

Análise do Ensino Usual da Noção de Relações Métricas no Triângulo Retângulo: Uma Investigação no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes

Joalisson Bahia Santana¹, Jackelyne de Souza Medrado², Laerte Silva da Fonseca³

Resumo

Este artigo é um recorte de uma pesquisa de dissertação e tem o objetivo de identificar dificuldades no ensino e aprendizagem da noção de relações métricas no triângulo retângulo por meio do estudo de pesquisas no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Tal investigação corresponde a uma subetapa das Análises Preliminares da Engenharia Didática Clássica (EDC) da então dissertação, a saber, a análise do ensino usual e seus efeitos. Para tanto, foi realizada uma pesquisa em trabalhos publicados sobre a noção matemática supracitada, nos quais é possível buscar por dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo de aprendizagem, e pelos professores no processo de ensino. Foram localizados 23 trabalhos, entretanto um deles não foi analisado pois não estava em domínio público, o que inviabilizou sua análise para além do resumo. Os trabalhos analisados apresentaram direcionamentos para a utilização de recursos didáticos, a construção e aplicação de sequências didáticas, exemplos de aplicações e explorações das relações métricas em demonstrações. Algumas pesquisas abordaram situações do ambiente de sala de aula, evidenciando dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem, o que são informações importantes para uma pesquisa de EDC pois direcionam a construção de uma sequência de ensino.

Palavras-chave: Relações métricas no triângulo retângulo; Engenharia Didática Clássica, Análise do ensino usual; Dissertações e teses.

Recebido em: 24/01/2025; Aceito em: 20/09/2025

<https://doi.org/10.5335/xp2dc315>

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0>

ISSN: 2595-7376

¹ Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Professor da Universidade do Estado da Bahia (UNEB). Membro do grupo de pesquisa neuroMATH (CNPq). E-mail: joalissonbahia@hotmail.com

² Doutora em Educação para a Ciência. Professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano. Membro do grupo de pesquisa neuroMATH (CNPq). E-mail: jackelyne.medrado@ifgoiano.edu.br

³ Livre-Docente e Doutor em Educação Matemática. Professor Titular do Instituto Federal de Sergipe (IFS). Presidente do Grupo de Pesquisa neuroMATH (CNPq). Docente no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Sergipe (UFS), Programa de Doutorado em Ensino (RENOEN/UFS) e no Programa de Pós-Graduação em Neurociências e Comportamento da Universidade de São Paulo (USP). E-mail: laerte.fonseca@ifs.edu.br

Introdução

Este artigo é um recorte de uma pesquisa de dissertação e tem o objetivo de identificar dificuldades no ensino e aprendizagem da noção de relações métricas no triângulo retângulo por meio do estudo de pesquisas no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Esta investigação corresponde a uma subetapa das Análises Preliminares da Engenharia Didática Clássica (EDC) da então dissertação, a saber, a análise do ensino usual e seus efeitos.

A EDC é uma metodologia de pesquisa utilizada, principalmente, em estudos que envolvem a construção de uma sequência de ensino a ser aplicada em sala de aula. Para tanto o trabalho do professor/pesquisador se assemelha ao de um engenheiro, ao realizar um trabalho didático minuciosamente planejado para a construção da sequência de ensino, desde aspectos específicos aos mais gerais (ALMOLOUD, 2007; ARTIGUE, 1998). Ela é composta por quatro etapas, a saber: Análises Preliminares; Concepção e Análise a Priori; Experimentação; e Análise a Posteriori e Validação. Neste recorte, é apresentada somente uma subetapa das Análises Preliminares.

A etapa de Análises Preliminares compreende um estudo sistemático sobre o objeto matemático de estudo da pesquisa, podendo abordar: obstáculos epistemológicos; organização didática; análise do ensino usual e seus efeitos, sendo esta última o foco desta pesquisa. As informações levantadas através destas análises norteiam o desenvolvimento de pesquisas, ajudando o pesquisador a delimitar seus objetivos, hipóteses e a estruturação da sequência didática (ALMOLOUD, 2007).

Com a análise do ensino usual e os efeitos da noção matemática escolhida, foi possível estabelecer como se dão os processos de ensino e

aprendizagem da noção de relações métricas no triângulo retângulo, seus efeitos, bem como os obstáculos e dificuldades enfrentados pelos alunos e professores, permitindo entender os processos didáticos envolvidos.

Para tanto, foi realizada uma pesquisa em trabalhos publicados sobre a noção matemática supracitada, nos quais foi possível buscar por dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo de aprendizagem, e pelos professores no processo de ensino. Além disso, podem-se verificar as metodologias de ensino que são empregadas em sala de aula, bem como os recursos didáticos utilizados e propostas, o que permite entender os efeitos que podem causar na efetivação da aprendizagem escolar.

Pesquisas acadêmicas enquanto perspectiva para a análise do ensino usual das Relações Métricas no Triângulo Retângulo

A noção de relações métricas no triângulo retângulo é prevista pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para ser estudada durante o 9º ano do Ensino Fundamental, sendo de fundamental importância por ser utilizada em diversos conhecimentos matemáticos, tais como: introdução para a trigonometria, com aplicações das relações métricas para determinar seno, cosseno e tangente de ângulos notáveis; geometria plana, espacial e analíticas, ao estudar diagonais de alguns quadriláteros e poliedros, altura de triângulos equiláteros, cálculo de apótema, distância entre dois pontos no plano cartesiano; e aplicações em diversos problemas e conhecimentos matemáticos que envolvam figuras geométricas (BRASIL, 2018).

As relações métricas no triângulo retângulo marcam a introdução da trigonometria, que terá seu aprofundamento futuro com o estudo das relações trigonométricas no triângulo retângulo, ciclo trigonométrico, funções trigonométricas e demais relações específicas. Todavia, vale destacar que a trigonometria acabou perdendo espaço no ensino médio

com a BNCC, no que diz respeito à obrigatoriedade do ensino de determinadas noções.

Nas habilidades apresentadas na BNCC, é prevista a demonstração das relações métricas no triângulo retângulo, aplicações do teorema de Pitágoras, a utilização de representações da função seno e cosseno para elaborar e resolver problemas envolvendo fenômenos periódicos em situações reais, e a aplicação das relações métricas como as leis do seno e cosseno (BRASIL, 2018). Dessa forma, fica a critério das escolas, no seu planejamento curricular das especificidades locais, estabelecer quais as demais noções que poderão vir a ser, ou não, utilizadas em sala de aula.

Assim, é importante trazer reflexões acerca da importância das noções trigonométricas na aprendizagem escolar durante a Educação Básica. Conforme Ramos (2021) é evidente a importância da trigonometria como um ramo da matemática, que traz aplicações em situações cotidianas desde a Antiguidade, que podem ser específicas da matemática, mas que envolvem também outras áreas das ciências e das tecnologias que tratem de fenômenos periódicos.

Nessa perspectiva, tem-se a necessidade de refletir como estas noções podem ser exploradas durante a educação básica e como elas vão impactar na aprendizagem dos alunos, uma vez que estes podem acabar não tendo contato com noções específicas. Isso pode se transformar em dificuldades com estudos mais avançados da trigonometria, como exemplo nos cursos de ensino superior que apresentem componentes curriculares de cálculo, geometria analítica, dentre outros, e até cursos que sejam especificamente de matemática.

Um panorama de como tem ocorrido o ensino desta noção matemática pode ser traçado através de uma análise do ensino usual e seus efeitos, que é uma subetapa das Análises Preliminares da EDC. Nesta subetapa, busca-se fazer uma análise de como ocorrem os processos de

ensino e aprendizagem de uma noção matemática, através da investigação de trabalhos publicados sobre essa temática (ALMOLOUD, 2007; ARTIGUE, 1998).

Ao fazer a análise das publicações sobre as relações métricas no triângulo retângulo, é possível identificar o que os pesquisadores tem proposto sobre essa noção matemática, suas inspirações para propostas de metodologias, e as que são utilizadas pelos professores na realidade escolar, dificuldades enfrentadas por docentes e discentes no ensino e aprendizagem dessa noção, bem como obstáculos impostos pelo próprio saber matemático e/ou pelo ambiente escolar.

As percepções desta análise, em uma EDC, ajudam o pesquisador a traçar o referencial teórico a ser adotado para embasar a construção da sua sequência de ensino, objetivos, hipóteses e questões de pesquisa (ALMOLOUD, 2007), tendo em vista a superação de dificuldades comumente encontradas, para uma efetivação da aprendizagem escolar.

Análise de obras envolvendo a noção de Relações Métricas no Triângulo Retângulo no Brasil

Neste tópico, são apresentados os trabalhos envolvendo a noção de relações métricas no triângulo retângulo, de modo a expor o que os autores desenvolveram em suas pesquisas, bem como a relação com esta noção matemática e os obstáculos (ou dificuldades) nos seus processos de ensino e aprendizagem.

Faz-se importante estabelecer o filtro utilizado para essa busca, a qual foi feita através do Catálogo de Teses e Dissertações da Capes utilizando como palavra-chave “Relações Métricas no Triângulo Retângulo”. Vale salientar que a escolha por essa base de dados, que contém somente teses e dissertações, se deu devido ao fato de julgar-se que esse tipo de produção está em uma classe hierárquica maior que os

demais tipos de produções como monografias e artigos, podendo apresentar dados e resultados mais refinados.

Diante disso, foi possível localizar um total de 23 produções sendo 22 dissertações e 1 tese. Cabe salientar que foram consideradas para esta pesquisa somente as produções que estavam em domínio público, pois permitiram uma análise detalhada para além dos seus resumos. Sendo assim, foram filtrados 22 trabalhos, Quadro 1 a seguir, pois uma dissertação não se enquadrava no critério definido. Destaca-se ainda que todas essas produções apresentaram o uso do termo “Relações Métricas no Triângulo Retângulo” em seus resumos, todavia algumas delas tiveram o foco de pesquisa direcionado a outros objetos. Dessa forma, apresenta-se a seguir, também, breves resumos das pesquisas, para então evidenciar eventuais obstáculos de ensino e aprendizagem encontrados nas mesmas.

Quadro 1: Relação de trabalhos de teses e dissertações com o termo Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

Autor e Ano	Tipo de Produção	Título do Trabalho	Instituição
Brito (2008)	Dissertação	Relações entre os conhecimentos, as atitudes e a confiança dos alunos do curso de licenciatura em Matemática em resolução de problemas geométricos	UNESP
Leite (2013)	Dissertação	O ensino de parte da geometria do ensino fundamental: análise de dificuldades e sugestão de sequência didática	UFES
Paula (2014)	Dissertação	Educação matemática e tecnologias: uma proposta para o ensino das relações métricas no triângulo retângulo com auxílio de um software educacional	USS
Santos (2014)	Dissertação	O uso da modelagem para o ensino da função seno no ensino médio	PUC-SP
Leite (2015)	Dissertação	Material complementar para o professor da rede SESI-SP de ensino: semelhança e software Geogebra	UFSCar
Batista (2016)	Dissertação	O uso dos recursos didáticos no ensino de matemática para alunos surdos: Uma proposta de material voltado para o ensino de matrizes e das relações métricas no triângulo retângulo	UFAC
Lima (2016)	Dissertação	Belém 400 anos: aplicações das relações métricas do triângulo retângulo e lei dos cossenos na cidade das mangueiras	UFPA

Oliveira Filho (2016)	Dissertação	O Teorema de Pitágoras	UFRPE
Cabral (2017)	Dissertação	Desenvolvendo o pensamento argumentativo geométrico: construindo práticas investigativas	PUC-MG
Costa (2017)	Dissertação	Semelhança de triângulos: uma abordagem para o ensino básico	UFCA
Lemos (2017)	Tese	Estudos de recuperação no ensino fundamental: uma investigação no âmbito da geometria sob a perspectiva do enfoque ontosemiótico do conhecimento e da instrução matemática Canoas	ULBRA
Pires (2018)	Dissertação	Relações métricas no triângulo retângulo com Geogebra	UNESP
Ferreira (2018)	Dissertação	O ensino de relações métricas no triângulo retângulo por meio de atividades	UFPA
Carvalho (2018)	Dissertação	Uma proposta para inclusão da relação de Gerbert (Papa Silvestre II) no ensino básico	UFPA
Lis (2018)	Dissertação	Bases Intuitivas para a Formação dos Conceitos do Produto Escalar, do Produto Vetorial e do Produto Misto - Parte I	UFPR
Teles (2018)	Dissertação	Bases Intuitivas para a Formação dos Conceitos do Produto Escalar, do Produto Vetorial e do Produto Misto - Parte II	UFPR
Silveira (2018)	Dissertação	Bases Intuitivas para a Formação dos Conceitos do Produto Escalar, do Produto Vetorial e do Produto Misto - Parte III	UFPR
Fonseca (2018)	Dissertação	O Laboratório de Ensino de Matemática no processo de ensino-aprendizagem	UFPR
Alves (2019)	Dissertação	Trigonometria e números complexos: uma abordagem elementar com aplicações	UFMA
Oliveira (2021)	Dissertação	Práticas investigativas nas aulas de matemática: Relações métricas em questão	PUC-MG
Vaz (2021)	Dissertação	Relações métricas no triângulo retângulo através da linguagem de programação scratch: uma proposta de atividades	UTFPR
Silva (2021)	Dissertação	Recursos didáticos para professores de matemática: um estudo sobre as contribuições do GeoGebra no ensino das relações métricas no triângulo retângulo	IFPI

Fonte: Os autores (2022).

Brito (2008) desenvolveu pesquisa sobre as relações entre os conhecimentos geométricos a confiança dos graduandos de um curso de

Licenciatura em Matemática e suas atitudes acerca da geometria, focando nas noções de congruência e semelhança de triângulos, triângulo retângulo e as relações métricas no triângulo retângulo, área e equivalência de triângulos.

Por meio desta, a autora aborda dificuldades enfrentadas pelos futuros professores, que refletem em dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem, que envolvem a dificuldade de obter informações matemáticas nas situações problema com enunciado verbal, dificuldade linguística na compreensão de palavras do enunciado, que influencia na atitude dos alunos em resolver problemas. Outro fator apontado foi o uso de métodos axiomáticos, que atribuem dificuldades às demonstrações por parte dos alunos.

A autora ainda acrescenta que, na Educação Básica, frequentemente tem-se a apresentação dos “conceitos geométricos como verdades absolutas prontas e acabadas, alicerçadas em representações gráficas, com uso de figuras que engessam o conceito, no qual acontece a super-generalização de um caso particular como o todo” (BRITO, p. 36-37, 2008).

Segundo a autora, tem-se ainda a exposição de situações inadequadas e, em diversos casos, sem a realização de momentos de sistematizações e abstrações, que dificultam o êxito dos alunos. E essa forma como os alunos são ensinados acaba criando conflitos e barreiras que dificultam a ampliação dos conhecimentos futuros, tornando-se obstáculos para a estruturação de ideias mais gerais e abstratas.

Leite (2013) pesquisou acerca da utilização de uma sequência didática com uso do software geogebra para o estudo das noções de semelhança de triângulos, teorema de Tales, relações métricas no triângulo retângulo, teorema de Pitágoras e trigonometria, por meio da qual verificou dificuldades dos alunos em compreender e utilizar os conceitos geométricos articulados com cálculos aritméticos. Identificou

ainda a falta de percepção de proporcionalidade, causando obstáculos para a resolução de problemas com semelhança de triângulos e, consequentemente, com as relações métricas no triângulo retângulo, pois estão intrinsecamente relacionados.

Quanto às práticas de ensino adotadas pelos professores, especificamente das relações métricas no triângulo retângulo e trigonometria, Leite (2013) constatou que grande parte destes trabalha exclusivamente apresentando as relações e utilizando-as como fórmulas para resolver os problemas, sem explorar a noção de semelhança de triângulos, sendo que poucos validavam as relações métricas por meio de demonstrações.

O autor concluiu que os obstáculos na aprendizagem das noções supracitadas decorrem da: prática de apresentação tradicional com exposição, exemplificação e exercícios similares; conhecimento prévio insuficiente por parte dos alunos; condução inapropriada e sem ligação dos conteúdos; memorização de fórmulas e procedimentos, sem justificativas; postura discriminatória em relação às demonstrações e generalizações; fuga dessas noções ao privilegiar outras que não envolvam geometria.

Paula (2014) desenvolveu uma pesquisa acerca de um software online e gratuito para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo, para que este seja interlocutor entre os professores e alunos na construção do conhecimento, tendo em vista a relação efetiva entre a sociedade e as tecnologias. Através desta, a autora verificou que a referida noção matemática foi diagnosticada com fragilidade de aprendizagem a partir dos Sistemas de Avaliação da Educação Básica (SAEB).

Por meio da análise do ensino das relações métricas no triângulo retângulo, Paula (2014) destaca obstáculos na construção desse conhecimento nos quadros: algébrico, baseada na resolução através de

fórmulas; geométrico, que envolve as visualizações e abstrações; e numérico, que envolve as aproximações e operações.

Leite (2015) desenvolveu sua pesquisa com o objetivo de propor atividades para os professores através do software geogebra, para o ensino e aprendizagem da noção de Semelhança, abordando o Teorema de Tales, as Relações Métricas no Triângulo Retângulo e o Teorema de Pitágoras. A autora destaca que as dificuldades no processo de aprendizagem dos conhecimentos geométricos estudados tornam-se mais evidentes nas escolas onde ocorre um ensino mecânico e pautado em fórmulas, sem relacionar as noções com o cotidiano dos alunos.

Este ensino alicerçado em fórmulas traz uma aproximação com o obstáculo Substancialista, por não considerar as especificidades dos elementos do triângulo retângulo na demonstração e aplicação das relações métricas, dando maior ênfase nas fórmulas. A autora acrescenta como obstáculos o rigor da abstração dessas noções, como também a falta de preparo e/ou de conhecimentos por parte de professores sobre ferramentas que possam trazer mais significado ao aprendizado, com um destaque para os programas computacionais.

Batista (2016) realizou uma pesquisa com o objetivo de identificar os recursos didáticos utilizados por professores de matemática que ensinam a alunos surdos, e produzir recursos para o ensino das noções de matrizes e relações métricas no triângulo retângulo. Através da análise das sequências de ensino dos professores pesquisados, o autor percebeu que estes não utilizavam recursos didáticos, tendo uma prática baseada em sondagem dos conhecimentos prévios, exposição oral e escrita dos conteúdos, resolução de situações, esclarecimento de dúvidas, realização de atividades e correções.

A falta do uso de recursos didáticos despertou a preocupação do autor, uma vez que “o manuseio de recurso didático, por mais simples que

seja, exerce papel crucial no ensino-aprendizagem, visto que pode envolver estímulos sensoriais, visuais ou sonoros e principalmente quanto à participação do indivíduo” (BATISTA, p. 65, 2016). No que diz respeito ao produto elaborado para trabalhar com a noção de relações métricas no triângulo retângulo, o autor apresenta uma abordagem de ensino a partir da apresentação das relações e das suas demonstrações, utilizando-se dos seguintes recursos didáticos: quebra-cabeças, para explorar as fórmulas; e cartazes, para trabalhar com as demonstrações.

Lima (2016) desenvolveu uma pesquisa com o objetivo de elaborar questões sobre as noções de relações métricas no triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras e Lei dos cossenos em um contexto urbano da cidade de Belém, no Pará. Para isso, o autor se baseou no método de resolução de problemas para elaborar 10 aplicações a partir de localidades populares da cidade, considerando seus dados reais, o que envolve ainda um processo de contextualização das noções matemáticas utilizadas.

Oliveira Filho (2016), em seu trabalho, traz uma pesquisa bibliográfica acerca das demonstrações do Teorema de Pitágoras, explorando-as pelas formas algébricas, geométricas e vetoriais, dentre as quais pode-se destacar as demonstrações algébricas por utilizarem as relações métricas no triângulo retângulo. São apresentadas, também, algumas aplicações do teorema supracitado em algumas noções matemáticas na trigonometria, geometria analítica e plana, dentre outras.

Cabral (2017) investigou os processos de provas e demonstrações na geometria, explorando o desenvolvimento da argumentação por parte dos alunos através do uso de atividades de provas experimentais. Dentre as noções pesquisadas pela autora, evidenciam-se as relações métricas no triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras. Segundo Cabral (2017), os alunos se deparam com dificuldades em compreender as relações métricas, principalmente no que se refere às projeções dos catetos sobre a

hipotenusa. A autora buscou trabalhar a prova experimental direcionada para a conceituação de projeção ortogonal com o intuito de superar esse obstáculo.

Destaca-se ainda que a autora defende a utilização de atividades de demonstração que tenham relação com situações significativas para os alunos, sendo do seu cotidiano, como também, que tenham relações com outros tipos de conhecimento, por meio da interdisciplinaridade. Quanto ao teorema de Pitágoras, a autora explorou um texto com acontecimentos históricos sobre seu desenvolvimento, e algumas demonstrações partindo de casos particulares, que foram argumentados e justificados pelos alunos, para chegar em casos mais gerais provados matematicamente.

Costa (2017) traz uma pesquisa que teve como objetos as noções de semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo, fazendo um estudo histórico da geometria euclidiana e abordando noções matemáticas utilizadas para demonstrar os objetos de pesquisa. O autor relaciona essas duas noções ao utilizar os conhecimentos de semelhança de triângulos para demonstrar as relações métricas no triângulo retângulo.

Costa (2017) realizou também uma pesquisa sobre como essas noções matemáticas são exploradas em alguns livros didáticos da educação básica. No que diz respeito às relações métricas no triângulo retângulo, constatou-se que alguns livros apresentavam demonstrações a partir da semelhança de triângulos, enquanto que outros apresentavam somente as relações em um enunciado sem demonstrações.

Lemos (2017), desenvolveu uma pesquisa focada no desenvolvimento e implementação de uma proposta de estudos de recuperação para a Geometria dos anos finais do Ensino Fundamental, explorando diversas noções matemáticas, das quais pode-se destacar as relações métricas no triângulo retângulo. Para o desenvolvimento da proposta, a autora investigou inicialmente as práticas utilizadas pelos professores e as

dificuldades dos alunos que participaram da pesquisa. Pelo fato da proposta envolver 15 tópicos de noções matemáticas, as dificuldades dos alunos foram exploradas em 6, sendo que a noção de relações métricas no triângulo retângulo não foi contemplada nos dados da pesquisa.

Através da análise com os professores, a autora constatou que grande parte destes tem como principal recurso o livro didático em seu planejamento, sendo poucos os que fazem uso das tecnologias, jogos didáticos e resolução de problemas, sendo esta última apontada pelos professores como uma dificuldade dos alunos, por não conseguirem ler e equacionar os dados das situações problemas. Acrescenta ainda que as estratégias utilizadas pelos professores para levar os alunos a superar suas dificuldades envolvem explicações, listas de exercícios e jogos.

Quanto à proposta para o estudo da noção de relações métricas no triângulo retângulo, Lemos (2017) trabalhou em torno da conceituação da altura do triângulo retângulo com atividades de construção, de modo a explorar as relações e propriedades entre os triângulos semelhantes que eram formados. As relações foram então construídas, deduzidas e formalizadas através de atividades de construção, atividade online, situações problemas, vídeos e links externos.

Pires (2018), em sua pesquisa destaca a utilização da tecnologia computacional para o ensino de geometria, apresentando a utilização do software geogebra para o ensino da noção de relações métricas no triângulo retângulo. O autor não explora as dificuldades dos estudantes, direcionando-se exclusivamente para propor a utilização do software nas aulas para construir e explorar alguns elementos do triângulo retângulo, a saber: altura do triângulo, cateto, hipotenusa, ângulo reto e medida dos ângulos. Pires (2018) utilizou, nessa pesquisa, os conhecimentos de semelhança de triângulos para apresentar e demonstrar as relações métricas para os alunos.

Ferreira (2018) desenvolveu uma pesquisa com o objetivo de avaliar os efeitos de uma sequência didática com atividades estruturadas, diferentemente do ensino tradicional, no ensino da noção de relações métricas no triângulo retângulo. Para poder elaborar sua sequência didática, o autor realizou uma investigação com os alunos egressos do 9º ano do ensino fundamental, participantes da pesquisa, para entender como eram ministradas suas aulas por parte dos professores, bem como quais as dificuldades de aprendizagem eles trazem consigo.

O autor constatou que, referente ao ensino da noção de relações métricas no triângulo retângulo, grande parte das aulas é realizada de forma tradicional, por meio da definição, exemplos e exercícios, enquanto que em minoria, tem-se um trabalho a partir de situações problemas, experimentos ou modelos, e que não tinha o uso de software educativo. Já para a fixação desse conhecimento, as práticas envolviam o uso de listas de problemas, jogos matemáticos, exercícios do livro didáticos, atividades buscadas pelos próprios alunos, bem como tinham aqueles que não realizavam atividades de fixação.

Quanto às dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo de aprendizagem, Ferreira (2018) destacou os de interpretar os problemas, visualizá-los e realizar os cálculos. Ao realizar uma sondagem sobre os conhecimentos dos alunos referentes às relações métricas no triângulo retângulo, o autor identificou que parte destes não se recordava das relações, e que atribuíam níveis de dificuldade para lidar com as mesmas, como representado no Figura 1 a seguir, com uma exceção do teorema de Pitágoras que foi bastante lembrado e tido como um grau de dificuldade regular

Figura 1: Grau de dificuldade dos alunos em Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

Relação/Atividade	Grau de dificuldade para os alunos aprenderem					
	Não Lembra	Muito Fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito Difícil
"Teorema de Pitágoras" $a^2 = b^2 + c^2$	20%	4%	11%	40%	18%	7%
$a = m + n$	41%	1%	5%	29%	16%	8%
$h^2 = m \cdot n$	53%	2%	2%	23%	12%	8%
$b^2 = a \cdot n$	55%	1%	3%	23%	10%	8%
$c^2 = a \cdot m$	53%	1%	5%	23%	11%	7%
$a \cdot h = b \cdot c$	53%	3%	3%	22%	12%	7%
Resolver questões envolvendo a Relação 1 "Teorema da Pitágoras"	33%	2%	10%	30%	15%	10%
Resolver questões envolvendo a Relação 2 "A hipotenusa é a soma das projeções"	36%	0%	13%	29%	16%	6%
Resolver questões envolvendo a Relação 3 "O quadrado da altura é igual ao produto das projeções"	40%	2%	8%	26%	20%	4%
Resolver questões envolvendo a Relação 4 "O quadrado do cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto"	41%	2%	14%	25%	12%	6%
Resolver questões envolvendo a Relação 5 "O quadrado do cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto"	47%	1%	9%	25%	12%	6%
Resolver questões envolvendo a Relação 6 "O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura"	47%	1%	6%	22%	16%	8%

Fonte: Ferreira (2018, p. 57).

Ao realizar um teste diagnóstico contendo 8 questões sobre a noção de relações métricas no triângulo retângulo, verificou que nenhuma das questões foi respondida de forma correta, tendo em média um percentual de erro nas questões de 2,5% e percentual de resposta em branco com 97,5%, o que segundo Ferreira (2018) representa o quanto os alunos desconhecem os conceitos e as aplicações das relações métricas postas na atividade.

Diante desse panorama, o autor desenvolveu uma sequência didática composta por oito atividades para trabalhar com a referida noção matemática, que foram desde conhecer os elementos do triângulo retângulo, explorar as seis relações de forma individual, até apresentar a recíproca do teorema de Pitágoras. As atividades foram encadeadas como mostra o Quadro 2 a seguir.

Quadro 2: Atividades da sequência didática de Ferreira (2018).

Número da atividade	Título	O que construir	Objetivo
1	Apresentação do Triângulo Retângulo.	Conhecer os entes do triângulo retângulo	Mostrar o triângulo retângulo, nomeando seus componentes e criando bases para a execução das atividades.
2	A hipotenusa e as projeções dos catetos.	A relação $a = m+n$	Descobrir a relação existente entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.
3	A hipotenusa, o cateto e sua projeção.	A relação $a.h = b.c$	Descobrir a relação existente entre as medidas do cateto, sua projeção e a hipotenusa.
4	A hipotenusa, o cateto e sua projeção.	A relação $b^2 = a.m$	Descobrir uma relação entre as medidas do cateto, sua projeção e a hipotenusa.
5	Hipotenusa, altura e os catetos.	A relação $c^2 = a.n$	Descobrir uma relação entre as medidas da Hipotenusa, altura e os catetos.
6	Altura e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.	A relação $h^2 = m.n$	Descobrir uma relação entre as medidas da Altura e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.
7	O Teorema das áreas (Teorema de Pitágoras).	A relação $a^2 = b^2 + c^2$	Constatar a relação existente entre o quadrado da medida da hipotenusa e da soma dos quadrados dos catetos de um triângulo retângulo.
8	Análise de Triângulos.	A recíproca do Teorema de Pitágoras.	Descobrir em que tipo de Triângulo é válido o Teorema de Pitágoras.

Fonte: Adaptado de Ferreira (2018).

Na realização das atividades, utilizou-se o software geogebra, tendo para isso os seguintes recursos: computador, projetor, fichas de observação, fichas de exercícios de fixação. As atividades consistiam em momentos para a descoberta das relações, onde se tinha a construção dos triângulos através do software, análise das medidas dos seus elementos, investigação das relações e verificação através dos cálculos feitos com a calculadora. Após a realização das oito atividades, os alunos realizaram outras atividades de aprimoramento composta por questões que forneciam

textos onde deveriam ser extraídos os dados para aplicar as relações e resolver o problema.

Carvalho (2018) desenvolveu uma pesquisa voltada para as abordagens analítica e geométrica das relações métricas no triângulo retângulo, apresentando também uma proposta de inclusão da Relação de Gerbert no currículo de Matemática como uma alternativa sobre o estudo das relações supracitadas. A Relação de Gerbert trata de determinar os catetos de um triângulo retângulo em função da área e da altura relativa à hipotenusa.

Para isso, o autor traz três aplicações de atividades envolvendo as relações métricas no triângulo retângulo que podem ser resolvidas ao utilizar a relação de Gerbert, permitindo assim simplificar os cálculos algébricos das resoluções. Carvalho (2018) ainda apresenta uma discussão acerca dos livros didáticos utilizados na educação básica que, segundo ele, não trazem uma exploração ampla das relações métricas, resumindo-se às seis relações convencionais e aplicações do teorema de Pitágoras. Para o autor, é importante que os livros didáticos agreguem diferentes tipos de demonstrações dessas relações e que apresentem uma histórica das mesmas, servindo também como metodologia apoiada na história da matemática.

Lis (2018), Teles (2018) e Silveira (2018) apresentam uma série de dissertações, seccionadas em três partes, com o objetivo de associar algumas propriedades algébricas e geométricas, resgatando conceitos que envolvem comprimento, área e volume na educação básica de modo a relacioná-los com os conteúdos do curso de Licenciatura em Matemática. Assim, as autoras utilizam os conhecimentos supracitados da educação básica para desenvolver demonstrações que não aparecem na literatura usual, chegando na dedução das relações métricas no triângulo retângulo com propriedades de áreas equivalentes, e trazendo suas aplicações na

geometria analítica com os produtos: escalar, vetorial e misto.

Fonseca (2018) desenvolveu uma pesquisa com o objetivo de divulgar o Laboratório de Ensino de Matemática, apresentando os efeitos dos recursos construídos para o ensino de matemática. Como exemplo de recurso, a autora traz um material didático com triângulos semelhantes, feitos de papel, para trabalhar com a noção de relações métricas no triângulo retângulo em uma sequência didática.

Com esse recurso, Fonseca (2018) explorou os seguintes conhecimentos em cinco atividades, a saber: 1) revisão do conceito de projeção; 2) manipulação de triângulos retângulos e verificação dos elementos do triângulo retângulo; 3) conceito de semelhança, razão e lados homólogos; 4) concluir o teorema de Pitágoras a partir das relações métricas; 5) escrever as relações métricas por extenso.

A autora destacou que alguns alunos apresentaram dificuldades na atividade 3 ao trabalhar com a demonstração das relações métricas utilizando semelhança de triângulos, por não reconhecerem as razões entre os lados dos triângulos semelhantes. Outro obstáculo foi verificado na atividade 5 ao escrever as relações métricas por extenso, ou seja, em enunciar a relação matemática encontrada. Ainda na atividade 5, ocorreram confusões entre as letras que representam os elementos do triângulo retângulo, confundindo as projeções dos catetos e convencionando o h da altura do triângulo como hipotenusa.

Alves (2019) teve como objetivo de pesquisa elaborar resultados básicos da trigonometria e números complexos como um texto base para que alunos da educação básica iniciem seus estudos nestes temas. É importante destacar que, para isso, o autor trabalhou com a demonstração das relações métricas no triângulo retângulo, por semelhança de triângulo, e do teorema de Pitágoras, pelas relações métricas, evidenciando a importância dessas noções matemáticas para os estudos futuros na

trigonometria e com números complexos.

Oliveira (2021) realizou sua pesquisa com o objetivo de investigar como o desenvolvimento de ambientes com práticas investigativas favorecem as discussões e as trocas de conhecimentos dos alunos para ressignificar e construir novos saberes, especificamente com a noção de relações métricas no triângulo retângulo. Para isso, a autora realizou um estudo bibliográfico e documental para construção do quadro teórico e elaboração das atividades que foram aplicadas e analisadas.

Através das investigações sobre o ensino e aprendizagem da referida noção matemática, Oliveira (2021) constatou que os alunos apresentam dificuldades por não terem consolidado os conhecimentos sobre semelhança de triângulos, e pela generalização precoce de um conhecimento, sendo necessário transitar por casos particulares para que os alunos se apropriem das ideias por processos de reflexão e avancem para as generalizações e abstrações.

A autora desenvolveu uma série de sete atividades com práticas investigativas, descritas no Quadro 3 a seguir, para trabalhar com conceitos prévios, até chegar nas relações métricas no triângulo retângulo.

Quadro 3: Atividades desenvolvidas por Oliveira (2021).

Atividades	Objetivos
1. Investigando a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer	- Reconhecer os ângulos em um triângulo. - Compreender que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .
2. Investigando os triângulos quanto aos lados e ângulos	- Classificar triângulos em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
3. Investigando o conceito de Semelhança de Polígonos	- Compreender o conceito semelhança de polígonos e a razão de semelhança. - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois polígonos sejam semelhantes.
4. Investigando o conceito de Semelhança de Triângulos	- Compreender o conceito semelhança de triângulos e a razão de semelhança. - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

5. Investigando o Teorema de Pitágoras	- Reconhecer os elementos de um triângulo retângulo. - Demonstrar o Teorema de Pitágoras.
6. Investigando as relações métricas do triângulo retângulo	- Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo utilizando a semelhança de triângulos.
7. Atividades - As relações métricas do triângulo	- Desenvolver atividades envolvendo o estudo das relações métricas do triângulo retângulo.

Fonte: Adaptado de Oliveira (2021).

Com a aplicação e análise das atividades, Oliveira (2021) verificou que alguns alunos têm dificuldades na interpretação da atividade que é proposta, da situação geométrica na dedução do teorema de Pitágoras, no raciocínio e manipulação geométrica das questões, na relação de transitividade na semelhança entre três triângulos, e em articular as informações dadas para extrair as relações métricas e conclusões. A autora acrescenta que vários desses obstáculos puderam ser minimizados pelas atividades de prática investigativa propostas, destacando também a importância de alterar a visão tradicional do ensino ao utilizar propostas que sejam atraentes para os alunos.

Vaz (2021) realizou uma pesquisa com o objetivo de propor algumas atividades para explorar as relações métricas no triângulo retângulo através da linguagem de programação Scratch. O autor apoiou-se no uso das tecnologias da informação e comunicação (TIC's) na educação, destacando a evolução tecnológica no mundo e a necessidade de a educação acompanhar esse processo, incorporando as tecnologias como recursos educacionais a serem utilizados, entrando em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que também defende estabelece essa inserção.

Dessa forma, Vaz (2021) direciona o seu foco para propor uma série de oito atividades em formato de estudo dirigido, listadas no Quadro 4 a seguir, envolvendo a noção de relações métricas no triângulo retângulo, as quais não foram aplicadas devido à situação envolvendo a Covid-19. As

atividades envolvem uma apresentação do Scratch, abordagem de conhecimentos básicos da geometria, para então focar nas relações métricas, deduzindo-as e generalizando-as.

Quadro 4: Atividades propostas por Vaz (2021).

Atividades	Objetivos
1: Apresentação do Scratch	Apresentar o Scratch aos alunos. Desenvolver o conhecimento sobre posições do ator no palco. Capacitar os estudantes a utilizarem a ferramenta caneta para desenhar livremente no palco.
2: Desenhando e medindo segmentos	Capacitar os estudantes a desenharem e medirem segmentos, através da utilização de blocos de diversas categorias.
3: Desenhando ângulos	Representar ângulos no Scratch utilizando a ferramenta “Caneta” juntamente com blocos das categorias “Movimento” e “Eventos”.
4: Desenhando segmentos perpendiculares	Desenvolver no estudante a capacidade de desenhar segmentos perpendiculares no Scratch.
5: Desenhando triângulos	Construir triângulos utilizando a linguagem de programação Scratch.
6: Deduzindo as relações métricas no triângulo retângulo - parte 1	Desenvolver nos estudantes a capacidade de calcular a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo através da fórmula da área. Iniciar a dedução das relações métricas no triângulo retângulo.
7: Deduzindo as relações métricas no triângulo retângulo - parte 2	Permitir que o aluno termine de deduzir as relações métricas no triângulo retângulo.
8: Generalizando as relações métricas	Generalizar as relações métricas obtidas na atividade anterior.

Fonte: Adaptado de Vaz (2021).

Silva (2021) teve como objetivo de pesquisa analisar os resultados da estratégia de utilização do geogebra para professores em sua atividade de ensino de matemática, trazendo um estudo sobre as contribuições desse software para o ensino das relações métricas no triângulo retângulo. Para isso, foi realizada uma apresentação do software para os professores participantes, mostrando as ferramentas e um método de ensino para a noção matemática supracitada.

O autor destaca que o ensino de matemática enfrenta diversos

obstáculos na educação básica, no que diz respeito às metodologias utilizadas pelos professores, caracterizada pela falta de interesse por parte dos alunos e pelo fato de as práticas pedagógicas não acompanharem as mudanças tecnológicas no contexto social. Silva (2021) destaca então a importância dos professores de matemática buscarem novas ideias e alternativas para suas práticas, apresentando como proposta a utilização do software geogebra.

Segundo o autor, uma das maiores dificuldades dos alunos com a aprendizagem de matemática é a de determinar valores representados por letras, o que acaba sendo bastante requisitado em atividades com a noção de relações métricas no triângulo retângulo ao solicitar que se determine a altura ou a distância em relação a algum objeto utilizando-se das relações métricas. Para superá-lo, Silva (2021) salienta que o professor precisa construir situações problema de forma contextualizada de modo a tornar as noções mais claras para os alunos, apoiando-se em novos recursos como os tecnológicos, que venham potencializar o ensino.

Com relação aos dados encontrados na pesquisa, Silva (2021) verificou que grande parte dos professores sabe da existência do geogebra, entretanto o nível de conhecimento de utilização tem uma predominância regular e ruim, e a grande maioria não o utiliza ou utiliza raramente. Foi desenvolvida uma atividade em forma de estudo dirigido com os comandos de construção no geogebra para os professores deduzirem as relações métricas no triângulo retângulo, apoiando-se na semelhança de triângulos.

Considerações finais

Através da análise do ensino usual das relações métricas no triângulo retângulo com uma investigação no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, foi possível identificar 23 pesquisas, sendo 22 dissertações e 1

tese, o que evidencia uma concentração muito maior deste tema em pesquisas de mestrado.

As pesquisas analisadas permitiram entender que, ao considerar a noção de relações métricas no triângulo retângulo como o objeto matemático em pesquisa, esta foi empregada como objeto central de sete pesquisas, dividiu o foco com outras noções matemáticas em nove pesquisas, foi utilizada como conhecimento para fundamentação teórica e base de demonstrações em três pesquisas, e como resultado de aplicação de outras noções matemáticas em três pesquisas.

Estes trabalhos foram direcionados para a utilização de recursos didáticos para trabalhar com a noção de relações métricas no triângulo retângulo, exemplos de aplicações desta noção, a construção e aplicação de sequências didáticas, e explorações em demonstrações. Algumas pesquisas traziam consigo situações do ambiente de sala de aula, envolvendo o trabalho com as relações métricas, evidenciando dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem.

Com isso foi possível identificar que alguns obstáculos na aprendizagem estão associados a algumas estratégias metodológicas utilizadas por professores, a não construção adequada dos conceitos dos elementos do triângulo retângulo, ao foco nas aplicações das relações métricas como fórmulas, a generalizações apressadas sem utilização das demonstrações, que refletem também na dificuldade de estabelecer as relações métricas adequadas para cada situação problema proposta.

Tais informações são muito importantes para uma pesquisa de EDC pois direcionam a construção de uma sequência de ensino, tendo em vista as ações a serem realizadas para que tenham o potencial de sanar e/ou minimizar as dificuldades encontradas em sala de aula.

Analysis of Usual Teaching of the Notion of Metric Relations in the Right

Triangle: An Investigation in the Capes Catalog of Theses and Dissertations

Abstract...

This article is an excerpt from a dissertation research and aims to identify difficulties in teaching and learning the notion of metric relations in the right triangle through the study of research in the Catalog of Theses and Dissertations of the Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel (CAPES). This investigation corresponds to a substage of the Preliminary Analyses of Classical Didactic Engineering (EDC) of the then dissertation, namely, the analysis of usual teaching and its effects. To this end, a search was carried out in published works on the aforementioned mathematical notion, in which it is possible to search for difficulties faced by students in the learning process, and by teachers in the teaching process. Twenty-three works were located, however, one of them was not analyzed because it was not in the public domain, which made its analysis impossible beyond the abstract. The analyzed works presented guidelines for the use of teaching resources, the construction and application of teaching sequences, examples of applications and explorations of metric relations in demonstrations. Some studies addressed situations in the classroom environment, highlighting difficulties in the teaching and learning processes, which is important information for EDC research as it guides the construction of a teaching sequence.

Keywords: Metric relations in the right triangle; Classical Didactic Engineering; Analysis of usual teaching; Dissertations and theses.

Referências

ALMOULOU, Ag Saddo. **Fundamentos da didática da matemática**. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ARTIGUE, Michèle. **Ingénierie Didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, p. 281-308, 1998.

ALVES, Clenilton Fernandes. **Trigonometria e Números Complexos**: uma abordagem elementar com aplicações. São Luís: UFMA, 2019. Dissertação, Universidade Federal do Maranhão, 2019.

BATISTA, Orleilson Agostinho Rodrigues. **O uso dos recursos didáticos do ensino de matemática para alunos surdos**: uma proposta de material voltado para o ensino de matrizes e das relações métricas no triângulo retângulo. Rio Branco: UFAC, 2016. Dissertação, Centro de Ciências Biológicas e da Natureza, Universidade Federal do Acre, 2016.

BRITO, Andréia Aparecida da Silva. **Relações entre os conhecimentos, as**

atitudes e a confiança dos alunos do curso de licenciatura em matemática em resolução de problemas geométricos. Bauru: UNESP, 2008. Dissertação, Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, 2008.

CABRAL, Sabrina Alves Boldrini. **Desenvolvendo o pensamento argumentativo geométrico:** construindo práticas investigativas. Belo Horizonte: PUC Minas, 2017. Dissertação, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2017.

CARVALHO, João Carlos Estevam de. **Uma proposta para inclusão da relação de Gerbert (Papa Silvestre II) no ensino básico.** Belém: UFPA, 2018. Dissertação, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, 2018.

COSTA, Márcio Alisson Leandro. **Semelhança de triângulos:** uma abordagem para o ensino básico. Juazeiro do Norte: UFCA, 2017. Dissertação, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal do Cariri, 2017.

FERREIRA, Anderson Portal. **O ensino de relações métricas no triângulo retângulo por meio de atividades.** Belém; UFPA, 2018. Dissertação, Centro de Ciências Sociais e Educação, Universidade do Estado do Pará, 2018.

FONSECA, Natally Palaro da. **Laboratório de ensino de matemática no processo de ensino- aprendizagem.** Curitiba; UFPR, 2018. Dissertação, Universidade Federal do Paraná, 2018.

LEITE, Adriane de Oliveira. **Material complementar para o professor da rede SESI-SP de ensino:** semelhança e software GeoGebra. Sorocaba: UFSCar, 2015. Dissertação, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, 2015.

LEITE, Rondineli Schulthais. **O ensino de parte da geometria do ensino fundamental: análise de dificuldades e sugestão de sequência didática.** Vitória: Ufes, 2013. Dissertação, Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, 2013.

LEMONS, Andrielly Viana. **Estudos de recuperação no Ensino Fundamental:** uma investigação no âmbito da geometria sob a perspectiva do enfoque ontossemiótico do conhecimento e da instrução matemática. Canoas: Ulbra, 2017. Tese, Universidade Luterana do Brasil, 2017.

LIMA, Jhonatan da Silva. **Belém 400 anos:** aplicações das relações métricas do triângulo retângulo e lei dos cossenos na cidade das mangueiras. Belém: UFPA, 2016. Dissertação, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, 2016.

LIS, Osmarilda Cariolatto. **Bases intuitivas para a formação dos conceitos do produto escalar, do produto vetorial e do produto misto – Parte I.** Curitiba; UFPR, 2018. Dissertação, Universidade Federal do Paraná, 2018.

OLIVEIRA FILHO, Amaro José de. **O Teorema de Pitágoras**. Recife: UFRPE, 2016. Dissertação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.

OLIVEIRA, Thais Andrade de. **Práticas investigativas nas aulas de matemática: relações métricas em questão**. Belo Horizonte: PUC Minas, 2021. Dissertação, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2021.

PAULA, Samantha Chang Rodrigues de. **Educação matemática e tecnologia: uma proposta para o ensino das relações métricas no triângulo retângulo com auxílio de um software educacional**. Vassouras: USS 2014. Dissertação, Universidade Severino Sombra, 2014.

PIRES, Karl Marlow. **Relações métricas no triângulo retângulo com Geogebra**. São José do Rio Preto: UNESP, 2018. Dissertação, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2018.

RAMOS, Mirla Vieira. **Percepções de alunos do 3º ano do ensino médio sobre o ensino e aprendizagem da trigonometria**. Cajazeiras: IFPB. 2021. Monografia, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, 2021.

SANTOS, Ricardo Ferreira dos. **O uso da modelagem para o ensino da função seno no ensino médio**. São Paulo: PUC SP, 2014. Dissertação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2014.

SILVA, Wilson de Araújo. **Recursos didáticos para professores de matemática: um estudo sobre as contribuições do geogebra no ensino das relações métricas no triângulo retângulo**. Florianópolis: IFPI, 2021. Dissertação, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, 2021.

SILVEIRA, Analice de Oliveira. **Bases intuitivas para a formação dos conceitos do produto escalar, do produto vetorial e do produto misto – Parte III**. Curitiba: UFPR, 2018. Dissertação, Universidade Federal do Paraná, 2018.

TELES, Andressa Charlene Fernandes. **Bases intuitivas para a formação dos conceitos do produto escalar, do produto vetorial e do produto misto – Parte II**. Curitiba: UFPR, 2018. Dissertação Universidade Federal do Paraná, 2018.

VAZ, Lucas dos Santos. **Relações métricas no triângulo retângulo através da linguagem de programação scratch: uma proposta de atividades**. Cornélio Procopio: UTFPR, 2021. Dissertação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021.