Congruência de triângulos: investigando a existência de conexões na Geometria Euclidiana e na do Táxi

José Carlos Pinto Leivas[1], Denise Kriedte da Costa[2]

Resumo

Este artigo apresenta uma pesquisa qualitativa que objetivou investigar conexões entre relações de congruência em triângulos na Geometria Euclidiana e na Geometria do Táxi de modo a possibilitar a inserção dessa geometria não euclidiana na educação básica, em especial nas aulas de matemática no Ensino Fundamental e no Médio. A Geometria do Táxi possibilita ligação com conteúdos da Educação Básica como, por exemplo, deslocamentos urbanos, que estão diretamente relacionados ao cotidiano dos estudantes. Para a construção dessa relação, foram elaboradas cinco atividades que levaram os estudantes de um mestrado no sul do Brasil a explorar congruências nessa geometria, evidenciando as diferenças existentes entre a Euclidiana e a do Táxi, considerada não-euclidiana por apresentar uma métrica diferenciada da primeira. Na última atividade, foi proposta uma sequência de tarefas que conduziam à seguinte questão geral: Existe conexão entre congruência de triângulos na perspectiva da Geometria Euclidiana e na do Táxi? Apesar do tema ser algo novo para os alunos participantes de da pesquisa, pôde-se concluir um grande interesse dos mesmos, todos professores da escola básica, pelo fato do tema proporcionar relação com seu cotidiano, além de ter um resultado satisfatório no que diz respeito ao resgate de conceitos da Geometria Euclidiana.

Palavras-chave: Investigação matemática. Formaçao continuada de professores. Geometria não Euclidiana. Geometria do Táxi.

Recebido em: 15/05/2025; Aceito em: 15/11/2025

https://doi.org/10.5335/f9kyxh50

http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0

ISSN: 2595-7376

[1] Professor da UFN. Doutor em Educação (Matemática) pela UFPR. Lider do GEPGEO. Prof. Titular aposentado da FURG, E:mail: leivajc@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6876-1461

[2]Doutorado em Educação em Ciências da Vida e Saúde – UFRGS. E-mail: denise.kriedte@gmail.com; https://orcid.org/0000-0002-2403-725-X

Considerações iniciais

Não é raro encontrar-se vizinhos convidando para circular nas redondezas de suas residências, quer para uma atividade física, quer para se dirigir a uma mercearia ou, simplesmente, encontrar pessoas. No dicionário[3] a palavra 'circular' aparece, como verbo intransitivo, com os significados "partir de um ponto e voltar a ele por outro caminho ou ducto"; "Andar à volta "GIRAR", por exemplo. Como verbo transitivo, "Estar ou dispor à volta de CERCAR, RODEAR"; "Andar à volta de "CIRCUNDAR".

Transportando-se a cidades urbanizadas, organizadas, em geral em quadras, duas pessoas se encontram e expressam: "vamos dar uma volta na nossa quadra para encontrar nossos conhecidos". Fica-se a imaginar o que pensariam aquelas pessoas que vislumbram aspectos de Geometria envolvidos neste dizer, uma vez que, em geral, andar ao redor, intuitivamente, leva a imaginar 'o circular ao redor da quadra'.

Um geômetra euclidiano, provavelmente, não contestaria tal locução, muito menos indivíduos não matemáticos e, quiçá, muitos dos matemáticos também. Assim, se poderia prolongar a conversa e refletir se o tal 'andar ao redor ou circular fosse feito por um táxi que não localiza a residência de um cliente (em tempos de inexistência dos aplicativos!).

Na formação do professor de Matemática, em particular, acredita-se ser relevante dar indícios de formação geométrica para além da euclidiana, de modo que ele venha a ter olhares para além do que é, em geral, realizado tanto na sua formação inicial, quanto na dos futuros alunos que estarão sob sua orientação. Assim, ter compreensão em Matemática vai além da mera reprodução. Nesta direção, Rodrigues, Freitas e Rodrigues (2023, p.

---

[3] "circular", in Dicionário Priberam da Língua Portuguesa [em linha], 2008-2013, https://dicionario.priberam.org/circular [consultado em 14-09-2020].

3) apresentam “a concepção de que o conhecimento matemático adquirido na academia, ou nela produzido, deve ser necessariamente transposto até a escola”, o qual não deve acontecer apenas pelo transmitir o conteúdo, senão a sua compreensão.

A respeito de compreensão, Skemp (2016a, p.45) faz uma distinção entre dois tipos: relacional, a qual consiste em “saber o que fazer e porquê”, e instrumental, a qual significa, para o autor, “regras sem fundamentação”. Afirma ele, a respeito da instrumental, que os estudantes e professores a preferem por ser mais fácil de compreender; que ao obter uma página de respostas corretas torna-se mais visível; menos conhecimento envolvido tornando a obtenção da resposta mais rápida (Skemp, 2016b). No entanto, afirma que a compreensão relacional “é mais adaptável a novas tarefas” (p.24); “é mais fácil de recordar”; “o conhecimento relacional pode ser eficaz como um objeto a atingir em si mesmo”; “os esquemas são orgânicos em qualidade” (p.25).

Relacionando, ainda, à forma de compreensão em Matemática, Rittle-Johnson e Schneider (2015) caracterizam o desenvolvimento do conhecimento conceitual e o do procedimental. Para os autores, os dois tipos de desenvolvimento nem sempre podem ser separados. O conceitual, em geral, não é vinculado a um problema específico, o que indica ir ao encontro do relacional de Skemp (2016a,b). Esse conhecimento, geralmente, não está vinculado aos tipos de problemas específicos. Os autores indicam existir consenso de que o conhecimento conceitual deve ser definido como conhecimento de conceitos.

Por sua vez, o conhecimento procedimental consiste em uma série de etapas, ou ações, realizadas para atingir uma meta. Por exemplo, conhecimento procedimental é “saber como” ou “o conhecimento das etapas necessárias para atingir vários objetivos”. Podem ser:

> (1) algoritmos - uma sequência predeterminada de ações que levará à resposta correta quando executada corretamente, ou (2) ações possíveis que devem ser sequenciadas adequadamente para resolver um determinado problema (por exemplo, etapas de solução de equações (Rittle-Johnson e Schneider, 2015, p.4). Esse conhecimento se desenvolve através da prática de solução de problemas e, portanto, parece ir ao encontro da compreensão instrumental de Skemp (2016a,b).

A partir dessas considerações preliminares sobre o conhecimento geométrico de professores e futuros professores em uma aula de Geometria em um programa de formação continuada de professores, justifica-se uma investigação que busque averiguar se existem conexões entre relação de congruência em triângulos na Geometria Euclidiana e na Geometria do Táxi ou Geometria Urbana.

Fundamentação teórica

A BNCC (Brasil, 2018) relativa ao Ensino Médio, no que diz respeito à área de Matemática e suas tecnologias, aponta a necessidade de ampliar as aprendizagens realizadas ao final do Ensino Fundamental. O documento propõe:

> [...] Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano [...]. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança (p. 517).

Na continuidade das aprendizagens pressupostas para o Ensino Fundamental, foca para o Ensino Médio:

> [...] a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, conforme anteriormente anunciado. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros (p. 519).

Percebe-se, pois, a necessária continuidade de desenvolver as habilidades já iniciadas no nível anterior, de modo que a escola contribua na ampliação da formação dos estudantes e, para tal, uma das competências preconizadas está diretamente relacionada à representação, o que "pressupõe a elaboração de registros para evocar um objeto matemático" (Brasil, 2018, p. 519). Nessa direção, realizar atividades investigativas na formação continuada de professores, as quais possibilitem evocar novos conhecimentos geométricos, como os da Geometria do Táxi, constantes deste artigo, parecem ir na direção apontada pela BNCC.

A fim de que o professor ou futuro professor possa contribuir na formação de seus estudantes, julga-se pertinente que, em um curso de formação continuada, sejam também proporcionadas atividades que desenvolvam uma segunda competência apontada pela BNCC, a saber, a argumentação: "seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjeturas, com a apresentação de justificativas" (p. 519). Este é um dos objetivos da disciplina de Geometria da qual participam os envolvidos na investigação constante do presente artigo.

Para tanto, há necessidade da reflexão constante do professor sobre sua própria prática, suas potencialidades, dificuldades e limites. O reconhecimento de lacunas na sua formação pode desenvolver no professor um compromisso pedagógico com a aprendizagem de seus estudantes. Desse modo, abre-se um espaço de compreensão sobre a concepção de aprendizagem do próprio educador. Há uma interrelação entre a concepção de aprendizagem com a qual os professores operam e a forma como eles lidam com as diversas questões e desafios ligados ao processo de aprendizagem dos seus estudantes. Assim, o professor passa a refletir sobre sua condição de aprendiz, o que pode levá-lo a identificar problemas vivenciados pelos seus estudantes.

Ainda, em relação à BNCC e suas habilidades, destaca-se aqui a (EM13MAT3 08): “Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança” (p. 529). Nessa direção, são poucos os estudos no cenário nacional brasileiro que exploram congruências e semelhanças de triângulos em uma geometria que não a Euclidiana, como no caso da Geometria do Táxi, que é uma geometria bem próxima do mundo real, como a própria denominação indica. Essa também é designada como Geometria Urbana, uma vez que ela orienta, aproximadamente, os trajetos de um táxi ao longo das quadras de uma cidade urbanizada.

Basicamente, formas de medir são dadas, em Matemática, por meio de uma métrica, ou seja, uma função assim definida por Lima (2009, p. 20):

> Uma métrica num conjunto M é uma função d: M X M → R que associa a cada par de pontos x, y de M um número real d(x,y), chamado de distância do ponto x ao ponto y de tal modo que:
>
> $d(x,x) = 0$, $d(x,y) > 0$ se $x \neq y$;
>
> $d(x,y) = d(y,x)$;
>
> $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$;
>
> quaisquer que sejam $x,y,z \in M$.

Um conjunto munido de uma métrica constitui um espaço métrico, sendo o mais usual o denominado euclidiano, no qual se desenvolve, desde os primórdios da formalização geométrica por Euclides, a Geometria Euclidiana, cuja métrica no R^2 é dada por

$$d(X,Y) = \sqrt{\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ ,$$

$\forall X=(x_1,y_1),\ Y=(x_2,y_2) \in R^2$.

Ela é chamada métrica euclidiana, sendo denotada, doravante, por

d_E. Por sua vez, se define, no mesmo espaço, a métrica

$$d(X,Y) = |x_2-x_1| + |y_2-y_1|,$$

daqui para a frente, denotada por d_T, é denominada métrica do táxi ou dos catetos.

Resgata-se aqui o conceito clássico de dois triângulos congruentes na Geometria Euclidiana, como sendo aquele par em que é possível estabelecer uma relação de forma que os lados e os ângulos correspondentes de um com os do outro sejam congruentes, ou seja, é uma relação de equivalência no sentido de ser reflexiva, simétrica e transitiva. A literatura aponta os casos clássicos (Teoremas) de congruência de triângulos, a saber:

1. LAL. Se dois triângulos têm, ordenadamente congruentes, dois lados e o ângulo compreendido entre eles, então eles são congruentes.
2. ALA. Se dois triângulos apresentam, ordenadamente congruentes, um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então eles são congruentes.
3. LLL. Se dois triângulos têm, ordenadamente congruentes, os três lados, então eles são congruentes.
4. LAAo. Se dois triângulos têm, ordenadamente congruentes, um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a tal lado, então eles são congruentes.

Na sequência, apresenta-se alguns fundamentos sobre a Geometria do Táxi para chegar ao problema de pesquisa, no qual se irá estabelecer conexões entre as duas, particularmente, a respeito da existência ou não da congruência na segunda geometria. Ela é chamada métrica euclidiana, sendo denotada, doravante, por d_E. Por sua vez, se define, no mesmo espaço, a métrica

$$d(X,Y) = |x_2-x_1| + |y_2-y_1|,$$

daqui para a frente, denotada por d_T, a qual é denominada métrica do táxi ou dos catetos.

Krause (1986, p. 2), ao abordar essa geometria, afirma:

> a maneira usual de descrever uma geometria (plana) é dizer quais são seus pontos, quais são suas linhas, como a distância é medida e como a medida do ângulo é determinada. [...] A Geometria do Táxi é quase a mesma que a geometria das coordenadas euclidianas. Os pontos são os mesmos, as linhas são as mesmas e os ângulos são medidos da mesma maneira.[4]

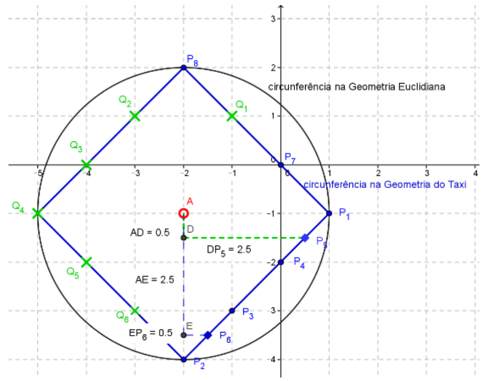
O autor vai um pouco além e indica que "A geometria do táxi é um modelo mais útil para geografia urbana do que a geometria euclidiana" (p. 12)[5]. Em um exemplo de problema prático envolvendo o deslocamento do centro de uma cidade urbanizada até o Museu, diz que somente um pombo se beneficiaria do conhecimento de que a distância euclidiana seria a adequada, uma vez que o deslocamento é a partir das quadras de uma cidade urbanizada.

Leivas (2003) faz a seguinte pergunta-título em seu artigo: Existem bolas quadradas? Nele, o autor faz uma analogia entre o lugar geométrico circunferência ou bola nas duas geometrias. A Figura 1 ilustra uma tal situação proposta em uma aula exploratória, que antecedeu a pesquisa descrita e analisada no presente artigo, com as duas métricas d_T e d_E, levando em consideração a representação de um conjunto de pontos específicos que podem conduzir os estudantes a comparar as duas, a partir do conhecimento da circunferência na Geometria Euclidiana.

---

[4] The usual way to describe a (plane) geometry is to tell what its points are, what its lines are, how distance is measured, and how angle measure is determined. Taxicab geometry is very nearly the same as Euclidean coordinate geometry. The points are the same, the lines are the same, and angles are measured in the same way.
[5] Taxicab Geometry is a more useful model of urban geography than is Eculidean geometry.

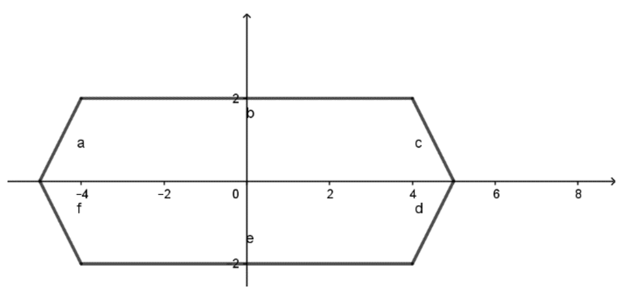
Figura 1 - Bola nas duas métricas.



Fonte: autoria própria

Em Leivas (2014) encontra-se uma pesquisa qualitativa na qual o autor investigou, em uma disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica, como os alunos de um Mestrado Profissional em Ensino de Matemática representam parábolas, hipérboles e elipses por meio da Geometria do Táxi. A Figura 2 ilustra uma elipse nessa geometria.

Figura 2 - Elipse na métrica d_T.



Fonte: próprio autor

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval foi empregada por Leivas e Vargas (2019) em uma pesquisa que abordou a Geometria do Táxi na resolução de um problema hipotético de determinação de um espaço público. Para tal, os investigados foram desafiados a buscar qual das duas geometrias, a Euclidiana ou a do Táxi, apresentava um melhor resultado.

Souza (2015), em sua dissertação de mestrado, investigou, em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio, curso de magistério, o uso da metodologia de Resolução de Problemas e do GeoGebra para reconstrução de conceitos de Geometria Analítica, a partir da realidade dos alunos. Utilizou, para coletar dados, questionários e diário de campo, concluindo que é possível estudantes desse nível de escolaridade compreenderem a d_T na resolução de problemas envolvendo deslocamentos realizados para ir da residência do aluno à escola.

Pavani (2017), em sua dissertação no PROFMAT, faz um estudo teórico sobre a Geometria do Táxi como uma ferramenta, a fim de consolidar conteúdos geométricos. O autor explora teoremas importantes, bem como relações de geometria plana estabelecendo conexões entre essa geometria e a euclidiana. Por fim, apresenta sugestões de problemas/atividades que podem vir a ser executadas por professores em suas salas de aula.

A partir dessa rápida incursão pelo mundo da Geometria do Táxi, percebe-se que ainda existem poucos trabalhos que estejam diretamente relacionados ao ensino nos diversos níveis de escolaridade e que se associem ao preconizado pela BNCC. Portanto, esse tema é digno de ser explorado em variados contextos e conteúdos.

Fundamentação Metodológica

O presente artigo apresenta uma pesquisa social empírica, no sentido apontado por Aarts e Bauer (apud Bauer e Gaskell, 2017, p. 39), para quem essa “seleciona evidência para argumentar e necessita justificar a seleção que é a base de investigação, demonstração, prova ou refutação de uma afirmação específica”. Em uma aula de dois períodos de 50 minutos cada, em um programa de pós-graduação, o primeiro autor, que é o professor da referida disciplina, estava desenvolvendo fundamentos de

Geometria do Táxi, um dos tópicos do plano pedagógico desta.

Considerando que um dos participantes é aluno do doutorado, dois são professores atuantes na escola básica e outros três, embora licenciados em Matemática, ainda não atuam no contexto escolar, houve por bem realizar uma atividade investigativa, levantando o seguinte objetivo de pesquisa: averiguar se existem conexões entre relação de congruência em triângulos na Geometria Euclidiana e na Geometria do Táxi ou Geometria Urbana.

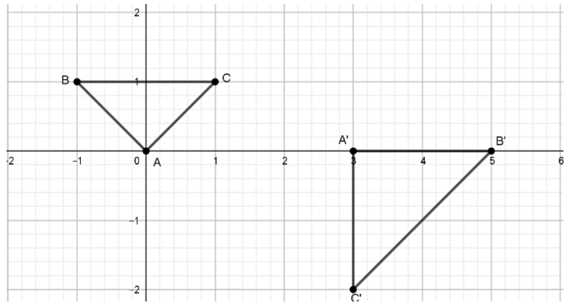
Em função do objetivo proposto, tratar-se-ão os dados coletados por meio de uma análise argumentativa, a qual, segundo Liakopoulos (apud Bauer e Gaskell, 2017, p. 218-219), consiste em trazer "o argumento para o primeiro plano da pesquisa [...], tem como objetivo oferecer uma visão metodológica compreensiva da análise das estruturas da argumentação [...]". Ainda de acordo com esse autor,

> o objetivo da análise de argumentação é documentar a maneira como afirmações são estruturadas dentro de um contexto discursivo, e avaliar sua solidez. A análise normalmente se centra na interação entre duas ou mais pessoas que apresentam argumentos como parte de uma discussão ou debate, ou sobre um texto dentro do qual a pessoa constrói um argumento (p. 219).

Os indivíduos foram organizados em três grupos de dois componentes cada, por meio de um sorteio aleatório, com nomes fictícios para evitar identificações: FlTn; JhPo; CaTh. Esses sujeitos deveriam se dirigir aos espaços designados como 1, 2, 3 na sala de aula, sendo que, sobre a mesa, havia atividades a serem resolvidas pela dupla e registradas para posterior entrega ao professor-investigador, sob o olhar atento do professor observador, segundo autor do artigo. Os alunos já estavam trabalhando neste conteúdo desde uma aula anterior. A questão foi a seguinte:

Dois triângulos ABC e A'B'C' são mostrados na Figura 3.

Figura 3 - analogias entre as duas geometrias



Fonte: dados da pesquisa

A partir da figura, foram solicitadas as atividades a seguir.

Observe e responda os quesitos a seguir, dando alguma justificativa.

d_T (A,B) = d_T (A’,B’)?

d_T (A,C)= d_T (A’,C’)?

med (ang BAC) = med (angB’A’C)?

Isso caracteriza um caso clássico de congruência de triângulos na Geometria Euclidiana? Se responder sim, qual?

A correspondência

A ⇔ A’, B ⇔ B’, C ⇔ C’,

faz ΔABC e ΔA’B’C’ possuírem lado-ângulo-lado de um, respectivamente, congruentes aos correspondentes lado-ângulo-lado do outro? Argumente.

É correta a relação ΔABC ≅ ΔA’B’C’ ? Por que sim ou por que não?

Qual a analogia que pode ser feita com a Geometria Euclidiana?

O investigador e o observador foiM observando o desenrolar das atividades e procurando não interferir, apenas respondendo a alguns poucos questionamentos quando solicitado. Próximo à finalização, percebendo alguma dificuldade na escrita, o professor solicitou gravar as conclusões daqueles que estavam com dificuldades em registrar, o que servirá para auxiliar nas análises. Nesse momento foi importante o auxílio do professor observador.

A respeito de análise, Sáenz-Ludlow e Athanasopoulou (2012, p. 23, trad. dos autores) indicam haver duas perguntas na mente do investigador: 1) “por que o sujeito cognitivo se vê obrigado a iniciar qualquer atividade ou experimento de pensamento?”; 2) “se pode decompor a atividade em unidades mais elementares às quais examinar?”.

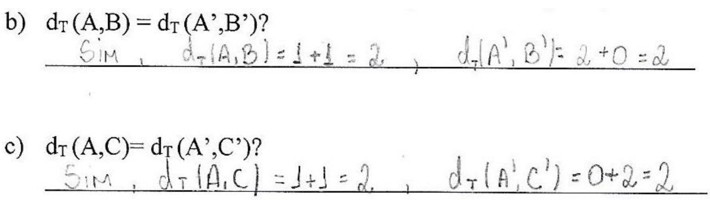
Portanto, faz sentido, na busca de uma conclusão, se há ou não uma conexão entre os casos clássicos de congruências de triângulos na Geometria Euclidiana com triângulos na Geometria do Táxi. Os indivíduos não foram obrigados a realizar a tarefa proposta, uma vez que eram atividades usuais de sala de aula, mas, se as realizassem, isso lhes permitiria adquirir conhecimentos de uma geometria, até então, desconhecida para eles, em resposta ao primeiro questionamento de Sáenz-Ludlow e Athanasopoulou (2012). Quanto ao segundo questionamento, um pesquisador experiente, como no caso dos autores do presente artigo, tende a dissecar uma dada questão de pesquisa de modo que os participantes dessa se sintam à vontade para ir buscando conhecimentos prévios sobre o tema, obtendo, assim, conclusões a respeito de tópicos similares em outro contexto teórico. Nesse caso, é possível partir do conhecimento da congruência de triângulos na Geometria Euclidiana para chegar às conclusões sobre o mesmo tema na Geometria do Táxi.

Análise dos Dados

Neste item do artigo será feita a análise dos dados coletados amparando-se nos pressupostos teóricos e metodológicos expostos anteriormente.

Analisando os registros das duplas aos itens b) e c), observa-se não ter havido dificuldades na obtenção do cálculo da d_T para as três duplas, variando apenas a forma de cada um. Assim, JhPo obtém o valor das distâncias de A até B e de A’ até B’, lados correspondentes nos dois triângulos como sendo 2u. Isso indica ir ao encontro do que Rittle-Johnson e Schneider (2015) caracterizam como conhecimento relacional, pois utilizam a representação geométrica dos triângulos associada à representação da função distância na Geometria do Táxi, como sendo a soma das medidas dos catetos do triângulo retângulo que se forma.

Figura 4 - Obtenção da distância pela dupla JhPo

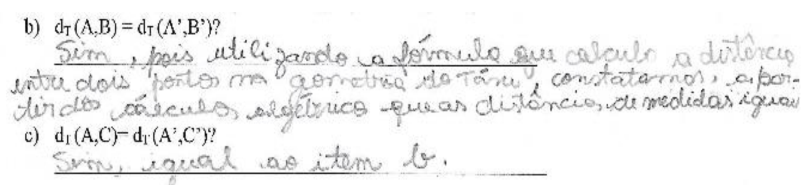

b) $d_T(A,B) = d_T(A',B')$?
Sim, $d_T(A,B) = 1+1 = 2$, $d_T(A',B') = 2+0 = 2$

c) $d_T(A,C) = d_T(A',C')$?
Sim, $d_T(A,C) = 1+1 = 2$, $d_T(A',C') = 0+2 = 2$

Fonte: dados da pesquisa

A dupla CaTh fez cálculo, como a dupla anterior, para informar que as duas distâncias respectivas de um triângulo e outro são iguais. Deixou explícita sua compreensão instrumental, no sentido apontado por Skemp (2016a, 2016b), na medida que informa ter usado a fórmula da d_T (Figura 5).

Figura 5 - Obtenção da distância pela dupla CaTh.


b) $d_T(A,B) = d_T(A',B')$?
Sim, pois utilizando a fórmula que calcula a distância entre dois pontos na geometria do Táxi, constatamos, a partir dos cálculos algébricos que as distâncias de medidas iguais
c) $d_T(A,C) = d_T(A',C')$?
Sim, igual ao item b.

Fonte: dados da pesquisa

A terceira dupla, FlTa, indicou o valor das duas distâncias e, a exemplo da anterior, explicitou o uso da fórmula para sua obtenção, como observa-se na Figura 6.

Figura 6 - obtenção da distância pela dupla FITa.

b) $d_T(A,B) = d_T(A',B')$?
$d_T(A,B) = 2 = d_T(A',B')$, pois para calcularmos a distância na Geometria do táxi, temos que $|x_A - x_B| + |y_A - y_B| = d_T(A,B)$

c) $d_T(A,C) = d_T(A',C')$?
$d_T(A,C) = 2 = d_T(A',C')$, pois para calcularmos a distância na Geometria do táxi, temos que $|x_A - x_C| + |y_A - y_C| = d_T(A,C)$

Fonte: arquivos dos pesquisadores.

No item d) foi solicitado que os indivíduos analisassem as medidas dos ângulos correspondentes BCD e A'B'C' sem fornecer outros indicativos para tal. Como os triângulos estavam representados em uma grade retangular, todos concluíram se tratar de 90º tal medida, uma vez que, no primeiro, era indicado o símbolo deste ângulo e, no segundo, ele era formado por duas linhas perpendiculares da grade. Embora não fosse solicitado justificativa para as respostas, a dupla diferenciou-se, como pode ser observado nas Figuras 7, 8 e 9, a seguir.

Figura 7 - medidas o ângulo pela dupla JhPo.

d) med(ang BAC) = med(angB'A'C)?
SIM, AMBOS SÃO 90°

Fonte: dados da pesquisa

Figura 8 - medidas dos ângulos pela dupla CaTh.

d) med(ang BAC) = med(angB'A'C)?
Sim, pois ambos os ângulos medem 90°, sendo assim congruentes.

Fonte: dados da pesquisa

Figura 9 - medidas o ângulo pela dupla FITa.

d) um triângulo ABD, com ângulo reto em D, e como os lados $\overline{BD}$ e $\overline{AD}$ são congruentes, então os ângulos $D\hat{B}A$ e $B\hat{A}D$ também são, portanto medem 45°. A mesma ideia é válida para o triângulo ADC. Logo, o triângulo ABC possui ângulo $B\hat{A}C$ igual a 90°.

Fonte: dados da pesquisa

Constata-se que os dois primeiros grupos foram mais objetivos, talvez, pela compreensão visual do que foi apresentado no enunciado da questão, enquanto que o grupo FlTa foi detalhista, argumentando, por exemplo, o valor de 45º dos outros dois ângulos do primeiro triângulo. Exploraram a mesma ideia para justificar o ângulo reto no segundo triângulo, não de forma muito precisa, pois o fato de os dois lados terem a mesma medida não justificaria o ângulo ser reto, senão pela observação oriunda da grade retangular. Essa percepção vai ao encontro do indicado por Liakopoulos (apud Bauer e Gaskell, 2017), de que "A análise normalmente se centra na interação entre duas ou mais pessoas que apresentam argumentos como parte de uma discussão ou debate" (p. 219).

A análise desses itens precedentes, ao que tudo indica, levaria os indivíduos associarem o caso clássico ALA da Geometria Euclidiana, como resposta ao item e). Apenas o grupo JhPo respondeu corretamente: "Sim, LAL" (JhPo).

A dupla CaTh registrou sua resposta assim: "Não, pois o caso AAA não define a congruência de triângulos, mas sim a semelhança" (CaTh). Constata-se, na resposta da dupla, não ter havido compreensão relacional, de acordo com Skemp (2016, 2016b), uma vez que a sequência prévia levaria à congruência na Geometria Euclidiana, porém não na Geometria do Táxi.

A terceira dupla FlTa, a exemplo da anterior, também não reconheceu a pretensa relação na Geometria Euclidiana e, embora não fosse solicitada justificativa para a negativa, assim a registraram: "Não, representaria um caso de semelhança de triângulos no caso clássico LAL" (FlTa). Portanto, confundiram os casos clássicos, isto é, o exemplo fornecido seria o caso de congruência na Geometria Euclidiana.

Um ponto culminante que se pretendia alcançar na investigação era certa conexão entre as duas geometrias. Nesse sentido, o item f) buscava que os participantes analisassem que na Geometria Euclidiana bastaria o caso de dois triângulos terem um ângulo congruente, compreendido entre dois lados congruentes (caso LAL). Com essa constatação, os dois triângulos congruentes deveriam ter todos os lados congruentes e todos os ângulos internos, por consequência, também congruentes, como indicado no teorema citado antes. No entanto, o lado BC do primeiro, que mede 2u, tem seu correspondente B'C' no segundo, medindo 4u. Assim, a resposta a esse item seria 'não'.

A dupla FlTa respondeu: "Sim, pois pela Geometria do Táxi, a métrica entre 2 pontos é calculada a partir de $|x_A - x_B| + |y_A - y_B|$, e neste caso dos triângulos ΔABC e ΔA'B'C', a $d_T(A,B) = d_T(A',B')$; $d_T(A,C) = d_T(A',C')$ e med(angBAC) = med(ang(B'A'C'), o que representa um caso de semelhança na Geometria Euclidiana". Assim, houve conflito conceitual entre semelhança e congruência de triângulos.

A dupla CaTh respondeu: "Não, pois para haver congruência LAL, é preciso que os lados sejam de mesma medida". A dupla percebeu, pois, a não congruência, embora não explicitando que o terceiro lado não é congruente, portanto, tendo o conceito de congruência bem definido.

De modo similar, porém com uma outra forma de registro, a dupla JhPo afirma: "Não, pois $d_T(B,C) \neq d_T(B',C')$", levando à conclusão de que tem o conceito bem definido.

No item g) buscava-se verificar se os alunos conseguiam culminar na constatação que o caso LAL de congruências na Geometria Euclidiana não valia para a Geometria do Táxi. Além disso, solicitava-se justificativa tanto para o caso afirmativo quanto para o negativo. Em sendo assim, a dupla JhPo respondeu: "Não, $d_T(B,C) = 2$ e $d_T(B',C')=4$". A dupla é sintética ao caracterizar a razão da não congruência, indicando ter clareza daquele conceito. De forma similar, a dupla FlTa responde: "Na Geometria do Táxi o caso não representa congruência, pois o lado $\overline{BC}$ é diferente do lado $\overline{B'C'}$ ".

Por último, a dupla CaTh responde: “Não, pois os lados não têm a mesma medida, não valendo a relação de congruência”.

Isso corrobora o que Rittle-Johnson e Schneider (2015) afirmam a respeito de compreensão em Matemática. A sequência de atividades realizadas e as respostas ao último item indicam que tanto o conhecimento conceitual quanto o procedimental foram mobilizados, a fim de que os alunos concluíssem que, buscando conexões entre o caso clássico específico LAL de congruência de triângulos na Geometria Euclidiana, não havia equivalente na Geometria do Táxi.

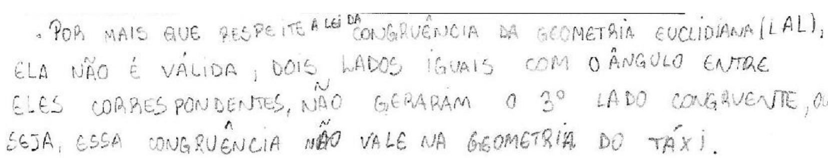
Na direção do apontado no parágrafo precedente, o próximo item da sequência de atividades buscava analisar se os estudantes haviam conseguido estabelecer analogias do que fora feito na Geometria do Táxi com o que conheciam sobre Geometria Euclidiana. O grupo CaTh parece ter invertido a conclusão que chegaram: “A analogia que podemos fazer é que acontece na Geometria do Táxi nem sempre é valido para a euclidiana”. Questionados sobre a certeza do que haviam escrito/concluído, registraram em áudio que, de fato, haviam se equivocado na hora de registrar, pois era o inverso do que haviam concluído.

Por sua vez, a dupla FlTa registrou erroneamente sua conclusão a respeito: “Considerando a definição de semelhança na Geometria Euclidiana, os triângulos são semelhantes em ambas geometrias, devido ao caso LAL”. Em decorrência da resposta dada pela dupla ao item f), ao que tudo indica, de fato, apresentam conflito cognitivo no que diz respeito ao conhecimento prévio sobre congruência e semelhança de triângulos. Por sua vez, não verificaram diferença entre as duas geometrias a respeito de congruências.

A conclusão do grupo JhPo apresenta dois aspectos. O primeiro, busca estabelecer uma conexão de que ângulos de mesma medida geram lados de mesma medida, a qual parece não ter significado. Talvez estivessem a pensar em que lados opostos a ângulos iguais apresentam a mesma medida na Geometria Euclidiana, enquanto que na Geometria do Táxi isso não ocorre, como pode ser observado na Figura 3, que desencadeou a sequência de atividades aqui analisadas. Observa-se que o lado oposto ao ângulo reto no primeiro triângulo mede 2u, enquanto, no segundo, 4u.

Em relação ao segundo aspecto, expressam o que consta na Figura 10.

Figura 10 -resposta do grupo JhPo.


- POR MAIS QUE RESPEITE A LEI DA CONGRUÊNCIA DA GEOMETRIA EUCLIDIANA (LAL), ELA NÃO É VÁLIDA; DOIS LADOS IGUAIS COM O ÂNGULO ENTRE ELES CORRESPONDENTES, NÃO GERARAM O 3º LADO CONGRUENTE, OU SEJA, ESSA CONGRUÊNCIA NÃO VALE NA GEOMETRIA DO TÁXI.

Fonte: dados da pesquisa.

Portanto, a dupla chega ao que se esperava da sequência de atividades, culminando na conclusão que a relação de congruência de triângulos, correspondente ao caso clássico LAL da Geometria Euclidiana, não é válida na Geometria do Táxi. Portanto, isso responde ao problema de pesquisa aqui abordado. Nesta análise, percebe-se um fato indicado por Sáenz-Ludlow e Athanasopoulou (2012, p. 23) em uma pesquisa, ou seja, “atividade ou experimentação tanto por meios visuais quanto de próprio modo de pensar por que o sujeito decompor a atividade em unidades mais elementares às quais examinar”. Dessa forma, dissecar a atividade pode proporcionar ao indivíduo a realização de uma atividade de forma eficaz no desenvolvimento do pensamento.

Considerações

Neste artigo, buscou-se investigar se seis estudantes de um programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, durante uma aula de Geometria em que o tema era Geometria do Táxi, conseguiam estabelecer conexões entre conhecimentos de congruência de triângulos na Geometria Euclidiana e na Geometria do Táxi. Muito embora possa parecer que o grupo focal é reduzido, em geral, em disciplinas de tal nível de ensino isso ocorre com frequência. Julgou-se oportuno realizar a pesquisa com este grupo focal por envolver dois professores do programa em que atuam e aproveitar a oportunidade de se estar desenvolvendo o conteúdo programático. Além disso, na pesquisa qualitativa o importante é a análise dos dados coletados sobre os sujeitos investigados, independente do número desses.

Inicialmente, buscou-se algumas fundamentações teóricas, basicamente a partir da BNCC, especialmente no que ela preconiza em termos de Geometria para o Ensino Médio, por exemplo, no que diz respeito a habilidades necessárias, destacando-se a EM13MAT3(08), que orienta "Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança" (p. 529). Escolheu-se atacar um caso clássico de congruência de triângulos para averiguar se o mesmo também valeria em uma geometria que não fosse euclidiana, a saber, a Geometria do Táxi, do taxista ou urbana, conforme diversificação de nomenclatura.

Pesquisas existentes nessa área são bastante restritas, tendo sido indicadas algumas que exploram outros aspectos que não o abordado na presente pesquisa. Nessa direção, foi feita uma análise discursiva a partir dos registros escritos dos investigados, embasada, principalmente, na compreensão destes a respeito da matemática contida na sequência elaborada para analisar se o conhecimento envolvido se centrava mais no conhecimento conceitual ou procedimental, em analogia à compreensão relacional e instrumental.

Concluiu-se que os estudantes exploraram, até certo ponto, seus conhecimentos prévios em termos relacionais ou procedimentais/instrumentais, e que, em alguns pontos, os conhecimentos conceituais deixaram a desejar, uma vez que determinadas duplas confundiram casos clássicos de congruência com os de semelhança de triângulos. Entretanto, as duplas não deixaram de considerar a compreensão relacional, uma vez que, ao final, buscaram compreender que o caso clássico de congruência LAL não valia para a Geometria do Táxi.

Assim, acredita-se que o objetivo da pesquisa de averiguar se existem conexões entre relação de congruência em triângulos na Geometria Euclidiana e na Geometria do Táxi ou Geometria Urbana foi cumprido, uma vez que dois dos grupos concluíram a não existência, enquanto o outro confundiu-se com os conceitos de semelhança e congruência na finalização. Há de ser considerado que este conteúdo, via de regra, é explorado no Ensino Fundamental de forma memorística, requerendo basicamente a compreensão instrumental, ou seja, regras prontas.

Portanto, como indicado por Liakopoulos (apud Bauer e Gaskell, 2017), os argumentos fornecidos pelos estudantes permitiram aos investigadores uma visão compreensiva do tema congruência em uma geometria diferente daquela ensinada no âmbito escolar e acadêmico. Desse modo, espera-se que novas investigações possam vir a contribuir para inserção, na escola, dessa geometria que está no mundo real do estudante e, portanto, inseri-la em um curso de formação continuada de professores pode gerar novas aprendizagens, corroborando para esse objetivo maior. Por sua vez, a análise realizada, envolvendo duplas de estudantes para buscar responder ao problema, vai ao encontro do que preconizou o autor em suas argumentações.

Triangles's congruence: investigating the existence of connections in Euclidian and Táxi cab Geometry

Abstract

This article presents a qualitative research that aimed to investigate connections between congruence relations in triangles in Euclidean Geometry and Taxi Geometry in order to enable the insertion of this non-Euclidean geometry in basic education, especially in mathematics classes in Elementary and High School. Taxi Geometry enables connections with Basic Education content, such as urban travel, which is directly related to students' daily lives. To construct this relationship, five activities were designed that led students on a master's degree in southern Brazil to explore congruences in this geometry, highlighting the differences between the Euclidean and the Taxi geometry, considered non-Euclidean because it presents a different metric from the first. In the last activity, a sequence of tasks was proposed that led to the following general question: Is there a connection between congruence of triangles from the perspective of Euclidean Geometry and that of the Taxi? Although the topic was something new for the students participating in the research, it was possible to conclude that they were very interested, all of them elementary school teachers, due to the fact that the topic provided a connection with their daily lives, in addition to having a satisfactory result with regard to the recovery of concepts of Euclidean Geometry.

Keywords: Mathematical investigation. Continuing teacher education. Non Euclidian Geometry.

Referências

BAUER, Martin.; AARTS, January Bas. A construção do corpus: um princípio para a coleta de dados qualitativos. *In*: BAUER, Martin; GASKEL, Georg (org) **Pesquisa qualitativa com texto: imagem e som: um manual prático**. 13a. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2017, pp. 39-63.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**~- Educação é a Base – Ensino Médio. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. 2017.

GATTI, Maria Regina. (2005). Os professores e suas concepções de aprendizagem: uma contribuição para o debate sobre formação e prática docentes. In: **Anais do IV Fórum de Investigação Qualitativa e III Painel Brasileiro/Alemão de Pesquisa** {CD Room]. Juiz de Fora: Feme.

KRAUSE, Eugene. ***Taxicab geometry****: an adventure in Non-Euclidean Geometry*. Califórnia: Addison-Wesley Publishing Company, 1986.

LEIVAS, J.C.P. Existem bolas quadradas? **Educação Matemática em Revista - RS**, n. 5,2003, pp.21-28.

LEIVAS, J.C.P. Elipse, parábola e hipérbole em uma geometria que não é euclidiana. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.9, n. 2, p. 189-209, 2014

LEIVAS, J.C.P.; BARGAS, A.F.. Superfícies Quádricas e o Ensino de Geometria Analítica: Interseções na Pesquisa. **Revista REAMEC**, Cuiabá -MT, v. 7, n. 3, setdez2019, ISSN: 2318-667 2029

LIAKOPOULOS, M. Análise argumentativa. *In*: BAUER, Martin. W.; GASKEL, George. (org) **Pesquisa qualitativa com texto**: imagem e som: um manual prático.13a. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2017, pp.218-243.

LIMA, Elon Lages. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.

SÁENZ- LUDLOW, Adalira; ATHANASOPOULOU, A. Diversión y demonstración, percepción sensorial e inferencia. *In*: **Investigaciones en educación ge**ométrica. Leonor Camargo Uribe (compilador). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2012, pp.11-50.

PAVANI, Vítor Vaz. **A Geometria do Taxista como ferramenta de consolidação de conteúdos**. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Santo André, 2017, 106 fls.

RITTLE-JOHNSON, Bethany.; SCHNEIDER, Michael. Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. **The Oxford Handbook of Numerical Cognition**. Ed. Roi Cohen Kadosh and Ann Dowder. Oxford University Press. Jul 2015, pp.1-22. Disponível em:https://www.oxfordhandbooks.com/view/10.1093/oxfordhb/9780199642342.001.0001/oxfordhb-9780199642342-e-014. Acesso em 14 set. 2023.

RODRIGUES, Adriege, FREITAS, Izabela Barbosa, RODRIGUES, Ana Cláudia da Silva. Formação inicial de professores: percepções sobre a formação Matemática. **REMAT,** v.20, n. 01, p. 01-19, 2023. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/496/560. Acesso em 05 abr. 2025.

SÁENZ-LUDLOW, Adalira. Diversión y demonstración, percepción sensorial e inferencia. In: **Investigaciones en educación ge**ométrica. Leonor Camargo Uribe (compilador). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2012, pp.11-50.

SKEMP, Richard. Compreensão relacional e compreensão instrumental. **Educação e Matemática**. v.136, pp.44-48, 2016a.

__________ Compreensão relacional e compreensão instrumental. **Educação e Matemática**. v.137, pp.24-28, 2016b.

SOUZA, Helenara Machado. de. **A Geometria do Táxi:** investigação sobre o ensino de uma Geometria Não Euclidiana para o terceiro ano do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática da Universidade Franciscana). Santa Maria, 2015, 140 p.