragão e Corrêa, 2024; Platt, Espindola e Nunes, 2024) e a adequação do algoritmo Strange ao presente estudo, será dada ênfase à parte interativa do algoritmo Strange no problema de tomada de decisão. O uso do algoritmo Strange justifica-se por sua natureza interativa. Diferentemente de métodos puramente automáticos que buscam aproximar a fronteira de Pareto sem incorporar preferências explícitas do decisor (por exemplo, metaheurísticas adaptadas para problemas multiobjetivo), o Strange permite que o usuário participe do processo decisório ao longo das iterações, indicando quais objetivos devem ser relaxados em cada etapa. Essa abordagem, de acordo com o paradigma *human-in-the-loop* (Mosqueira-Rey et al., 2023), possibilita direcionar a busca para regiões da fronteira de Pareto que sejam mais relevantes do ponto de vista prático ou estratégico.

2 Formulação do Problema

Uma premissa do trabalho é que um produtor rural, uma municipalidade ou mesmo uma região tenha uma área destinada à produção de uva, e que a finalidade das uvas seja para produção de suco de uva ou para produção de vinho. Uma vez que as pegadas hídricas dos diferentes tipos de uva são também diferentes, e considerando os distintos custos de produção e preços de venda para vinhos finos e sucos de uva, há possibilidade de um *trade-off* que justifique uma tomada de decisão sobre quanto da área de plantio deve ser usado para uvas viníferas e quanto deve ser destinado para uvas de mesa/sucos.

Serão analisados, então, dois objetivos conflitantes: minimizar o consumo de água azul da pegada hídrica (z^1) e maximizar o benefício econômico (z^2), ao longo de um certo número de anos.

A seguir são descritas as etapas para a obtenção das funções-objetivo e das restrições do problema. O detalhamento do modelo empregado por ser obtido em Platt, Espindola e Nunes (2024).

2.1 Minimização do uso de Água Azul - Pegada hídrica

Um dos objetivos (representado por z^1) é a minimização do consumo de água azul (oriunda de irrigação), representado pela sigla TBWC (*Total Blue Water Consumption*), em um horizonte de 50 anos (período de produção da vinha). A irrigação ocorre somente nos meses em que a precipitação é menor do que a evapotranspiração (o que normalmente ocorre nos meses de novembro a janeiro na Serra Gaúcha). Empregando a mesma abordagem que Platt, Espindola e Nunes (2024) e Martins et al. (2024), será considerado o ano de 2012 como exemplo-base de um ano seco. Os dados de evapotranspiração de referência (ET_0), evapotranspiração das culturas ($ET_{wg} = ET_0 K_{c,wg}$ e $ET_{tg} = ET_0 K_{c,tg}$), para a uva vinífera e a uva de mesa, respectivamente) e das precipitações mensais para o ano de 2012 estão apresentados na Tabela 1. Portanto, o objetivo z^1 será então representado

por (Platt, Espindola e Nunes, 2024):

$$z^1 = TWBC = \left(\sum_{as} \sum_{ms} (ET_{tg} - prec) \right) A_1 + \left(\sum_{as} \sum_{ms} (ET_{wg} - prec) \right) A_2, \quad (1)$$

onde *as* refere-se aos anos secos e *ms* indica os meses secos.

Assim, o coeficiente C^1 é:

$$(C^1)^T = \left[\sum_{as} \sum_{ms} (ET_{tg} - prec) \quad \sum_{as} \sum_{ms} (ET_{wg} - prec) \right] \quad (2)$$

Seguindo a abordagem de Platt, Espindola e Nunes (2024), serão considerados 5 anos “secos” (isto é, onde houve necessidade de irrigação) nos 50 anos de produção da vinha. Os cenários probabilísticos serão construídos com base nas incertezas nos coeficientes de cultura $K_{c,wg}$ e $K_{c,tg}$. Ora, tais incertezas afetam os valores das evapotranspirações das culturas, ET_{wg} e ET_{tg} , e, por conseguinte, alteram o consumo de água de irrigação na vinha. Com base nos valores de K_c apresentados por Zhuo et al. (2014), foram construídos três cenários probabilísticos: o cenário 1 corresponde a um aumento de 15% do valor de $K_{c,tg}$ e uma redução de 15% no valor de $K_{c,wg}$; no o cenário 3, o valor de $K_{c,tg}$ é reduzido em 15% e o valor de $K_{c,wg}$ é incrementado em 15%; finalmente, o cenário 2 é um caso-base, com os valores da Tabela 1. Com tais cenários probabilísticos, os coeficientes da função-objetivo z^1 apresentam-se como:

$$s_1 = 1 \rightarrow C^{11} = 5 \times \left[\sum_{ms} (ET_{tg} - prec)^1 \quad \sum_{ms} (ET_{wg} - prec)^1 \right]^T \quad (3)$$

$$s_1 = 2 \rightarrow C^{12} = 5 \times \left[\sum_{ms} (ET_{tg} - prec)^2 \quad \sum_{ms} (ET_{wg} - prec)^2 \right]^T \quad (4)$$

$$s_1 = 3 \rightarrow C^{13} = 5 \times \left[\sum_{ms} (ET_{tg} - prec)^3 \quad \sum_{ms} (ET_{wg} - prec)^3 \right]^T \quad (5)$$

Os cenários serão considerados equiprováveis para o objetivo 1. O detalhamento do modelo de evapotranspiração de referência (ET_0) é apresentado em Platt, Nunes, Martins, Corrêa e Oliveira (2024).

2.2 Benefício Econômico

O segundo objetivo do trabalho consiste no benefício econômico (ou uma medida de lucratividade) da produção de suco de uva e vinho, nesse caso, a ser maximizado. Dessa forma, considera-se o seguinte índice de mérito para o segundo objetivo (z^2) (Platt, Espindola e Nunes, 2024):

$$z^2 = \sum_{anos} \sum_{i=1}^n (PV_i - CP_i) \times rendimento\ do\ fruto \times S_i \times A_i, \quad (6)$$

onde PV_i é o preço de venda do produto i , CP_i é o custo de produção e S_i é a produtividade. O “rendimento do fruto” é um fator de conversão entre a quantidade de vinho ou suco produzida a partir de um 1 kg de uvas (considerado igual a 0,7 L de suco/kg de uva e 0,7 L de vinho/kg de uva). Com somente dois produtos em questão ($n = 2$):

$$z^2 = \sum_{anos} (PV_1 - CP_1) r_g S_1 A_1 + (PV_2 - CP_2) r_w S_2 A_2 \quad (7)$$

O termo r_g é o rendimento da uva (fator de conversão uva/suco) e r_w é o rendimento do vinho (fator de conversão uva/vinho). Assim, tem-se:

$$z^2 = (C^2)^T A \quad (8)$$

O termo C^2 corresponde ao vetor de coeficientes para os diversos cenários para o objetivo 2. Para o cálculo do segundo objetivo serão utilizados os dados constantes da Tabela 2 (Platt, Espindola e Nunes, 2024). Uma vez mais, consideram-se três cenários – hipotéticos e arbitrários, em certo grau – distintos. Os dados de produtividade considerados são aqueles apresentados por Lazzarotto e Protas (2020). Naturalmente, os dados apresentados na Tabela 3 representam valores médios para o horizonte de produção do vinho (50 anos), e não valores anuais. Uma abordagem mais realista (e fora do escopo do presente trabalho) poderia considerar séries temporais para preços, custos e produtividades, por exemplo. Do mesmo modo que foi feito em relação ao primeiro objetivo, serão considerados cenários equiprováveis para o segundo objetivo.

Dessa forma, considerando os três cenários apresentados na Tabela 2 ($S_2 = 3$), os coeficientes para a função-objetivo 2 serão:

$$s_2 = 1 \rightarrow C^{21} = 50 \left[(PV_1 - CP_1)^1 r_g S_1^1 \quad (PV_2 - CP_2)^1 r_w S_2^1 \right]^T \quad (9)$$

$$s_2 = 2 \rightarrow C^{22} = 50 \left[(PV_1 - CP_1)^2 r_g S_1^2 \quad (PV_2 - CP_2)^2 r_w S_2^2 \right]^T \quad (10)$$

$$s_2 = 3 \rightarrow C^{23} = 50 \left[(PV_1 - CP_1)^3 r_g S_1^3 \quad (PV_2 - CP_2)^3 r_w S_2^3 \right]^T \quad (11)$$

Tabela 1: Comparativo entre evapotranspiração e necessidade de irrigação para o ano de 2012, em litros por hectare (Martins et al., 2024)

Mês	ET_0	$K_{c,wg}$	$K_{c,tg}$	ET_{wg}	ET_{tg}	$prec$	$ET_{wg} - prec$	$ET_{tg} - prec$
Janeiro	1.542.600	0,45	0,45	694.200	694.200	650.000	44.200	44.200
Fevereiro	1.312.200	0,45	0,45	590.500	590.500	1.850.000		
Março	1.202.600	0,45	0,45	541.200	541.200	820.000		
Abril	799.700	0,30	0,30	239.900	239.900	750.000		
Mai	663.300	0,30	0,30	199.000	199.000	270.000		
Junho	484.300	0,30	0,30	145.300	145.300	550.000		
Julho	475.200	0,30	0,30	142.600	142.600	1.900.000		
Agosto	866.600	0,70	0,85	606.600	736.600	680.000		56.600
Setembro	917.500	0,70	0,85	642.200	779.900	2.320.000		
Outubro	1.133.300	0,70	0,85	793.300	963.300	1.630.000		
Novembro	1.454.900	0,70	0,85	1.018.500	1.236.700	240.000	778.500	996.700
Dezembro	1.581.500	0,45	0,45	711.700	711.700	2.300.000		

Tabela 2: Dados econômicos (médios para o horizonte de produção da vinha) para os diferentes cenários (Platt, Espindola e Nunes, 2024)

	Cenário	PV_i (R\$)	S_i (kg/ha/ano)	CP_i (R\$)
Uva de mesa/Suco de uva	Pessimista	7,00	8.000	2,50
	Moderado	10,00	10.000	1,75
	Otimista	14,00	12.000	1,40
Uva vinífera/Vinho	Pessimista	15,00	8.000	12,00
	Moderado	20,00	10.000	10,00
	Otimista	25,00	12.000	8,00

$$c^{(ks_k)^*} Z = M^{(ks_k)^*} + \lambda \left(m^{(ks_k)^*} - M^{(ks_k)^*} \right) \quad (12)$$

2.3 Restrições do problema

Seguindo a abordagem de Platt, Espindola e Nunes (2024), arbitra-se 25 ha de área mínima de plantio, do total de 100 ha. Além disso, serão consideradas restrições probabilísticas de demandas a serem atingidas em certos cenários. Será arbitrada uma quantidade mínima de vinho a ser produzida anualmente de 300.000 L (um valor médio), de modo que:

$$A_2 \times r_w \times S_2 \geq 300.000 \quad (13)$$

Uma vez que o valor de produtividade é dependente dos cenários, trata-se então de uma restrição probabilística. Deste modo, pode-se escrever o vetor de restrições na forma:

$$TA \leq d, \quad (14)$$

com:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -5600 \\ 0 & -7000 \\ 0 & -8400 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} -25 \\ 100 \\ -300000 \\ -300000 \\ -300000 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

onde as duas primeiras restrições referem-se às áreas mínima e máxima de plantio, e as três últimas restrições

têm caráter probabilístico e representam o atendimento às demandas de vinho para os diferentes cenários.

2.4 Formulação Final do Problema

Em síntese, a formulação final da programação linear estocástica multiobjetivo pode ser descrita por:

$$\begin{aligned} \min_{(A_1, A_2)} z^{1s_1} &= (C^{1s_1})^t A, \quad s_1 = 1, 2, 3 \\ \min_{(A_1, A_2)} z^{2s_2} &= (C^{2s_2})^t A, \quad s_2 = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$TA \leq d; A \geq 0$$

3 Metodologias Numéricas

Nessa seção serão apresentadas as etapas da metodologia numérica utilizada para a solução do problema representado descrito anteriormente. A abordagem numérica é baseada no método Strange, proposto por Teghem et al. (1986). Tal algoritmo compreende uma fase não-iterativa (isto é, que não demanda a intervenção do tomador de decisão) e uma fase iterativa (onde decisões devem ser tomadas sobre relaxações em relação a determinados objetivos/cenários).

3.1 Fase não-iterativa

Um problema de programação linear estocástica multiobjetivo (MOSLP, de *MultiObjective Stochastic Linear Programming*) escreve-se genericamente como:

$$\min_X z^{ks_k} = (C^{ks_k})^t, \quad k = 1, \dots, K, \quad s_k = 1, \dots, S_k, \quad (17)$$

sujeito a:

$$TX \leq d, X \geq 0, \quad (18)$$

para um problema com K objetivos conflitantes e S_k cenários possíveis. Assim como foi descrito para o caso de atendimento de demandas mínimas, o vetor d também pode estar sujeitos a incertezas (Teghem et al., 1986), de modo que h diferentes possibilidades $d^r, r = 1, \dots, R$, para o vetor d , com probabilidades de ocorrência q^r .

Conforme descrito por Teghem et al. (1986) e, mais recentemente, por Platt, Nunes, Espindola, Aragão e Corrêa (2024), é conveniente converter as restrições de desigualdade em restrições de igualdade empregando-se dois tipos de variáveis de folga (representadas por V^r e W^r , onde $V^r \geq 0 \forall r$ e $W^r \geq 0 \forall r$). Portanto, as restrições tornam-se:

$$TX + V^r - W^r = d^r. \quad (19)$$

Considera-se ainda um objetivo de minimização da violação de restrições probabilísticas (Teghem et al., 1986):

$$\min_Z 1 + q^r W^r. \quad (20)$$

O problema (k, s_k) indica um problema linear para o objetivo k para um cenário s_k , sendo sua solução ótima representada pelo otimizador \bar{Z}^{ks_k} , com valor $M^{ks_k} = Z^{ks_k} (\bar{Z}^{ks_k})$ (Teghem et al., 1986; Platt, Nunes, Espindola, Aragão e Corrêa, 2024). Uma tabela de *pay-offs* (Teghem et al., 1986) é obtida a partir da solução de problemas de programação linear para todos os cenários. Com tal tabela, resolve-se o primeiro compromisso (problema P_1) (Teghem et al., 1986):

$$\min_{(Z, \delta)} \delta, \quad (21)$$

sujeito a:

$$\sum_{s_k=1}^{S_k} p_{s_k}^{(k)} (C^{ks_k} Z - M^{ks_k}) \pi^{ks_k} \leq \delta, \quad k = 1, \dots, K+1, \quad (22)$$

$$\delta \geq 0, \quad (23)$$

$$Z \in D_1, \quad (24)$$

onde D_1 representa a região de busca inicial do problema. Os pesos π^{ks_k} são determinados por:

$$\pi^{ks_k} = \frac{\alpha^{ks_k}}{\sum_{k=1}^{K+1} \sum_{s_k=1}^{S_k} \alpha^{ks_k}}. \quad (25)$$

E α^{ks_k} é:

$$\alpha^{ks_k} = \frac{m^{ks_k} - M^{ks_k}}{|m^{ks_k}|} \frac{1}{\|C^{ks_k}\|}, \quad (26)$$

onde $m^{ks_k} = \max_{(t,t_e)} \bar{z}^{(t,t_e)(ks_k)}$. Teghem et al. (1986) ressaltam que a solução do problema representado pela Eq. (21) pode não ser eficiente (no sentido de Pareto), propondo então o uso da abordagem de Despontin (1984):

$$\min_{(Z, \delta, \epsilon)} M\delta - \sum_{k=1}^{K+1} \epsilon_k, \quad (27)$$

sujeito às restrições:

$$\sum_{s_k=1}^{S_k} p_{s_k}^{(k)} (C^{ks_k} Z - M^{ks_k}) \pi^{ks_k} \leq \delta - \epsilon_k, \quad (28)$$

$$k = 1, \dots, K+1, \quad (29)$$

$$\delta \geq 0, \epsilon \geq 0, \quad (30)$$

$$Z \in D_1. \quad (31)$$

3.2 Fase interativa

Após a execução da fase não-iterativa do algoritmo, o tomador de decisão deve utilizar os resultados do primeiro compromisso (ou primeiro ajuste) a fim de dar continuidade do algoritmo. Neste caso, deve-se escolher um critério $(ks_k)^*$ a ser relaxado, obtendo-se o chamado problema P_{m+1} :

$$\min_{(Z, \delta, \epsilon)} M\delta - \sum_{k=1}^{K+1} \epsilon_k, \quad (32)$$

sujeito a:

$$s.t. \sum_{s_k=1}^{S_k} p_{s_k}^{(k)} (C^{ks_k} Z - M^{ks_k}) \pi^{ks_k} \leq \delta - \epsilon_k, \quad k = 1, \dots, K+1, \quad (33)$$

$$c^{(ks_k)^*} Z = M^{(ks_k)^*} + \lambda (m^{(ks_k)^*} - M^{(ks_k)^*}), \quad (34)$$

$$\lambda_0 \leq \lambda \leq \Lambda, \delta, \epsilon \geq 0, Z \in D_{m+1}, \quad (35)$$

onde λ é o parâmetro de relaxação. Segundo Winkels (1983), os valores de λ devem obedecer ao conceito de projeção eficiente. No presente trabalho, não foi empregada a proposta original do Strange, mas uma variação arbitrária do parâmetro λ . A ideia é que o tomador de decisão pode, de forma arbitrária, escolher o valor do parâmetro λ com base nas variáveis de otimização (as áreas dedicadas às plantações de uvas para sucos e viníferas, no presente caso), bem como nas variações dos valores de função-objetivo

em função do parâmetro λ . A aplicação de tal modificação do algoritmo Strange será discutida na seção de resultados numéricos.

4 Detalhes de Implementação do Código Computacional

A implementação do algoritmo Strange foi feita em linguagem Scilab 6 (desenvolvida pela Dassault Systemes e disponível em www.scilab.org). Conforme discutido por Platt (2016), o Scilab é uma alternativa *open source* a programas proprietários destinados à álgebra matricial (como o MATLAB, por exemplo). Tais ferramentas são extremamente utilizadas em problemas de Engenharia, por conta da facilidade de implementação dos códigos e pela grande quantidade de estruturas *built-in* (como ferramentas estatísticas e de otimização). Ademais, a construção de gráficos em linguagem Scilab também apresenta uma sintaxe simples e permite a exportação de figuras em formatos vetorizados e rasterizados.

O código implementado aqui é uma continuação daquele apresentado por Platt, Nunes, Espindola, Aragão e Corrêa (2024), onde somente a fase não-interativa estava contemplada.

As funções iniciais dos códigos em Scilab são responsáveis pelos cálculos de evapotranspiração, envolvendo dados geográficos e climáticos da região sob estudo. Os resultados de evapotranspiração são então confrontados com os dados de precipitação para o ano de 2012 (ano-base considerado no estudo), para determinação dos coeficientes relativos ao objetivo 1 (minimização do consumo de água azul). De modo similar, há funções específicas para os cálculos econômicos associados ao objetivo 2 (maximização do lucro).

Conforme pontuado por Platt, Nunes, Espindola, Aragão e Corrêa (2024), as informações do problema são inseridas em formato matricial ou em formato *cell*, dependendo de como serão utilizadas nos cálculos e da própria estrutura dos dados. Assim, as matrizes de coeficientes C para os diferentes objetivos são armazenadas em formato *cell* no Scilab (uma array com conteúdos de dados de quaisquer naturezas), uma vez que o número de cenários não precisa ser igual para cada um dos objetivos. A matriz de *pay-offs* e os resultados das otimizações dos diferentes passos não-interativos, por sua vez, devem ser apresentados em formato matricial, para uso pelo tomador de decisão.

Os problemas de programação linear são resolvidos pela função *karmarkar*, que é uma implementação do algoritmo de mesmo nome, proposto por Karmarkar (1984). Embora o tempo de computação não seja um problema nos estudos em questão, o algoritmo proposto por Karmarkar (1984) foi o primeiro método para solução de problemas de programação linear com tempo de computação polinomial. Uma chamada típica do algoritmo *karmarkar* no Scilab (como a que será empregada na obtenção dos resultados do presente trabalho) escreve-se como:

```
xopt=karmarkar(Aeq,beq,cc,[],[],[],1000,[],A,b,1e-6*ones(12,1),[])
```

Na expressão anterior, Aeq e beq são, respectivamente, a matriz e o vetor de não-homogeneidades para as restrições de igualdade do problema. No presente caso, tais

restrições referem-se às restrições de desigualdade probabilísticas convertidas em restrições de igualdade, conforme a Eq. (19), com a introdução das variáveis de folga e variáveis que representam as violações das restrições. No caso da solução do problema $P_{(m+1)}$, também há o uso das restrições de igualdade. O vetor cc é o vetor de coeficientes da função-objetivo. Finalmente, A e b representam as restrições de desigualdade do problema, tanto as restrições naturais (neste caso, área mínima e área máxima plantada) quanto as restrições relativas ao problema de primeiro compromisso e aos problemas posteriores. Argumentos de entrada não utilizados são representados como []. Finalmente, o número 1000 representa o número máximo de iterações do algoritmo e o valor $1e-6*ones(12,1)$ é utilizado para representar as condições de não negatividade associadas a todas as variáveis do problema. Naturalmente, a chamada da função *karmarkar* é feita por diversas vezes durante a solução do problema.

A estrutura empregada para a solução dos diversos problemas é apresentada na Fig. 1.

5 Resultados e Discussões

A Fig. 2 (Platt, Espindola e Nunes, 2024) apresenta a região viável do problema, além das soluções e curvas de nível para os diferentes objetivos e cenários (linhas tracejadas em cores). As linhas tracejadas no interior do domínio do problema referem-se às restrições probabilísticas.

Conforme ressaltado por Platt, Espindola e Nunes (2024), diferentes cenários implicam em soluções ótimas distintas para os diferentes problemas de programação linear mono-objetivo. Tal situação impõe, portanto, um problema de tomada de decisão. A Fig. 2 apresenta os conflitos entre os objetivos de minimizar o uso de água de irrigação e maximizar a lucratividade. O terceiro objetivo (a minimização das violações das restrições probabilísticas) não aparece graficamente, uma vez que depende das variáveis W_1, W_2, W_3 (e não diretamente das áreas). Finalmente, nota-se que diferentes combinações entre objetivos e cenários produzem o mesmo otimizador para os problemas determinísticos (por exemplo, objetivo 2/cenário 2 e objetivo 2/cenário 3).

A Tabela 3 apresenta a matriz de *pay-offs* para o problema, onde as diferentes linhas representam os objetivos/cenários para os problemas. A última linha refere-se à função-objetivo adicional de violação das restrições probabilísticas (Eq. (20)).

Conforme estabelecido por Platt, Espindola e Nunes (2024), a Tabela 3 apresenta algumas características que devem ser observadas:

- As soluções dos diferentes problemas determinísticos estão na diagonal da tabela;
- Conforme já apontado na Fig. 2, alguns pares de funções-objetivo/cenários apresentam soluções idênticas, o que implica em alguns valores idênticos em linhas da tabela;
- Na última linha da tabela, referente à violação das restrições probabilísticas, nota-se que as soluções referentes ao objetivo 2/cenários 2 e 3 não violam as restrições probabilísticas, o que implica no valor 1,00 atribuído à função-objetivo, conforme a Eq. (20). Tal situação é

Tabela 3: Tabela de pay-offs para o problema (Platt, Espindola e Nunes, 2024)

	\tilde{z}^{11}	\tilde{z}^{12}	\tilde{z}^{13}	\tilde{z}^{21}	\tilde{z}^{22}	\tilde{z}^{23}	\tilde{z}^{31}
$z^{11} \times 10^{-6}$	78,21	78,21	187,20	748,81	312,85	312,84	111,72
$z^{12} \times 10^{-6}$	102,82	102,83	137,18	548,75	411,32	411,32	146,88
$z^{13} \times 10^{-6}$	137,15	137,15	101,40	405,60	548,58	548,58	195,90
$z^{21} \times 10^{-6}$	-21,00	-21,00	-31,50	-126,00	-84,00	-84,00	-111,00
$z^{22} \times 10^{-6}$	-87,50	-87,50	-72,19	-288,75	-350,00	-350,00	-350,00
$z^{23} \times 10^{-6}$	-178,50	-178,50	-132,30	-529,20	-714,00	-714,00	-714,00
z^{31}	20,05	20,05	45,05	45,05	1,00	1,00	1,00

Tabela 4: Resultados do primeiro compromisso (coordenadas).

Variáveis	Valores
A_1	0,0012237
A_2	99,998762
W_1	0,0006141
W_2	0,0006141
W_3	0,0006141
V_1	46,429376
V_2	57,139376
V_3	64,289376
δ	6,9126468
ϵ_1	1,1359992
ϵ_1	0,0000084
ϵ_1	7,1657238

consistente com a Fig. 2.

Deve-se ter em mente que, apesar do problema parecer bidimensional, com variáveis A_1 e A_2 , tendo em conta o caráter multiobjetivo e probabilístico do problema, há 12 variáveis de fato: $A_1, A_2, W_1, W_2, W_3, V_1, V_2, V_3, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \delta$.

Os resultados numéricos da solução do primeiro compromisso estão apresentados na Tabela 4. Claramente, não há violações das restrições probabilísticas, com valores de W_1, W_2 e W_3 essencialmente nulos. Coerentemente, os valores das variáveis de folga convencionais V_1, V_2 e V_3 são não-nulos. Verifica-se, pelos resultados da Tabela 4, que o primeiro compromisso indica fundamentalmente o uso de toda a área disponível (100 ha) para uvas viníferas.

A Tabela 5 contém os resultados do primeiro compromisso, que serão então utilizados pelo tomador de decisão para considerar o relaxamento de algum cenário ks_k . Os valores negativos na tabela referem-se ao problema de maximização convertido em um problema de minimização.

5.1 Tomada de Decisão: Fase interativa

Após a solução do primeiro compromisso, deve-se então propor a relaxação de um dos objetivos do problema, o que implica então na tomada de decisão ao por parte do usuário (fase interativa do método).

Será escolhido, de forma arbitrária, o cenário 11 para ser relaxado. Deste modo, tem-se: $(ks_k)^* = (1, 1)$; $m^{(ks_k)^*} = 748, 81$ e $M^{(ks_k)^*} = 78, 21$.

Seguindo a abordagem de Teghem et al. (1986), uma restrição de igualdade adicional é inserida para a solução do próximo problema (problema P_2):

$$c^{(ks_k)^*} Z = M^{(ks_k)^*} + \lambda \left(m^{(ks_k)^*} - M^{(ks_k)^*} \right) \quad (36)$$

com $\lambda_0 \leq \lambda \leq \Lambda$, de modo que:

$$M^{(ks_k)^*} + \lambda_0 \left(m^{(ks_k)^*} - M^{(ks_k)^*} \right) = \bar{z}_1^{(ks_k)^*} \quad (37)$$

```

1 cenário_rest = 3;
2 cont = 1;
3 ultima_coluna = [];
4 for objetivo = 1:num_obj
5     for cenário = 1:num_cenarios(objetivo)
6         c_det_mono = c{objetivo}(cenário,:);
7         d_det_mono = d(:,cenário_rest)
8         xopt_violacao = karmarkar([],[],c_det_mono,[],[],[],[],T,d_det_mono,[0;0],[])
9         fopt_violacao = funcao_objetivo(num_obj,num_cenarios,objetivo,cenário,z,c,escalar,xopt_violacao)
10        ultima_coluna = [ultima_coluna ; fopt_violacao]
11        cont = cont + 1;
12    end
13 end

```

Figura 1: Trecho do código em Scilab, com chamada da função *karmarkar*.

Tabela 5: Resultados do primeiro compromisso (valores de função e intervalos).

ks_k	$\bar{z}_1^{(ks_k)}$	$[M^{ks_k} m^{ks_k}]$
11	312,85	[78, 21 748, 81]
12	411,32	[102, 83 548, 75]
13	548,58	[101, 40 548, 58]
21	-84,00	[-126, 00 - 21, 00]
22	-350,00	[-350, 00 - 72, 18]
23	-714,00	[-714, 00 - 132, 30]
31	1	[145, 05]

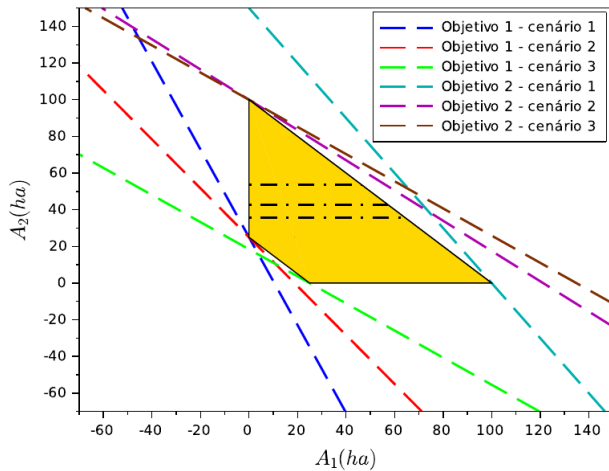


Figura 2: Região viável (projecção bidimensional) e curvas de nível para os diferentes objetivos/cenários (Platt, Espindola e Nunes, 2024)

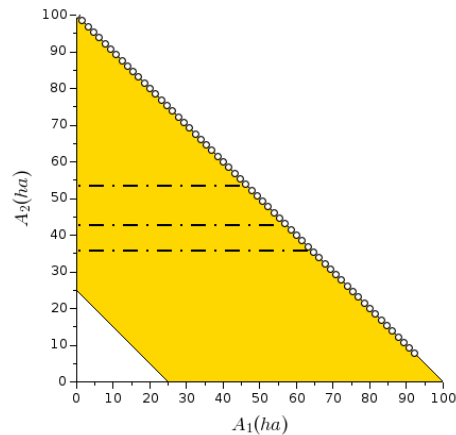


Figura 3: Solução do problema P_2 para diferentes valores de λ ($0,35 \leq \lambda \leq 0,95$).

$$M^{(ks_k)^*} + \Lambda \left(m^{(ks_k)^*} - M^{(ks_k)^*} \right) = \Lambda^{(ks_k)^*} \quad (38)$$

Então, o valor de λ_0 pode ser calculado por:

$$\lambda_0 = \frac{\left(\bar{z}_1^{(ks_k)^*} - M^{(ks_k)^*} \right)}{\left(m^{(ks_k)^*} - M^{(ks_k)^*} \right)} = \frac{(312,85 - 78,21) \times 10^{-6}}{(748,81 - 78,21) \times 10^{-6}} = 0,3499 \quad (39)$$

Seguindo a recomendação de Teghem et al. (1986), considera-se que $\Lambda^{(ks_k)^*} = m^{(ks_k)^*}$, o que produz $\Lambda = 1$. Assim, podem ser resolvidos diferentes problemas paramétricos, conforme a Eq. (36). De modo a simplificar a abordagem, estabeleceu-se um passo de 0,01 para o parâmetro λ . Assim, neste ponto, a abordagem aplicada aqui é uma simplificação da proposta do Strange, que recomenda a obtenção de valores de λ que garantam soluções eficientes; por outro lado, tal abordagem ainda permite ao tomador de decisão a escolha de um parâmetro de relaxação λ que atenda aos critérios de decisão estabelecidos.

A Fig. 3 apresenta as soluções do problema P_2 para $0,35 \leq \lambda \leq 0,95$. Nota-se que um aumento do valor de λ implica na diminuição da área A_2 , com o consequente aumento da área A_1 . A solução do problema no ponto ini-

cial ($\lambda = 0,35$) corresponde, essencialmente, à solução do primeiro compromisso. A evolução das soluções do problema P_2 permitem ao tomador de decisão escolher um valor adequado para λ . Como as variáveis de interesse estão no plano (A_1 e A_2), a própria Fig. 3 pode ser empregada em tal tomada de decisão, permitindo ainda verificar a violação das restrições probabilísticas.

Os resultados do problema P_2 com $\lambda = 0,95$ (um dos valores extremos do problema P_2) são apresentados na Tabela 6. Nota-se, neste caso, um aumento da área dedicada ao planto de uvas de mesa (área A_1) em detrimento da área para uvas viníferas. Além disso, ocorrem violações das restrições probabilísticas para atendimento das demandas de vinho (o que é consistente com os resultados gráficos da Fig. 3), indicadas por valores positivos de W_1, W_2 e W_3 . Uma vez que há violações das restrições probabilísticas, os valores das variáveis de folga V_1, V_2 e V_3 são nulos, como esperado.

Uma proposta mais adequada para visualização dos resultados do problema P_2 , conforme proposto por Teghem et al. (1986), é apresentar um valor normalizado da função-objetivo para todos os objetivos/cenários em função do valor λ . Tal abordagem permite a visualização das variações das funções-objetivo em problemas com mais de duas dimensões. A Fig. 4 contém as evoluções dos valores das funções-objetivo (em forma normalizada em relação ao primeiro compromisso) para $0,35 \leq \lambda \leq 0,95$. O aumento no valor de λ promove um aumento dos valores de z^{11} e z^{12} , o que é coerente, uma vez que o objetivo 1 corresponde à mi-

Tabela 6: Resultados do problema com relaxação, com $\lambda = 0,95$.

Variáveis	Valores
A_1	92,307720
A_2	7,6922586
W_1	45,877867
W_2	35,167867
W_3	28,017867
V_1	0,0001254
V_2	0,0001254
V_3	0,0001254
δ	9,1050388
ϵ_1	4,5812385
ϵ_1	1,8563782
ϵ_1	0,0000132

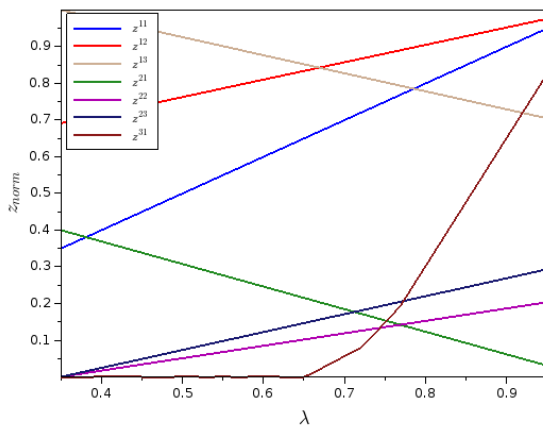


Figura 4: Solução do problema P_2 para diferentes valores de λ ($0,35 \leq \lambda \leq 0,95$).

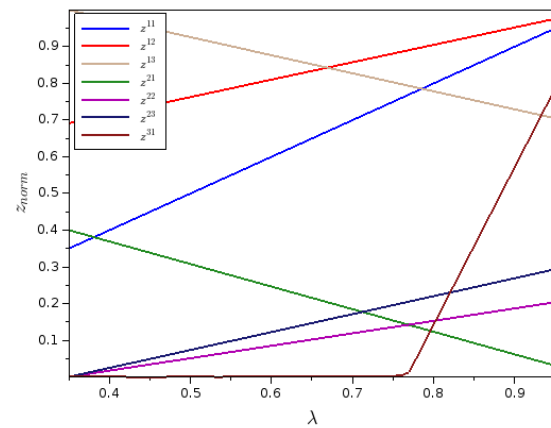


Figura 5: Solução do problema P_2 para diferentes valores de λ ($0,35 \leq \lambda \leq 0,95$), com $q_f^t = [0,005 0,005 0,990]$.

nimização do uso de água azul e, nos cenários 1 e 2, $K_{c,tg}$ é maior do que $K_{c,wg}$ (o cenário 1 propõe um aumento de 15% em $K_{c,tg}$ e uma diminuição de 15% em $K_{c,wg}$, enquanto o cenário 2 é o cenário-base da Tabela 1, onde $K_{c,tg}$ já é maior do que $K_{c,wg}$). Por outro lado, o cenário 3 (ainda com o objetivo 1) representa o caso onde $K_{c,tg}$ é diminuído em 15% e $K_{c,wg}$ é aumentado em 15%. Em tal situação, $K_{c,wg} > K_{c,tg}$, o que justifica a diminuição do valor da função-objetivo 1 com um aumento da variável λ para tal cenário.

Outro ponto importante a ser observado na Fig. 4 é que a função objetivo z^{31} permanece constante até $\lambda \approx 0,65$, indicando que não há violação das restrições probabilísticas até este valor.

Os resultados do problema P_2 considerando $\lambda = 0,65$ são apresentados na Tabela 7. Neste caso, há um compromisso entre a área empregada para uvas de mesa (área A_1) e a área destinada a uvas viníferas (área A_2). Nota-se ainda que, para $\lambda = 0,65$, não há violação das restrições probabilísticas relativas à demanda de vinho (os valores de W_1, W_2 e W_3 são nulos). Tal resultado está coerente com a curva representada em marrom na Fig. 4. Finalmente, as variáveis de folga V_1, V_2 e V_3 são positivas, indicando, uma vez mais, que não houve violação de restrições probabilísticas.

A abordagem proposta por Teghem et al. (1986) per-

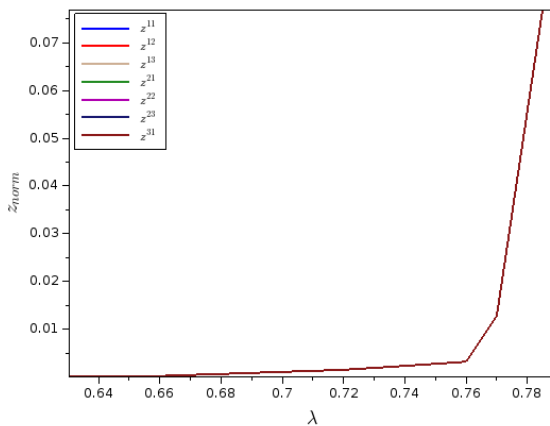
mite que, a partir da solução do problema P_2 , o tomador de decisão escolha outro critério a ser relaxado ou se considere satisfeito com o resultado obtido. Pode-se considerar, portanto, que $A_1 = 46,16$ ha e $A_2 = 53,84$ ha é uma solução possível para o problema, evitando a violação de restrições probabilísticas e promovendo algum tipo de equilíbrio entre o uso de água para irrigação e a maximização de uma medida de lucratividade.

O uso da ferramenta desenvolvida permite ainda avaliar o efeito das probabilidades de ocorrência das diferentes produtividades nas violações da restrição de atendimento à demanda de vinho. Como exemplo, serão consideradas as probabilidades $q_f^t = [0,005 0,005 0,990]$ para as probabilidades, em vez de eventos equiprováveis. Tais probabilidades indicam, então, que uma alta produtividade é esperada, o que deve diminuir a quantidade de área empregada para produção de uvas viníferas. A Fig. 5 apresenta as variações das diferentes funções-objetivo/cenários em função do valor do parâmetro de relaxação λ .

Claramente, o valor da função z^{31} permanece em patamares baixos até $\lambda \approx 0,76$, o que é uma consequência da baixa probabilidade de ocorrência das situações de produtividades baixa e média. Uma ampliação da Fig. 5 nas vizinhanças de $\lambda \approx 0,76$ é apresentada na Fig. 6. Nota-se

Tabela 7: Resultados do problema com relaxação, com $\lambda = 0,65$.

Variáveis	Valores
A_1	46,162910
A_2	53,837078
W_1	0,0004969
W_2	0,0004969
W_3	0,0004969
V_1	0,2675752
V_2	10,977575
V_3	18,127575
δ	7,1386317
ϵ_1	2,5961905
ϵ_1	0,0000071
ϵ_1	7,3959957

**Figura 6:** Solução do problema P_2 para diferentes valores de λ ($0,64 \leq \lambda \leq 0,78$), com $q_t^t = [0,005 \ 0,005 \ 0,990]$.

que a violação das restrições probabilísticas começa a ocorrer próxima de $\lambda \approx 0,65$, mas em baixa magnitude (por conta da ponderação com as probabilidades de ocorrência). Quando a restrição correspondente à maior produtividade é finalmente violada, há um aumento brusco do valor de z^{31} .

6 Considerações Finais

A partir do desenvolvimento de uma ferramenta computacional própria, o presente trabalho resolveu um problema de otimização estocástica linear bi-objetivo para a determinação de áreas de plantio para uvas viníferas e de mesa, com vistas à produção de vinho e suco de uva na região da Serra Gaúcha. Os objetivos em questão envolveram a minimização do uso de água para irrigação (água azul) e a maximização de uma medida de lucratividade. Foram consideradas também restrições probabilísticas de atendimento a uma certa demanda anual de vinho. Os resultados obtidos demonstraram a efetividade do uso do algoritmo Strange na solução do problema proposto, envolvendo uma fase não-interativa e uma fase interativa (tomada de decisão). Em relação aos resultados obtidos, pode-se concluir que:

- O modelo de otimização bi-objetivo proposto foi capaz de representar, apesar de um conjunto de simplificações e escolhas (arbitrárias, em algum grau), uma situação realística onde há objetivos conflitantes no que diz respeito à minimização do uso de água azul e maximização da lucratividade;
- O algoritmo Strange, com algumas simplificações, demonstrou ser adequado para a solução dos problemas de otimização bi-objetivo propostos no trabalho;
- A metodologia proposta caracterizou-se como uma poderosa ferramenta de apoio à tomada de decisão, balanceando os objetivos de uso racional de recursos hídricos e maximização de lucratividade sem a necessidade de atribuições de pesos arbitrários para a conversão de um problema multi-objetivo em um problema mono-objetivo;
- As incertezas existentes no problema caracterizaram situações em que houve *trade-off* entre as escolhas (plantação de uvas para suco ou uvas viníferas), permitindo tomadas de decisão;
- As ferramentas numérico-computacionais escolhidas (o software Scilab e o algoritmo Karmarkar para a solução dos problemas de programação linear) e os códigos desenvolvidos mostraram-se adequados do ponto de vista de tempo computacional e robustos (uma vez que não houve problemas de convergência) nos problemas estudados.
- Em relação à contribuição para a Computação Aplicada, a metodologia desenvolvida e apresentada configura-se como uma aplicação realista e estruturada de ferramentas numérico-computacionais, em particular do software Scilab e do pacote *karmarkar*, para a implementação do algoritmo Strange em um problema de interesse prático. Dessa forma, o trabalho evidencia como a integração entre modelagem matemática, métodos de programação linear e interação *human-in-the-loop* é capaz de ser utilizada em um *framework* computacional aplicado capaz de tratar problemas multiobjetivo de forma sistemática.

Agradecimentos

Gustavo Mendes Platt agradece pelo apoio financeiro do CNPq (Processo 309386/2025-0).

Referências

- Despoutin, M. (1984). Interactive economic policy formulation with multiregional econometric models, in M. Despoutin, P. Nijkamp e J. Spronk (eds), *Macro-Economic Planning with Conflicting Goals*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 205–220.
- Embrapa Uva e Vinho (2022). A viticultura no Brasil – Portal Embrapa. Disponível em <https://www.embrapa.br/cim-uva-e-vinho/a-viticultura-no-brasil>. Acessado em 2025-06-19.
- Goicoechea, A., Duckstein, L. e Fogel, M. M. (1979). Multiple objectives under uncertainty: An illustrative application of PROTRADE, *Water Resources Research* 15(2): 203–210. <https://doi.org/10.1029/WR015i002p00203>.
- Hoekstra, A. (2017). Water footprint assessment: Evolution of a new research field, *Water Resources Management* 31: 3061–3081. <https://doi.org/10.1007/s11269-017-1618-5>.
- Hoekstra, A. Y., Mekonnen, M. M., Chapagain, A. K., Mathews, R. E. e Richter, B. D. (2012). Global monthly water scarcity: Blue water footprints versus blue water availability, *PLoS ONE* 7(2): e32688. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0032688>.
- Karmarkar, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica* 4: 373–396. <https://doi.org/10.1007/BF02579150>.
- Martins, P. R., Platt, G. M. e Borges, F. C. (2024). Modelagem da pegada hídrica na viticultura na Serra Gaúcha, *Abakós* 12(2): e2024120201. <http://dx.doi.org/10.5752/P.2316-9451.e2024120201>.
- Mosqueira-Rey, E., Hernández-Pereira, E., Alonso-Ríos, D. et al. (2023). Human-in-the-loop machine learning: a state of the art, *Artificial Intelligence Review* 56: 3005–3054. <https://doi.org/10.1007/s10462-022-10246-w>.
- Muñoz, M., Luque, M. e Ruiz, F. (2010). Interest: a reference-point-based interactive procedure for stochastic multiobjective programming problems, *OR Spectrum* 32(2): 195–210. <https://doi.org/10.1007/s00291-008-0153-4>.
- Platt, G. M. (2016). A comparison between Scilab versions in a thermodynamic problem, *5th International Conference on Engineering Optimization*, Foz do Iguaçu (PR).
- Platt, G. M., Espindola, J. S. e Nunes, V. K. (2024). Um modelo de otimização estocástica bi-objetivo aplicado à viticultura na Serra Gaúcha, *Anais do Encontro Nacional de Modelagem Computacional e Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais*, Even3, lhéus(BA) Hotel Praia do Sol. Disponível em <https://www.even3.com.br/anais/emnc2024/925962-um-modelo-de-otimizacao-estocastica-bi-objetivo-aplicado-a-viticultura-na-serra-gaucha>.
- Platt, G. M., Nunes, V. K., Espindola, J. S., Aragão, M. E. e Corrêa, R. G. F. (2024). Programação linear estocástica multiobjetivo: Uma implementação em Scilab da fase não interativa do algoritmo Strange, *Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão* 9(4). <https://doi.org/10.21575/25254782rmetg2024vol9n41922>.
- Platt, G. M., Nunes, V. K., Martins, P. R., Corrêa, R. G. d. F. e Oliveira, F. B. S. (2024). The modelling of the evapotranspiration portion of the water footprint: A global sensitivity analysis in the Brazilian Serra Gaúcha, *Earth* 5(2): 133–148. <https://doi.org/10.3390/earth5020007>.
- Saed, B., Afshar, A., Jalali, M. R., Ghoreishi, M. e Aminpour Mohammadabadi, P. (2019). A water footprint based hydro-economic model for minimizing the blue water to green water ratio in the Zarrinehrud river-basin in Iran, *AgriEngineering* 1(1): 58–74. <https://doi.org/10.3390/agriengineering1010005>.
- Teghem, J., Dufrane, D., Thauvoye, M. e Kunsch, P. (1986). Strange: An interactive method for multi-objective linear programming under uncertainty, *European Journal of Operational Research* 26(1): 65–82. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(86\)90160-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(86)90160-8).
- The Sofia Globe Staff (2025). Wine consumption, production in EU decrease – The Sofia Globe. Disponível em <https://sofiaglobe.com/2025/04/16/wine-consumption-production-in-eu-decrease/>. Acessado em 2025-06-19.
- Turvey, C. G., Weersink, A. e Chiang, S.-H. C. (2006). Pricing weather insurance with a random strike price: The Ontario ice-wine harvest, *American Journal of Agricultural Economics* 88(3): 696–709. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8276.2006.00889.x>.
- Winkels, H. M. (1983). A graphical subroutine for multiobjective linear programming, *Operations-Research-Spektrum* 5(3): 175–192. <https://doi.org/10.1007/BF01720242>.
- Zhuo, L., Mekonnen, M. M. e Hoekstra, A. Y. (2014). Sensitivity and uncertainty in crop water footprint accounting: a case study for the Yellow River basin, *Hydrology and Earth System Sciences* 18(6): 2219–2234. <https://doi.org/10.5194/hess-18-2219-2014>.