Tendências para Organizadores Prévios com vistas à Aprendizagem Significativa em demonstrações matemáticas

Trends for Prior Organizers for Meaningful Learning in Mathematical Demonstrations

Tendencias de Organizadores Previos para el Aprendizaje Significativo en Demonstraciones Matemáticas

Maria Cecília Pereira Santarosa[*]
Vaneza de Carli Tibulo[**]

Resumo

Na perspectiva da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, para que haja Aprendizagem Significativa, o novo conhecimento deve se relacionar com conceitos prévios específicos da estrutura cognitiva do aprendiz, de forma não arbitrária e não literal. No que se refere às demonstrações matemáticas, é necessário a ocorrência dos três tipos de aprendizagem significativa: representacional, conceitual e proposicional. Uma forma de favorecer aprendizagens significativas, quando o aluno não possui conhecimentos prévios necessários, é a utilização de Organizadores Prévios, que funcionam como "pontes cognitivas" entre o que ele já sabe e o que precisa saber para a nova aprendizagem. A presente pesquisa tem por objetivo apresentar e investigar estratégias de ensino para demonstrações matemáticas, que possam favorecer a aprendizagem significativa de acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática. Desta forma, foi elaborada e implementada uma proposta de Organizadores Prévios no ensino de demonstrações matemáticas, ancoradas nas tendências em Educação Matemática: a História da Matemática, a Manipulação de Material Concreto e a Resolução de Problemas. A implementação do Organizador Prévio proposto, por meio de uma pesquisa-ação, tem apresentado resultados satisfatórios no que se refere a evidências de aprendizagem significativa em demonstrações matemáticas, favorecendo a formação profissional dos acadêmicos.

Palavras-chave: Aprendizagem Significativa; Organizadores Prévios; Tendências em Educação Matemática; Pesquisa-ação.

Recebido em: 20.12.2021 — Aprovado em: 21.02.2022
https://doi.org/10.5335/rep.v29i2.13269
ISSN on-line: 2238-0302

[*] Docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Doutora em Ensino de Física pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e co-líder do Grupo de Pesquisas em Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática (GPEACIM). Orcid: https://orcid.org/0000-0002-7656-9100. E-mail: maria-cecilia.santarosa@ufsm.br

[**] Doutora em Educação em Ciências pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Professora do Departamento de Matemática da UFSM e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física (PPGEMEF) da UFSM. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-7139-1112. E-mail: vaneza.tibulo@ufsm.br.

Este artigo está licenciado com a licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Internacional.

Abstract

From the perspective of Ausubel's Theory of Meaningful Learning, for Meaningful Learning to take place, new knowledge must be related to previous concepts specific to the learner's cognitive structure, in a non-arbitrary and non-literal way. With regard to mathematical demonstrations, the occurrence of three types of meaningful learning is necessary: representational, conceptual and propositional. One way to promote meaningful learning, when the student does not have the necessary prior knowledge, is the use of Previous Organizers, which work as "cognitive bridges" between what he already knows and what he needs to know for new learning. This research aims to present and investigate teaching strategies for mathematical demonstrations, which can favor the significant learning of academics in the Licentiate Degree in Mathematics. In this way, a proposal of Previous Organizers in the teaching of mathematical demonstrations was elaborated and implemented, anchored in the trends in Mathematics Education: the History of Mathematics, the Handling of Concrete Material and the Solving of Problems. The implementation of the proposed Previous Organizer, through and action reserarch, has shown satisfactory results with regard to evidence of significant learning in mathematical demonstrations, favoring the professional qualification of academics.

Keywords: Meaningful Learning; Previous Organizers; Trends in Math Education; Action research.

Resumen

Desde la perspectiva de la Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel, para que tenga lugar el Aprendizaje Significativo, los nuevos conocimientos deben relacionarse con conceptos previos específicos de la estructura cognitiva del alumno, de una manera no arbitraria y no literal. Con respecto a las demostraciones matemáticas, es necesaria la ocurrencia de tres tipos de aprendizaje significativo: representacional, conceptual y proposicional. Una forma de promover el aprendizaje significativo, cuando el alumno no tiene los conocimientos previos necesarios, es el uso de Organizadores Previos, que funcionan como "puentes cognitivos" entre lo que ya sabe y lo que necesita saber para nuevos aprendizajes. Esta investigación tiene como objetivo presentar e investigar estrategias de enseñanza para demostraciones matemáticas, que puedan favorecer el aprendizaje significativo de los académicos en la Licenciatura en Matemáticas. De esta manera, se elaboró e implementó una propuesta de Organizadores Previos en la enseñanza de demostraciones matemáticas, anclada en las tendencias de la Educación Matemática: la Historia de las Matemáticas, el Manejo de Material Concreto y la Resolución de Problemas. La implementación del Organizador Anterior propuesto, a través de una investigación de acción, ha mostrado resultados satisfactorios en cuanto a evidencia de aprendizajes significativos en demostraciones matemáticas, favoreciendo la formación profesional de los académicos.

Palabras clave: Aprendizaje significativo; Organizadores Anterior; Tendencias en la Educación Matemática; Investigación para la Acción.

Introdução

Observações empíricas e trabalhos de pesquisa mostram que muitos alunos ingressantes no Ensino Superior, em áreas das Ciências Naturais e Exatas, apresentam uma grande deficiência em termos de conhecimentos prévios da Matemática Básica (SANTAROSA, 2011, 2013). Geralmente, quando os alunos utilizam resultados importantes tais como a Lei dos Senos, a Lei dos Cossenos, o Teorema de Pitágoras, o Princípio de Cavalieri, fórmulas para cálculo de áreas de figuras planas e volumes de figuras espaciais, o fazem de forma mecânica, sem atribuição de significados psicológicos à logicidade das equações em questão. Embora a aprendizagem mecânica não ocorra num "vácuo cognitivo" e em alguns eventos educativos seja necessária, é facilmente esquecida, e não fica disponível na memória de longo prazo para futuras transferências de conhecimentos.

Garbi (2009) faz uma importante crítica acerca do ensino de Matemática em escolas da cidade de São Paulo, no Brasil. Argumenta que há um excesso em tentativas frustradas de contextualização e de interdisciplinaridade, em detrimento do conteúdo matemático e do ensino propedêutico, que em outras épocas, enfatizavam com veemência, demonstrações de teoremas matemáticos. Desta forma, ficam de fora demonstrações importantes, que nos trazem resultados imprescindíveis para a resolução de situações-problema das mais diversas áreas, como por exemplo a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos. Corroboramos a ideia do autor quanto a importância do ensino propedêutico e da demonstração, em muitos tópicos da Matemática. A apreensão cognitiva de conceitos matemáticos relacionados são de extrema importância neste processo.

Ocorre que a matemática é uma ciência formal e abstrata, que só pode ser interpretada por meio das diferentes formas como seus objetos matemáticos podem ser representados. Duval (2011) sugere que a maneira matemática de raciocinar e visualizar está intimamente ligada às transformações das representações semióticas, seja nos seus tratamentos ou nas suas conversões. Portanto, o ensino deve ser pautado na apresentação de situações que possam dar sentido a estes conceitos, a partir da investigação dos conhecimentos prévios presentes na estrutura cognitiva do aprendiz.

Crease (2011) em sua obra "As Grandes Equações" distingue entre "regra" e "prova", numa equação matemática. Enquanto a regra é simplesmente um fato e tem valor prático: permite fazer cálculos para resolver uma situação real, a prova é a demonstração de como sabemos que essa regra é verdadeira. Corroboramos a interpretação do autor, acrescentando que por trás da demonstração de uma regra, ainda existe a análise de seus critérios de validade e de sua interpretação frente às reais

situações apresentadas, habilidades essenciais para um matemático. Além do que, existe um contexto histórico e social, para o qual foi necessário que "regras" fossem criadas. Observa-se a importância deste entendimento para a interpretação de Teoremas ou Leis Matemáticas que governam o mundo.

Com base nestes argumentos, elaboramos uma proposta de Organizadores Prévios no ensino de demonstrações matemáticas, ancoradas nas tendências em Educação Matemática: a História da Matemática, a Manipulação de Material Concreto a partir do raciocínio intuitivo, e a Resolução de Problemas. Tal proposta faz parte das atividades desenvolvidas em um Projeto de Pesquisa, Ensino e Extensão, vinculado ao Programa de Licenciaturas (PROLICEN) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), cujo objetivo principal é implementar e investigar estratégias de ensino para demonstrações matemáticas, que possam favorecer a aprendizagem significativa de acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática.

Este estudo culminou na aplicação de uma sequência didática, através de Minicurso, subsidiada pelo uso de organizadores prévios. O projeto tem sido divulgado e desenvolvido no contexto da UFSM, na fase de formação inicial de professores de Matemática, e tivemos a oportunidade de comunicá-lo e discuti-lo na forma de um minicurso, no Encontro Nacional da Aprendizagem Significativa, ocorrido em 2016, na cidade de São Paulo. Alguns aspectos do Minicurso tiveram que ser revistos, como a sequência adotada pelas atividades consideradas como organizadores prévios. Atualmente, a convite de algumas Instituições de Ensino Básico, o Minicurso será implementado para alunos da Escola Básica da cidade de Santa Maria - RS - frente à necessidade de extensão do projeto. Apontamos alguns resultados e o valor do estudo para investigações futuras.

Organizadores Prévios e Aprendizagem Significativa

O entendimento e interpretação de um Teorema ou de uma Lei Matemática no processo do ensino e aprendizagem da Matemática pode ser classificado como um efetivo resultado de aprendizagem significativa, na perspectiva da Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS). Os diferentes significados atribuídos ao termo "demonstração" é muito bem descrito por Tall:

> Estudantes de Matemática vivem num mundo onde o termo "demonstração" tem diferentes significados, e a interpretação do significado pode ser diferente daquela do professor, assim como a interpretação de um professor pode diferir da interpretação de outro professor. "Demonstrar" significa reproduzir uma sequência de deduções para estabelecer algum importante resultado (TALL, 1989).

Nas palavras de David Tall, percebe-se o quanto a habilidade em "demonstrar" está relacionada à capacidade cognitiva de resgatar experiências, ideias e conhecimentos adquiridos ao longo da vida, para a obtenção e validação de um resultado. Trata-se de um processo de construção do conhecimento, desde a formação de conceitos na estrutura cognitiva até a capacidade de transferência destes conceitos para situações diversas de aprendizagem. O processo da assimilação e retenção do conhecimento é muito bem fundamentado pela Teoria da Aprendizagem Significativa de David Paul Ausubel (2003), referencial adotado neste estudo.

As origens teóricas da Aprendizagem Significativa vêm do médico-psiquiatra David Paul Ausubel (1918-2008). De acordo com Ausubel (2003) a Aprendizagem Significativa está relacionada à capacidade que o aprendiz tem, em relacionar novos conhecimentos com conhecimentos anteriores, contidos na sua estrutura cognitiva. Isso não pode ocorrer de forma literal ou arbitrária. A característica chave da aprendizagem significativa é a interação cognitiva entre os conhecimentos novos e prévios. É necessário que essa interação seja substantiva, onde o novo conhecimento vai interagir com conhecimentos específicos da mente do aluno. Isto é, não é com qualquer conhecimento prévio que o novo conhecimento vai interagir. Ainda segundo o autor, dentre os fatores mais importantes que influenciam na aprendizagem é o que o aprendiz já sabe e a sua predisposição para aprender, uma intencionalidade, um querer aprender. Neste contexto, é necessário que o professor averigue quais são os conhecimentos prévios e ensine de acordo.

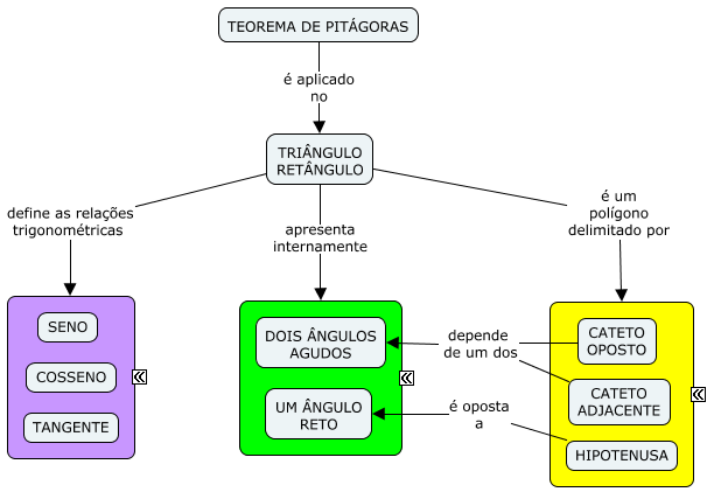
Moreira (2006) cita duas condições necessárias para ocorrência da Aprendizagem Significativa: (1) Uso de material instrucional potencialmente significativo, onde este deve ter significado lógico e a disponibilidade de conceitos subsunçores (conhecimentos específicos) na estrutura cognitiva do aprendiz; (2) Disposição (intencionalidade) para o aprendizado por parte do aprendiz, ou seja, disposição para relacionar de maneira substantiva e não arbitrária o novo material, potencialmente significativo à sua estrutura cognitiva.

Por exemplo, para a Aprendizagem Significativa do Teorema de Pitágoras, faz-se necessário que o aluno apresente, na sua estrutura cognitiva, alguns conceitos prévios, tais como: retas; semi-retas; segmentos de retas; triângulo retângulo; área de triângulos; vértices; hipotenusa; catetos, dentre outros. Na perspectiva da TAS, a Aprendizagem Significativa do Teorema de Pitágoras é um tipo de Aprendizagem Significativa Proposicional, que subentende a ocorrência dos dois outros tipos de Aprendizagem Significativa: a Representacional e a Conceitual. De acordo com Moreira:

> A aprendizagem significativa pode ser representacional, de conceitos (conceitual) ou proposicional. A primeira envolve a aquisição de significados para símbolos unitários (tipicamente, palavras) e é básica para as outras duas. Estas podem ser do tipo subordinada, quando o novo conceito ou proposição é assimilado por conceitos ou proposições superordenadas específicas, existentes na estructura cognitiva; superordenada, quando o novo conceito ou proposição emerge do relacionamento de significados de ideias preexistentes na estructura cognitiva e passa a assimilá-las; combinatória, quando a nova informação não se relaciona especificamente a ideias subordinadas, ou superordenadas, e sim, de maneira geral, com um conteúdo amplo relevante, existente na estructura cognitiva (MOREIRA, 2006, p. 39).

No que se refere ao Teorema de Pitágoras (exemplo citado), a aprendizagem significativa da representação matemática do teorema é o primeiro passo; tal representação envolve os conceitos de catetos, quadrados dos catetos, hipotenusa, quadrado da hipotenusa, os quais já foram assimilados de forma significativa em aprendizagens anteriores, isto é, já passaram pelo fase da representação, conceitualização, e já estiveram presentes em outras relações proposicionais. O Teorema de Pitágoras passará a superordenar estes conceitos ou proposições, reintegrando-os, ou passará a subordiná-los diferenciando-os progressivamente, dependendo da estrutura cognitiva do aprendiz no momento da aprendizagem. De forma geral, a evidência de Aprendizagem Significativa está relacionada à capacidade cognitiva de relacionar os conceitos prévios com os novos conceitos. O mapa conceitual da figura 1 ilustra uma posição de superordenação do conceito Teorema de Pitágoras.

Figura 1: Exemplo de mapa conceitual relacionando alguns conceitos do Teorema de Pitágoras.

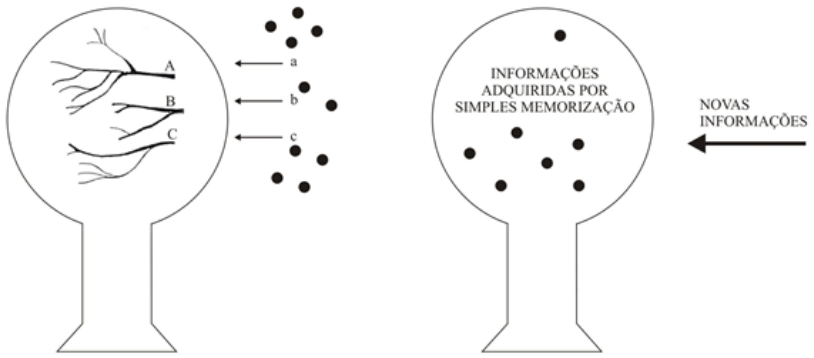


Fonte: As autoras.

Outro exemplo importante a ser citado dentro das "grandes equações que governam o mundo" é a Segunda Lei de Newton da Mecânica para o movimento dos corpos, representada por: $\vec{F} = m\vec{a}$, que relaciona os conceitos de força, massa e aceleração. Para que haja uma aprendizagem significativa da Lei, é necessário que o aprendiz possua em sua estrutura cognitiva estes conceitos, a fim de que possa atribuir significado a nova equação. O professor deve estar atento neste processo, pois uma Aprendizagem Significativa não é sinônimo de aprendizagem correta. Segundo Moreira (2006), isso pode ocorrer quando os conhecimentos prévios do aluno não são cientificamente aceitos na matéria de ensino. Um caso clássico disso é quando detectamos, empiricamente, nos cursos introdutórios de Cálculo, entre os alunos, a seguinte afirmação: $\sqrt{x^2} = x, \forall x \in R$, sem entender que este resultado vale apenas para x positivo. Então, podemos afirmar que o conceito de módulo não foi aprendido de forma significativa pelo aluno. Neste caso, os conhecimentos prévios devem ser investigados pelo professor para que sejam re/construídos de forma significativa.

Por outro lado, caso a interação entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio seja literal e arbitrária, ou caso o aluno não disponha destes conhecimentos prévios em sua estrutura cognitiva, então a aprendizagem poderá ser mecânica, memorística. A aprendizagem mecânica é aquela em que novas informações são aprendidas praticamente sem interagir com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva, sem ligarem-se a conceitos subsunçores específicos, a nova informação é armazenada de maneira arbitrária e literal, não interagindo com aquela já existente na estrutura cognitiva e pouco ou nada contribuindo para sua elaboração e diferenciação. Na figura 2 Novak (1977) ilustra uma representação da Aprendizagem Significativa e da Aprendizagem Mecânica.

Figura 2: Aprendizagem Significativa *versus* Aprendizagem Mecânica.



APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA. Novas informações **a**, **b** e **c** são relacionadas, de modo interativo, com estruturas conceituais já existentes (subsunçores) **A**, **B**, e **C** respectivamente. O subsunçor A está mais diferenciado do que os subsunçores B e C. (Novak, 1977). A interação forte de **a** é com **A**, de **b** é com **B**, ... , mas em cada caso há um gradiente de interação.

APRENDIZAGEM MECÂNICA. Novas informações são incorporadas à estrutura cognitiva sem associação com conceitos subsuçores já existentes.Trata-se de um armazenamento literal e arbitrário, sem significado. (Novak, 1977)

Fonte: Novak (1977).

Como diz Moreira (2006), referente a Aprendizagem Mecânica é o caso daquela aprendizagem de "véspera de prova", que não pode ser retida por muito tempo na mente do aprendiz. É uma aprendizagem memorística, sem significado, sem compreensão, sem capacidade de explicar, que ocorre a curto prazo com a finalidade de reproduzir para determinado fim. Pode-se afirmar que é o tipo de aprendizagem que predomina nas escolas. Aprendizagens mecânicas ao longo da vida estudantil podem provocar a escassez de conceitos subsunçores (conhecimentos prévios específicos) na estructura cognitiva do aprendiz. O papel do professor será o de prover situações de ensino que favoreçam o resgate ou a formação destes conceitos na estructura cognitiva.

Nestes casos, Ausubel (2003) propõe o uso de mecanismos pedagógicos definidos como Organizadores Avançados, também denominados de Organizadores Prévios (OP) por Moreira (2006). OP são materiais introdutórios apresentados aos alunos, que servem de "ponte cognitiva" entre o que o aluno já sabe e o que deveria saber para a aprendizagem do novo conceito. Moreira (2006) corrobora afirmando que são materiais introdutórios, apresentados antes do próprio material a ser aprendido, porém, em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade do que esse material.

De acordo com Novak:

> Para serem eficazes os organizadores avançados devem obedecer a dois requisitos: (1) o conhecimento conceitual e proposicional relevante específico do aluno deve ser especificado; (2) deve planejar-se uma organização apropriada e uma sequência dos novos conhecimentos a serem aprendidos, de forma que se otimize a capacidade do formando de relacionar os novos conhecimentos com os conceitos e proposições que já possui (NOVAK, 2000, p. 71).

Observa-se que não é uma tarefa fácil para o professor, especialmente pela característica única da estructura cognitiva idiosincrática de cada aprendiz, difícil de ser investigada. Na presente pesquisa os OP são desenvolvidos a partir de tendências metodológicas da área da Educação Matemática, como elementos que podem auxiliar a predisposição e a intencionalidade para a aprendizagem significativa.

OP podem ser classificados como expositivos ou comparativos conforme Quadro 1.

Quadro 1: Tipos de Organizadores Prévios.

Expositivo	Comparativo
- O material a ser aprendido não é familiar para o aluno; - Formulado em termos do que o aprendiz já sabe em outras áreas do conhecimento; - Substitui o conteúdo já existente na estrutura cognitiva do aluno, por aquele conteúdo	- O material a ser aprendido já é familiar para o aluno; - Deve ser usado tanto para integrar como para discriminar as novas informações e conceitos, ideias ou proposições, basicamente similares ou

especificamente relevante para a aprendizagem do novo material.	essencialmente distintos, já existentes na estrutura cognitiva.

Fonte: Adaptado de Moreira (2006).

Corroborando a visão de Novak (2000), Moreira (2008) traz que os OP devem: (1) Identificar o conteúdo relevante na estrutura cognitiva e explicar a relevância desse conteúdo para a aprendizagem do novo material; (2) Dar uma visão geral do material em um nível mais alto de abstração, salientando as relações importantes; (3) Prover elementos organizacionais inclusivos que levem em consideração, mais eficientemente, e ponham em melhor destaque o conteúdo específico do novo material, ou seja, prover um contexto ideacional que possa ser usado para assimilar significativamente novos conhecimentos.

Estes materiais podem ser constituídos de: um texto introdutório, um vídeo; um questionário; uma aula experimental, uma dramatização, uma frase, uma discussão, etc.

Neste sentido, a utilização de Organizadores Prévios mostra-se muito relevante como estratégia para manipular a estrutura cognitiva a fim de facilitar a Aprendizagem Significativa.

No presente trabalho, optamos por construir o Organizador Prévio baseado numa sequência didática, que passa pelas seguintes etapas: (1) História da Matemática (contexto histórico); (2) Vídeos introdutórios (apresentação geral); (3) Materiais manipulativos (noção intuitiva); (4) Resolução de problemas (sentido para demonstração); (5) Demonstração (significado lógico). Nesta sequência, observa-se que a "demonstração do Teorema", propriamente dita, é a última etapa apresentada aos estudantes. Entende-se que esta sequência pode auxiliar o aluno na construção de significados necessários para a Aprendizagem Significativa dos teoremas matemáticos, conforme argumenta-se na sequência.

Buscando a construção de significados necessários para a Aprendizagem Significativa dos estudantes, o uso das tendências na Educação Matemática mostra-se relevante. As tendências se referem a formas/caminhos que vem se destacando atualmente como recursos didático/pedagógicos promissores, embasadas em diferentes teorias e posições epistemológicas. Dentre estas tendências citamos: Educação Matemática Crítica, História da Matemática, Etnomatemática, Investigação Matemática, Modelagem Matemática, Análise de Erros, Resolução de Problemas, Manipulação de Material Concreto, Tecnologias Digitais de Comunicação e Informação, Leitura e Escrita na Matemática, O ensino por meio de Projetos, entre outros.

Diante das tendências apresentadas, neste trabalho, optamos por utilizar na elaboração do Organizador Prévio, a História da Matemática, Manipulação de Material Concreto (a partir de uma noção intuitiva) e a Resolução de problemas.

A História da Matemática por ser um elemento motivador. Bicudo e Borba (2012) defendem a introdução da História da Matemática no processo educacional como fator de melhoria no ensino de Matemática e apresentam argumentos positivos para essa inserção, dentre eles: O desenvolvimento histórico da Matemática mostra que as ideias, dúvidas e críticas que foram surgindo não devem ser ignoradas diante de sua própria organização linear; A História da Matemática pode motivar, estimular e atrair o aluno; A História da Matemática fornece subsídios para articular diferentes domínios da Matemática; O envolvimento dos estudantes com projetos históricos pode desenvolver também o crescimento pessoal e outras habilidades; entre tantos outros argumentos.

Apesar de ser muito útil na fase da construção de conceitos pela criança, a manipulação de Material Concreto em sala de aula também pode despertar a motivação e a curiosidade nos estudantes de outras idades, com a intencionalidade de uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos, tendo como ponto de partida a noção intuitiva do conteúdo do ensino. De acordo com Santos, Oliveira & Oliveira (2013), o material concreto desenvolve o raciocínio do aluno estimulando o pensamento lógico matemático, na construção de esquemas conceituais, dando contornos e significados. É por meio dessas interações com o meio físico e social, que o aprendiz constrói seu conhecimento.

Já a Resolução de Problemas, por desenvolver habilidades importantes, além dos conceitos Matemáticos, como trabalho colaborativo, criatividade, persistência, resiliência, espírito investigativo, também se destaca neste processo. O trabalho colaborativo, em especial, é altamente promovedor da aprendizagem significativa.

Procedimentos Metodológicos

O trabalho tem abordagem qualitativa e teve sua primeira versão desenvolvida na UFSM, ao longo do ano de 2016, e direcionado para alunos do Curso de Licenciatura em Matemática interessados em participar de um minicurso sobre demonstração de Leis e Teoremas Matemáticos. A fim de contribuir para a formação dos acadêmicos do Curso, foram selecionadas três alunas de graduação: uma bolsista e duas participantes, a partir de processo de registro do Projeto no Gabinete de Projetos do Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE), da UFSM. Também participou uma professora

da Escola Básica com a qual as acadêmicas interagiram na etapa de análise e discussão do livro didático adotado na Escola.

A opção por uma pesquisa-ação foi devido ao interesse dos participantes na formação e melhoria de suas práticas pedagógicas. De acordo com Moreira:

> O objetivo fundamental da pesquisa-ação consiste em melhorar a prática em vez de gerar conhecimento. A produção e utilização do conhecimento se subordinam a este objetivo e estão condicionadas por ele. A melhora na prática consiste em implantar aqueles valores que constituem seus fins, por exemplo, a educação no ensino. Porém, o conceito de educação como fim do ensino transcende a conhecida distinção entre processo e produto. A melhora da prática supõe levar em conta ao mesmo tempo os resultados e os processos (MOREIRA, 2011, p. 90).

As atividades desenvolvidas no projeto organizaram-se nas seguintes etapas:

1ª ETAPA (fevereiro/2016): Revisão da Literatura - investigação de estudos relacionados ao tema proposto, em dissertações de mestrado, teses de doutorado e artigos de pesquisa.

2ª ETAPA (março e abril/2016): Investigação em livros didáticos recomendados pelo Plano Nacional de Livros Didáticos (PNLD) de Leis e Teoremas Matemáticos, bem como da forma como são abordados. Nesta etapa foram selecionados 3 livros didáticos, de acordo com os seguintes requisitos: ênfase no conteúdo matemático, na contextualização matemática e no enfoque histórico matemático ou histórico científico, respectivamente. Conjuntamente, foram contatados professores de Matemática de uma Escola Pública, na cidade de Santa Maria, a fim de verificar a forma com que as demonstrações matemáticas são abordadas naquele contexto.

3ª ETAPA (maio e junho/2016): Investigação de problemas que necessitam da aplicação das Leis e Teoremas investigados na etapa anterior para serem solucionadas.

4ª ETAPA (julho e agosto/2016): Análise dos principais conceitos-chave da Teoria da Aprendizagem Significativa e sua ligação com o tema investigado.

5ª ETAPA (setembro e outubro/2016): Elaboração de um Organizador Prévio, fundamentado nas Leis e Teoremas propostos, seguindo a sequência: (1) História da Matemática (contexto histórico); (2) Vídeos introdutórios (apresentação geral); (3) Materiais manipulativos (noção intuitiva); (4) Resolução de problemas (sentido para demonstração); (5) Demonstração (significado lógico). Os temas escolhidos foram: Teorema de Pitágoras; Lei dos Senos e Lei dos Cossenos; Teorema de Tales; Princípio de Cavalieri; Volume da Pirâmide e Potenciação.

6ª ETAPA (novembro/2016): Investigação do processo de aprendizagem a partir dos Organizadores Prévios apresentados. Esta investigação foi firmada basicamente na interpretação de tais leis e teoremas a partir de problemas da área de formação do aluno.

Os instrumentos utilizados para a coleta dos dados foram: diários de campo - com anotações de todas as observações relacionadas ao desenvolvimento do trabalho; entrevistas semiestruturadas - os alunos participantes do minicurso foram interrogados acerca de questões relacionadas ao tema desenvolvido na pesquisa; pré-teste - a fim de investigar quais conhecimentos prévios os alunos apresentavam em suas estruturas cognitivas, numa fase anterior ao desenvolvimento da proposta.

A análise dos dados foi descritiva e interpretativa, importando mais o processo do trabalho desenvolvido, as concepções do público alvo investigado e suas experiências prévias, do que necessariamente o resultado final da pesquisa.

Semanalmente eram realizados seminários onde discutia-se, de forma gradativa, a construção e o processo dos eventos observados e analisados ao longo da pesquisa. Possíveis alterações necessárias para a viabilidade e continuidade da pesquisa eram registradas e reelaboradas, após uma análise minuciosa das causas que levaram a tais mudanças.

Na sequência apresentamos um dos Organizadores Prévios elaborado e aplicado sobre o tema Volume da pirâmide, que faz parte do referido Projeto de Pesquisa, Ensino e Extensão.

Organizador prévio: Volume da pirâmide

População alvo: acadêmicos do Curso de Matemática Licenciatura.

Assunto: Volume da pirâmide.

Conhecimentos prévios: Ponto, Reta, Plano, Posições de Retas, Posições de Plano, Simetria, Reflexão, Distância de ponto a reta, Distância entre retas, Ângulos entre retas, Ângulo entre Planos, Ângulo entre reta e plano, Figuras planas, Semelhança de triângulos, Congruência de triângulos, Volume do prisma e Princípio de Cavalieri.

Objetivo do organizador prévio: Propiciar uma interação entre conceitos novos com os já existentes na estrutura cognitiva dos alunos, buscando, dessa forma, uma aprendizagem significativa relacionada ao Volume da pirâmide com a inserção das tendências: História da Matemática, Manipulação de Material Concreto e Resolução de problemas.

Descrição do organizador prévio: Para melhor organização e descrição da sequência didática optou-se pela seguinte organização:

(1) História da Matemática (contexto histórico)

Objetivo: Contextualizar o conteúdo sobre volume de pirâmides a partir da História do surgimento e desenvolvimento das pirâmides, a fim de auxiliar o aprendiz no processo de construção de subsunçores.

Instrumento utilizado: Descrição histórica.

Princípio: Conhecer, historicamente, pontos altos da matemática de ontem, poderá, na melhor das hipóteses, e de fato fazer isso, orientar no aprendizado e no desenvolvimento da Matemática de hoje (D'AMBROSIO, 2014).

A Figura 3 apresenta a descrição histórica que os estudantes tiveram contato.

Figura 3: Descrição histórica referente a pirâmides.

Pirâmides

As ***pirâmides do Egito*** foram construídas há milhares de anos para abrigar tumbas de faraós. No Egito, são conhecidas cerca de cem pirâmides, sendo as mais famosas as de Gizé, um complexo formado por três pirâmides: Quéops, Quéfren e Miquerinos.

A ***pirâmide de Quéops***, datada de 2500 a. C., foi construída pelo faraó Quéops (Khufu em egípcio) e é a maior delas. ***Quéops é também a mais antiga das sete maravilhas do mundo antigo*** e a única que ainda resiste ao tempo. Até a construção da Torre Eiffel, em Paris, em 1889, a pirâmide de Quéops era a construção mais alta do mundo. Suas dimensões são monumentais: 137 metros de altura e 227 metros em cada lado da base.

Além da ***câmara do Rei***, outras duas são conhecidas: a ***da Rainha*** (que não abriga a múmia da mulher de Quéops, apesar do nome) e a ***Secreta***. Para descobrir se existem outras salas, os cientistas teriam que usar explosivos, que podem danificar a estrutura da obra.

Quanto ao ***revestimento da pirâmide***, Quéops mandou revestir toda a parte externa de sua futura tumba com ***pedra calcária polida***. A pirâmide, literalmente, brilhava com a luz do sol e podia ser vista a quilômetros de distância. O revestimento foi saqueado há mais de 600 anos. Hoje existem apenas resíduos dele no topo da maravilha.

Entre as medidas tomadas para que o sarcófago do faraó não fosse saqueado, os idealizadores da pirâmide colocaram pedregulhos para bloquear as estradas, portas pesadas de granito, corredores e câmaras vazias para despistar invasores.

Quanto à construção da pirâmide, existem algumas teorias que explicam como teria sido o processo de construção. A mais aceita é de que ***os blocos eram arrastados sobre troncos de madeira por uma rampa***. Outra possibilidade seria uma ***rampa nas paredes externas do monumento***.

Fonte: http://www.sohistoria.com.br/ef2/egito/piramides.php.

(2) Vídeos introdutórios (apresentação geral)

Objetivo: Apresentar de forma abrangente e inclusiva, o conteúdo relacionado ao estudo do volume da pirâmide, instigando o aprendiz a abstrair pontos chaves importantes do conteúdo.

Instrumento: Vídeo selecionado a partir de uma análise crítica.

Princípio: O uso de vídeos em sala de aula, é um fator motivador para aprendizagem significativa. Link do vídeo: https://youtu.be/C_8QntZKExg.

(3) Material manipulativo (noção intuitiva)

Objetivo: Resgatar os conceitos apresentados no vídeo, através do raciocínio intuitivo, a fim de desenvolver habilidades manipulativas.

Instrumento: Folhas, colas, tesouras, planificações, lápis, réguas, borrachas, etc.

Princípio: O raciocínio intuitivo é o primeiro passo para a construção dos conceitos subsunçores na mente do aprendiz.

Descrição da atividade: Entregar, a cada aluno, um prisma e uma pirâmide, ambos planificados e de mesma base e altura; Solicitar que montem essas figuras, de maneira que não coloquem uma das bases, ou seja, deixem uma tampa para que possa ser aberta; Após, solicitar que preencham o interior da pirâmide com bolinhas de isopor bem miudinhas; Posteriormente, transferir essa quantidade de bolinhas da pirâmide para o prisma; Questioná-los a observarem o que aconteceu com a pirâmide e o prisma.

Com esta atividade, o aluno pode deduzir a relação abaixo:

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3}$ do volume do prisma

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Na sequência, levar dois sólidos geométricos com mesma base e altura, colocar água e fazer a transferência da água entre os sólidos, também para os alunos entenderem essa relação.

(4) Resolução de problemas (sentido para demonstração)

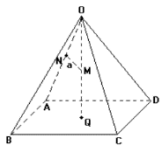
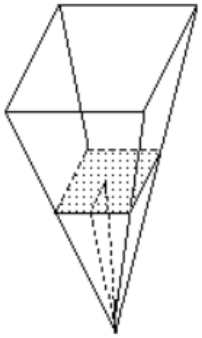
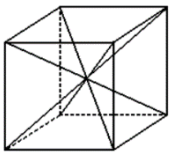
Objetivo: Proporcionar ao aluno meios para que possa construir o conhecimento relacionado ao volume de pirâmides, de tal maneira a conseguir.

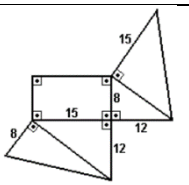
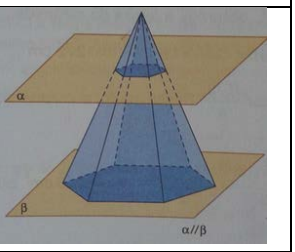
Instrumento: Problemas selecionados de fontes diversas.

Princípio: A resolução de problemas possibilita aos estudantes dedicarem-se de maneira independente e autônoma na busca de ideias e estratégias novas para alcançar uma solução adequada ao problema originalmente planejado (GROENWALD, SILVA E MORA, 2004).

Descrição da atividade: Dividir a turma em cinco grupos; Pensar e resolver os problemas propostos expostos no Quadro 2; Apresentar no quadro para os demais colegas.

Quadro 2: Problemas propostos no Organizador Prévio - Volume da pirâmide.

Problema 1	(UNESP) A figura a seguir mostra uma pirâmide regular de base quadrada cuja altura tem a mesma medida que as arestas da base. Pelo ponto médio M da altura OQ, traça-se o segmento MN perpendicular à aresta OA. Se 'a' expressa a medida de MN, determine o volume da pirâmide em função de 'a'.	
Problema 2	(PUCSP) Um imperador de uma antiga civilização mandou construir uma pirâmide que seria usada como seu túmulo. As características dessa pirâmide são: 1°) sua base é um quadrado com 100 m de lado, e 2°) sua altura é de 100 m. Para construir cada parte da pirâmide equivalente a 1000 m³, os escravos, utilizados como mão-de-obra, gastavam, em média, 54 dias. Mantida essa média, o tempo necessário para a construção da pirâmide, medido em anos de 360 dias, foi de a) 40 anos. b) 50 anos. c) 60 anos. d) 90 anos. e) 150 anos.	
Problema 3	(UFSM) Um técnico agrícola utiliza um pluviômetro na forma de pirâmide quadrangular, para verificar o índice pluviométrico de uma certa região. A água, depois de recolhida, é colocada num cubo de 10cm de aresta. Se, na pirâmide, a água atinge uma altura de 8cm e forma uma pequena pirâmide de 10cm de apótema lateral, então a altura atingida pela água no cubo é de a) 2,24 cm b) 2,84 cm c) 3,84 cm d) 4,24 cm e) 6,72 cm	
Problema 4	Quando duas pirâmides regulares de bases quadradas e cujas faces laterais são triângulos equiláteros são colocadas base a base, o sólido resultante é chamado octaedro regular. Calcule o volume do octaedro de aresta 5cm.	
Problema 5	(UFPE) Na figura abaixo o cubo de aresta medindo 6 está dividido em pirâmides congruentes de bases quadradas e com vértices no centro do cubo. Qual o volume de cada pirâmide?	

Problema 6	A figura abaixo representa a planificação de um sólido. O volume desse sólido, de acordo com as medidas indicadas, é?	
Problema 7	(FGV-SP) Um octaedro regular está inscrito num cubo de aresta com 4cm de comprimento, isto é, seus vértices coincidem com o centro de cada face do cubo. O volume do octaedro é?	
Problema 8	Um artesão pretende construir uma pirâmide quadrangular regular de madeira maciça. Para isso, ele dispõe de um cubo de madeira maciça cuja aresta mede *a*. Se a pirâmide possuir aresta da base e altura medindo, respectivamente, *a* e *a/2*, qual será a razão entre o volume da pirâmide e da parte da madeira não utilizada?	
Problema 9	O volume de uma pirâmide hexagonal regular, cuja aresta da base mede 4cm e cuja base está contida no plano β, é $72\sqrt{3}$ cm³. Sabendo que a razão entre as alturas das pirâmides com base no plano α e com base no plano β é 1/3, determine o volume da pirâmide com base no plano α.	
Problema 10	(UEPA-PA) Uma indústria que produz perfumes à base de essências genuínas da Amazônia resolveu inovar nas embalagens de seus produtos para chamar a atenção do consumidor. O *Cheiro do Pará*, por exemplo, foi engarrafado em frascos no formato de uma pirâmide quadrangular regular de altura 15cm e perímetro da base 20cm. O volume de um desses frascos é?	

Fonte: http://projetomedicina.com.br/site/attachments/article/414/matematica_geometria_espacial_piramide_exercicios.pdf.

(5) Demonstração (significado lógico)

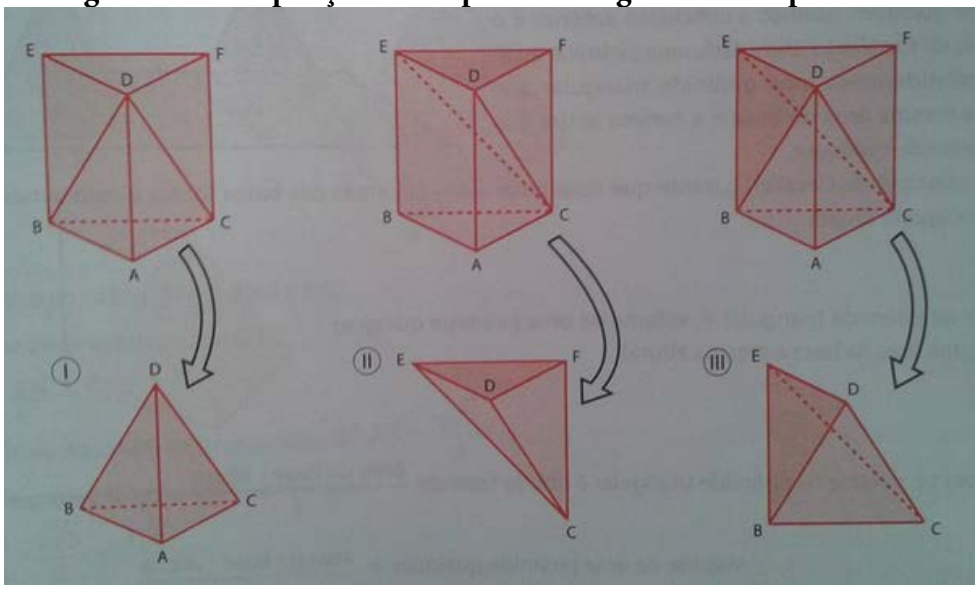
Objetivo: Desenvolver, juntamente com os alunos, os passos da demonstração do teorema, instigando-os a perceberem todos os aspectos necessários.

Instrumento: Utilização da lousa, ou apresentação em slides.

Princípio: O ensino por recepção pode ser potencialmente significativo, desde que haja uma interação entre os conhecimentos prévios e os novos conhecimentos, de forma substantiva e não arbitrária (AUSUBEL, 2003).

Descrição da atividade: Para a demonstração do Volume da pirâmide, propõem-se decompor um prisma triangular em três pirâmides, como a Figura 4.

Figura 4: Decomposição de um prisma triangular em três pirâmides.



Fonte: Dante, 2010.

Após a decomposição, algumas observações podem ser feitas:

(1) As pirâmides *I* e *II* têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, os triângulos *ABC* e *DEF* são congruentes e a distância de *D* ao plano (*ABC*) é igual à distância de *C* ao plano (*DEF*) – altura do prisma original. Logo, *I* e *II* têm mesmo volume.

(2) As pirâmides *II* e *III* também têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, o triângulo *CEF* é congruente ao triângulo *BCE*, pois cada um deles é a metade do paralelogramo *BCFE*, e a altura de cada uma dessas pirâmides é a distância de *D* ao plano (*BCFE*). Logo, *II* e *III* têm o mesmo volume. Assim, $V_I = V_{II}$ e $V_{II} = V_{III}$ e, portanto, os três volumes são iguais.

Lembrando que:

$$V_{PRISMA} = V_I + V_{II} + V_{III}$$

Como $V_I = V_{II} = V_{III}$, então $V_{PRISMA} = 3V$

Sabe-se que V_{PRISMA} = área da base x altura, então

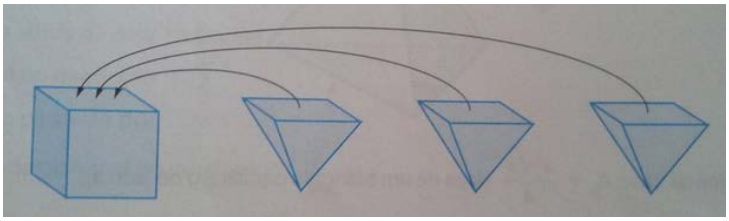
área da base x altura = 3V

$$V = \frac{áreadabasexaltura}{3}$$

(3) A propriedade citada em (2) pode ser verificada experimentalmente. Conforme observamos na figura 5, se quiséssemos encher de água uma vasilha em forma de

prisma usando um recipiente em forma de pirâmide, com mesma base e mesma altura, seria necessário usá-lo três vezes para encher a vasilha.

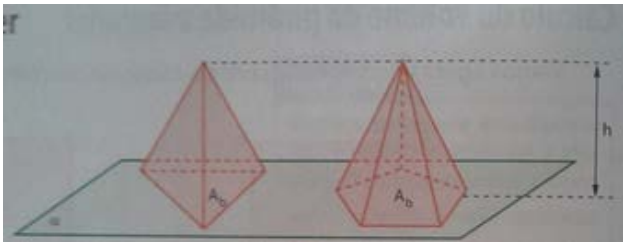
Figura 5: Verificação experimental da propriedade (2).



Fonte: Dante, 2010.

Para determinar o volume de uma pirâmide qualquer, usa-se a conclusão anterior e o Princípio de Cavalieri. Assim, conforme ilustra a figura 6, dada uma pirâmide qualquer, considera-se uma pirâmide triangular que tenha a mesma área da base e a mesma altura que uma pirâmide qualquer.

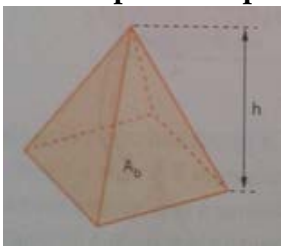
Figura 6: Duas pirâmides com áreas das bases iguais e mesma altura.



Fonte: Dante, 2010.

O Princípio de Cavalieri garante que duras pirâmides com áreas das bases iguais e com a mesma altura, têm volumes iguais. Então: volume da pirâmide triangular = volume de uma pirâmide qualquer (de mesma área da base e mesma altura).

Figura 7: Uma pirâmide qualquer.



Fonte: Dante, 2010.

Dessa forma, volume de uma pirâmide qualquer, representada na figura 7 é dado por:

$$V = \frac{A_b x h}{3}.$$

Resultados Obtidos e Considerações Finais

O Projeto de Pesquisa, Ensino e Extensão ao qual este trabalho está relacionado foi executado com um aproveitamento excelente por parte da bolsista e das duas acadêmicas participantes. Foi ministrado por elas e pela primeira autora do trabalho, um Minicurso intitulado: "Organizadores Prévios para o Ensino de Demonstrações Matemáticas" numa carga horária de 20 horas, onde contexto histórico, vídeos, manipulação de material concreto e resolução de problemas foram todos elaborados pelas acadêmicas, sob orientação e supervisão da primeira autora e orientadora do trabalho.

Neste minicurso foram abordados os temas: Teorema de Pitágoras; Lei dos Senos e Lei dos Cossenos; Teorema de Tales; Princípio de Cavalieri; Volume da Pirâmide e Potenciação. Houve a participação de 8 acadêmicos do Curso de Matemática Licenciatura Noturno, como cursistas, no minicurso. Ao mesmo tempo em que participavam das atividades, os cursistas, ao final de cada encontro, faziam apresentações dos problemas resolvidos em duplas. Caracterizou-se, assim, uma constante troca de significados e socialização de conhecimentos.

Ao longo dos encontros semanais para discussão das aulas apresentadas, percebeu-se a necessidade de aprofundamento do referencial teórico, já que os materiais introduzidos aos estudantes poderiam ser classificados como "Organizadores Prévios", na perspectiva de Ausubel (2003). Este é um conceito-chave da Teoria da Aprendizagem Significativa, um recurso aplicado no ensino, a fim de estabelecer uma ponte provisória entre os conhecimentos prévios que os alunos não possuem e o conhecimento que deveriam saber para a nova aprendizagem.

O sucesso da iniciativa foi tão grande, que houve o convite para um dos encontros do Minicurso ser repetido na Semana Acadêmica Integrada do CCNE, onde acadêmicas participantes e professora orientadora ministraram a seminário relacionado ao Volume da Pirâmide.

Novamente houve o convite para apresentar o minicurso no Encontro Nacional da Aprendizagem Significativa (ENAS), na cidade de São Paulo, desta vez, apresentado pela primeira autora e orientadora do projeto. Lá, o público participante era especializado na Teoria da Aprendizagem Significativa, o que resultou altamente produtivo para a futura continuidade do projeto. Atribui-se o valor do trabalho à sua eficiência no que

tange o processo de formação de professores, vinculado a linha cognitivista da Aprendizagem Significativa, como importante concepção para os futuros professores. Atualmente o projeto está em nível de discussões e aprofundamento sobre os aspectos teóricos, metodológicos e epistemológicos, bem como a natureza da assimilação e retenção cognitiva dos objetos matemáticos e suas particularidades.

Referências

AUSUBEL, David P. *Aquisição e Retenção dos Conhecimentos*: Uma Perspectiva Cognitiva. Lisboa. Plátano Edições Técnicas: 2003.

BICUDO, Maria A. V.; BORBA, Marcelo de C. *Educação Matemática*: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo. Cortez: 2012.

CREASE, Robert P. *As Grandes Equações*. Rio de Janeiro. Jorge Zahar Editor LTDA: 2011.

DANTE, Luiz R. *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo. Ática: 2010.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática*: da teoria à prática. São Paulo. Papirus Editora: 2014.

DUVAL, Raymond. *Ver e ensinar a matemática de outra forma*: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organização: Tânia M. M. Campos. 1ª edição, São Paulo: PROEM, 2011.

GARBI, Gilberto G. Decorar é preciso. Demonstrar também. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, n. 68, 1º quadrimestre. 2009

GROENWALD, Cláudia L. O.; SILVA, Carmen K.; MORA, C. D. *Perspectivas em Educação Matemática.* Acta Scientiae, v. 6, nº 1, p. 37 – 55, 2004.

MOREIRA, Marco A. A Teoria da Aprendizagem Significativa e sua Implementação em Sala de Aula. Editora Universidade de Brasília, UnB, 2006.

MOREIRA, Marco A. *Metodologias de Pesquisa em Ensino*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

MOREIRA, Marco A. Organizadores Prévios e Aprendizagem Significativa. *Revista Chilena de Educación*, ISSN 0717-9618, Vol. 7, Nº 2, 2008, pp. 23-30. Revisado em 2012.

NOVAK, Joseph D. *A Theory of Education*. Ithaca: Cornell University Press, 1977.

NOVAK, Joseph D. *Aprender*, *Criar e Utilizar o Conhecimento*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2000.

SANTAROSA, Maria C. P.; MOREIRA, Marco A. O Cálculo nas aulas de Física da UFRGS: Um estudo exploratório. *Investigações em Ensino de Ciências*, v. 16 (2), pp. 317-351, 2011.

SANTAROSA, Maria Cecília Pereira. Investigação da Aprendizagem em Física Básica Universitária a partir de um ensino que integra situações e conceitos das disciplinas de Cálculo I e de Física I. 2013, 382 f. Tese (Ensino de Física) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

SANTOS, Anderson O.; OLIVEIRA, Camila R.; OLIVEIRA, Guilherme S. de. Material Concreto: Uma Estratégia Pedagógica para Trabalhar Conceitos Matemáticos nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental. *Itinerarius Reflectionis,* Jataí. v. 9, nº 1, 2013.

TALL, David. The Nature of Mathematical Proof. *Mathematics Teaching*, 127, 28–32. 1989.