DIFICULDADES E OBSTÁCULOS EM EDUCAÇÃOMATEMÁTICA

Neiva Ignês Grando[*]

Resumo

Cotidianamente, no processo de ensino-aprendizagem, o professor depara-se com dificuldades que, em muitos casos, não consegue superar. Algumas delas podem estar relacionadas, por exemplo, com o próprio conhecimento ou mesmo com a forma que se dá a ele em sala de aula. Neste artigo, apresenta-se, de forma sucinta, o estado da arte das investigações sobre dificuldades e obstáculos, principalmente em educação matemática, fazendo-se, em seguida, uma análise do tema através de conceitos e de algoritmos das operações matemáticas fundamentais.

[*] Professora da UPF/Passo Fundo/RS, doutoranda em Educação/UFCS/Florianópolis/SC.

1 Introdução

Neste trabalho, pretende-se enfatizar algumas questões relacionadas com dificuldades e obstáculos e suas implicações para a educação matemática. Vários são os autores (epistemólogos, educadores, psicólogos, pesquisadores) que abordaram essas questões. Entre eles, pode-se citar BACHELARD (1993), HENRY (1991), ARTIGUE (1990), VERGNAUD (1989), SIERPINSKA (1989) e BROUS SEAU(1989a,b;1983).

Em 1938, BACHELARD, em seu livro *La formation del'esprit scientifique*, faz emergir a concepção de que o problema do conhecimento científico precisa ser delineado em termos de obstáculos. Analisa as causas de estancamento, de retrocesso e de inércia do conhecimento científico, que denominou de obstáculos epistemológicos. Para ele, "a noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação" (BACHELARD, 1993:20). Atenta para o fato de que, na educação, a noção de obstáculo pedagógico é desconhecida e diz que, freqüentemente, choca-o o fato de que "os professores de ciências, ainda mais que os outros se cabe, não compreendam que não se compreenda" (idem, ibidem).

BROUSSEAU (1983: 166) retoma a idéia de obstáculo de Bachelard e destaca a sua importância para a didática da matemática, dizendo que "a identificação e a caracterização de um obstáculo são essenciais para a análise e para a construção de situações didáticas". Referindo-se à aprendizagem e ao ensino, ele sublinha que o surgimento de obstáculos cognitivos é inevitável. Ressalta, ainda, que um obstáculo se manifesta através de erros, os quais considera como "o efeito de um conhecimento anterior, que teve seu interesse, seu sucesso, mas que, agora, se revela falso, ou simplesmente inadaptado" (idem:171). Para esse autor, são erros desse tipo que se constituem em obstáculos. Segundo sua origem e a maneira pela qual eles evoluem, os obstáculos, fundamentalmente cognitivos, podem ser ontogênicos, epistemológicos, didáticos e até mesmo culturais. Os ontogênicos são aqueles que surgem em função de limitações de um sujeito em um dado momento de seu desenvolvimento; epistemológicos são aqueles obstáculos inerentes ao conhecimento, os quais podem ser encontrados na história dos próprios conceitos; os didáticos dependeriam unicamente "de uma escolha ou de um projeto do sistema educativo" (idem:177), ou, ainda, conforme HENRY (1991), são criados pela escolha de determinada estratégia de ensino, a qual geraria conhecimentos errôneos ou incompletos que seriam obstáculos para a compreensão de conceitos; os obstáculos culturais têm relação com conhecimentos que se desejaria desenvolver nos alunos ou conhecimentos que eles precisariam, os quais não existem diretamente na cultura científica (ex.: a capacidade de enumerar conjuntos, um pensamento natural bem desenvolvido). Segundo BROUSSEAU (1989a), ou conforme HENRY (1991), esse último tipo de obstáculo surge quando os conhecimentos introduzidos adquirem um sentido numa cultura dada, que não é o mesmo na cultura do aluno.

Para VERGNAUD (1989), é possível identificar dificuldades de natureza diversa na aprendizagem de matemática e é interessante fazer uma análise detalhada das diferentes dificuldades que os alunos encontram neste processo. Em sua percepção, uma dificuldade constitui-se num verdadeiro obstáculo, quando há uma concepção a superar, quando há uma contradição entre a concepção antiga a rejeitar e a concepção nova a assimilar. O autor mostra a importância da distinção entre obstáculos e dificuldades para a didática, para que o professor não adote a mesma estratégia didática em relação aos verdadeiros obstáculos e em relação às outras dificuldades conceituais. Ele distingue dois tipos de dificuldades: aquelas em que "existem saltos do pensamento, sem que esses saltos entrem violentamente em contradição com as concepções e as competências anteriormente formadas" ; e outras que "formam obstáculos epistemológicos importantes e duráveis" , os quais precisam ser analisados "para mudar de concepção e compreender a relação da concepção nova a formar com a concepção anterior" (VERGNAUD, 1989:38).

2 Algumas dificuldades e obstáculos através de conceitos e de algoritmos

No estudo de operações matemáticas, é possível identificar dificuldades e obstáculos tanto em nível conceitual como em nível de algoritmo. Por exemplo: operações usadas abstratamente, sem vinculação com situações reais ou mesmo simuladas, dificultam a compreensão conceitual; a falta de compreensão do próprio conceito compromete a aprendizagem dos algoritmos; *regras* *simplificadas* , utilizadas como estratégias nos algoritmos das operações com números naturais, frações e decimais, são inadequadas e constituem-se em obstáculos para a aprendizagem dos próprios algoritmos. Para analisar algumas dificuldades e obstáculos no ensino e na aprendizagem matemática, neste trabalho, serão utilizadas, basicamente, questões relacionadas com conceitos e algoritmos das operações fundamentais com números naturais: adição, subtração, multiplicação e divisão. Operações com frações ou números decimais, no entanto, serão analisadas como extensão de pontos abordados com números naturais. Assim, este estudo está centrado na operação matemática e não aborda situações ou problemas envolvendo operações.

Segue-se uma análise das dificuldades e dos obstáculos que permeiam o ensino de matemática no cotidiano escolar.

2.1 Adição

Na adição de dois ou mais números naturais, com reagrupamento (reserva), ao serem ultrapassadas nove unidades na ordem das unidades simples (e em cada ordem subseqüente), o procedimento a ser adotado é reagrupar (juntar) uma dezena na 2ª ordem, a qual provém da adição das unidades da 1ª parcela com as unidades da 2ª parcela. O mesmo ocorre na ordem das centenas, quando se junta a centena formada na ordem das dezenas. Por outro lado, a ênfase na utilização de *vai um* para expressar o agrupamento de uma dezena formada na adição do número de unidades (unidades simples) da 1ª parcela com o número de unidades da 2ª parcela, sem compreensão do que o *um* significa, ou para expressar o agrupamento de uma centena formada na adição do número de dezenas da 1ª parcela com o número de dezenas da 2ª parcela, e assim sucessivamente, certamente constitui um obstáculo para a aprendizagem do algoritmo da adição. Nesse sentido, a utilização da idéia de *vai um* leva o aluno a um processo mecânico, que não representa aprendizagem do algoritmo da adição, porque ele o executa sem mesmo compreender que está juntando unidades com unidades, dezenas com dezenas, centenas com centenas.

O desenvolvimento desse processo na adição de números naturais pode originar dificuldades na adição de números decimais. A idéia do *vai um* não permite compreender que o procedimento a ser adotado é adicionar unidades semelhantes, ou seja, centésimo (c) com centésimo, décimo (d) com décimo, unidade (U) com unidade, dezena (D) com dezena. Por exemplo, na montagem de 15,06 + 4,3 (expressão dada ou extraída de um problema), uma dificuldade comum entre alunos, em nível de 1º grau (e até em outros níveis), é saber onde devem colocar os algarismos 4 ou 3 da 2ª parcela.

Na seqüência, a regra simplificada *vírgula embaixo de vírgula* esconde a verdadeira identidade da operação, em que d+d, U+U, e D+D traduzem a essência do algoritmo. Com a utilização dessa regra, o aluno pode defrontar-se com outra dificuldade: onde colocar o 2 na adição de 6,47 com 2, se a 2ª parcela não tem vírgula indicada ? É importante ressaltar, ainda, que a posição das vírgulas *uma abaixo da outra* é uma conseqüência da estratégia de adicionar unidades da mesma ordem e não uma regra a ser seguida sem a compreensão do algoritmo.

Nas questões analisadas, constata-se que a idéia de *vai um* e a regra simplificada *vírgula embaixo de vírgula* geram dificuldades que se constituem em obstáculos para a compreensão do algoritmo da adição de números naturais, decimais e de frações e, conseqüentemente, da multiplicação. Segundo VERGNAUD (1989), existem aí duas concepções que precisam ser mudadas e, por isso, são obstáculos para a aprendizagem matemática. De acordo com BROUSSEAU (1983) e HENRY (1991), são obstáculos de origem didática, uma vez que são idéias enfatizadas no sistema de ensino, ou seja, fazem parte de uma opção metodológica - subjacente ao modelo educacional tradicional.

2.2 Subtração

Empresta um é a expressão usada na subtração de números naturais, quando o número de unidades de determinada ordem do subtraendo é menor que o número de unidades da respectiva ordem no minuendo. Por exemplo, na operação 345 - 237, é comum ouvir um estudante dizer: "5 menos 7 não dá, *empresta um*; 15 menos 7 dá 8; 4 emprestou 1 fica 3; 3 menos 3 dá 0; 3

menos 2 dá 1". Apesar de o resultado estar correto, é possível identificar, pelo menos, dois problemas nesse processo: primeiro, que se pede emprestado e não se devolve, a não ser que se faça a operação inversa; e, segundo, que o aluno realiza esse processo mecânico provavelmente sem perceber que está subtraindo unidades de unidades, dezenas de dezenas, centenas de centenas.

Perguntando-se a um aluno de 1° grau o que significa dizer *empresta um*, é provável que ele não consiga explicar o que representa o *um* de *empresta um*; esse *um* é utilizado como um número sem unidade para a subtração em qualquer uma das ordens. Conforme VERGNAUD (1989), BROUSSEAU (1983) e HENRY (1991), a idéia de *empresta um* constitui-se em obstáculo para a compreensão do algoritmo da subtração de naturais, por representar um conhecimento ou uma concepção que deve ser mudada para que o algoritmo, como tal, seja compreendido.

2.3 Multiplicação

Um dos problemas da matemática no 1° e até no 2° e 3° graus é a multiplicação até 10, ou seja, a *tábua de multiplicar* ou a *tabuada*. O que determina o maior número de dificuldades é a falta de compreensão da própria operação, pois o aluno, geralmente, é levado a decorar a tabuada sem compreender o próprio conceito e, conseqüentemente, as implicações da interpretação, representação e identificação do papel de cada um dos termos. Para exemplificar, tome-se a expressão 2 x 3 = 6. Ela provém de ou é representada, por exemplo, por 6 objetivos, distribuídos em três linhas, com dois objetos em cada uma (três conjuntos com dois elementos cada), cuja leitura é *dois multiplicado por três é igual a seis*.

```
* *
* *      2 x 3 = 6
* *
```

Neste caso, o multiplicando é o 2 e o multiplicador é o 3, ou seja, o operador que transforma o 2 em 6 elementos.

Outra maneira de interpretar essa operação é a seguinte: seis objetos, distribuídos em duas linhas, com três objetos cada (dois conjuntos com três elementos cada), cuja leitura é *duas vezes três elementos é igual a seis elementos.*

```
* * *    2 x 3 = 6
* * *
```

Com essa interpretação, o multiplicando é o 3 que, transformado pelo operador (multiplicador) 2, resulta em 6 elementos.

Percebe-se, então, que a decoreba de cada tabuada, sem a compreensão do papel de cada fator, sem qualquer relação com a realidade, sem significado, compromete a compreensão da operação. As dificuldades surgem tanto na multiplicação como na divisão de números naturais, ou em outras situações matemáticas nas quais há necessidade de multiplicar.

Além das dificuldades geradas pela falta de compreensão do conceito, é possível identificar vários problemas que dificultam a compreensão do algoritmo da multiplicação de números naturais. Para visualizar melhor, veja-se um exemplo:

$$\begin{array}{r} 275 \\ \underline{\times\ 43} \end{array}$$

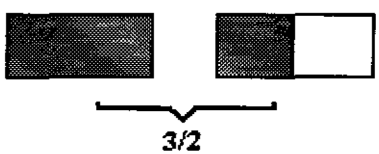
Normalmente, o estudante faz o seguinte raciocínio: 3 x 5, 15 *vai 1*; 3 x 7, 21, 22 *vai 2*; 3 x 2, 6, mais 2, 8 sem pensar que o 1, de *vai 1*, representa uma dezena e, por isso, juntar-se-á ao resultado da multiplicação da unidade pela dezena; que o 2 de *vai 2* representa duas centenas e, por isso, juntar-se-á ao resultado da multiplicação da unidade pela centena; e, a seguir, o raciocínio é o seguinte: 4 x 5, 20 vai 2; 4 x 7, 28 com 2 dá 30, *vai 3*; 4 x 2, 3 com 3, 11. Nesta etapa, surge uma questão interessante: o que representa o *espaço vazio*, ou os *dois tracinhos* (sinal de igualdade), ou apenas *um tracinho* (sinal de menos) na ordem das unidades? Na maioria das vezes, o aluno não sabe justificar, ou diz que é porque já multiplicou as unidades, ou seja, então é a vez das dezenas. Dificilmente ele percebe, sozinho, que o 4 representa 4 dezenas e, por isso, vale 40 que, multiplicado por 5, na realidade, é 200; que, em 200, há 0 unidades simples, isto é, de 1ª ordem e que, depois de ter multiplicado as unidades e dezenas por 275, as duas parcelas deverão ser adicionadas. Será que o aluno compreende por que adiciona depois de ter multiplicado?

Esse processo, mecânico, mostra que, além da falta de compreensão do próprio algoritmo, existe a falta de controle da situação. Controle implica compreensão do processo. A exemplo de *vai um* para a adição, a idéia de *vai 1, vai 2*, constitui-se em obstáculo para a compreensão do algoritmo da multplicação.

Uma dificuldade que se caracteriza como um obstáculo pode ser identificada na multiplicação de números decimais ou de frações. Geralmente, a multiplicação de números naturais é relacionada com *aumento* de números, ou seja, multiplicar é aumentar, em que o produto é um número maior que os números dos fatores. Essa concepção, verdadeira para a multiplicação de números naturais, nem sempre é válida para uma multiplicação envolvendo decimais ou frações. Assim, uma concepção adequada para uma situação torna-se inadequada para outra, gerando uma dificuldade que pode constituir-se em obstáculo para a aprendizagem (BROUSSEAU, 1983).

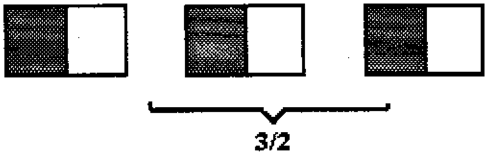
Vejam-se alguns casos, envolvendo multiplicação de frações ou de números decimais, que demonstram essa concepção:

a) tendo-se 1/2 x 3, o produto é 3/2, que é um número intermediário entre o 1/2 e o 3. O 1/2 (multiplicando), que foi tomado três vezes e que, por isso, ficou multiplicado por 3, transformou-se em 3/2, que é o triplo de 1/2.



1/2 x 3 = 3/2
aumentou
(triplicou)

b) em 3 x 1/2, o produto é o mesmo, ou seja, 3/2. O 3, que foi tomado *1/2 de vez,* ficou multiplicado por 1/2 e resultou na metade de 3.

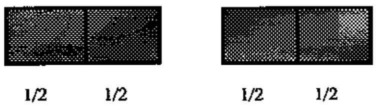


3 x 1/2 = 3/2
diminuiu
(metade)

Percebese que, no primeiro caso (1/2 x 3), o 1/2 transformou-se em 3/2; no segundo caso (3 x 1/2), foi o 3 que se transformou em 3/2, o que significa que, no primeiro caso, a idéia de aumento é válida e, no segundo, não.

Tomem-se outros casos com fração ou número decimal:

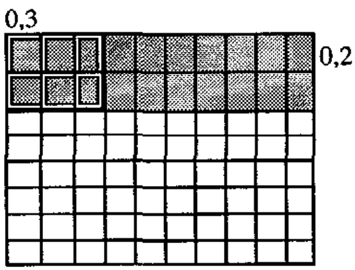
c) 1/2 x 4 = 2



1/2 x 4 = 2
aumentou
quadriplicou

d) 4 x 1/2 = 2

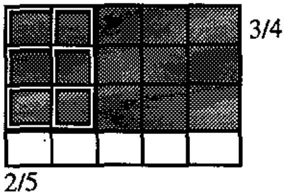
4 x 1/2 = 2 diminuiu (metade)



e) 0,2 x 0,3 = 0,06 (0,3 de 0,2; três décimos de dois décimos; uma parte de uma parte)

0,06 é menor que 0,2 e que 0,3. Leia-se: *0,2 tomados 0,3 de vez*, ou seja, *0,2 multiplicado por 0,3 é igual a 0,06.*

f) 3/4 x 2/5 = 6/20



2/5 de 3/3 =6/20
3/4 tomados 2/5 de vez significa
3,4 multiplicado por 2/5 é igual a 6/20.

No primeiro e no terceiro casos (a,c), o produto fica maior que o multiplicando; nos outros casos (b,d,e,f), o produto fica menor que o multiplicando.

Todos esses casos mostram que, envolvendo frações ou números decimais, a idéia de *aumento* nem sempre corresponde à multiplicação e que professor e aluno precisam conscientizar-se desse obstáculo para superá-lo. É preciso, também, analisar e compreender cada caso para mudar de concepção quando a situação exigir.

Nesse sentido, é importante ressaltar que a idéia do *aumento*, subjacente ao conceito da multiplicação de naturais, não é inadequada e nem se constitui em dificuldade ou obstáculo para os números naturais. Pode, no entanto, tal concepção se constituir em obstáculo para a multiplicação de decimais e frações.

Por outro lado, existe uma regra inadequada na multiplicação de decimais, comumente utilizada na escola e que se constitui em obstáculo para a compreensão do respectivo algoritmo, que consiste em: "multiplica-se como se fossem naturais, conta-se o número de *casas* dos dois fatores e coloca-se a vírgula no produto, contando o número de casas da direita para a esquerda" . Ressalte-se que a matemática não é um faz-de-conta; os fatores são números decimais e, portanto, devem ser tratados como tais. Veja-se um exemplo: 3,44 x 6,2. Uma das estratégias utilizadas para efetuar essa multiplicação é: transformar os fatores em inteiros, multiplicando o 1° por 100 e o 2° por 10; depois, multiplicar os dois inteiros entre si (naturais, agora) e, por último, dividir o produto por 100 por 10 (ou pelo produto de 100 por 10), uma vez que os fatores foram multiplicados por 100 e por 10 e o produto ficou multiplicado por 1000 (aumentado em mil vezes). Subjacente a este processo, pode-se identificar a origem da regra simplificada citada acima, mas o problema não é a regra em si; é a falta de entendimento de como foi gerada. Nesse sentido, a regra simplificada pode se caracterizar como um obstáculo para a compreensão do algoritmo da multiplicação.

É importante que o aluno conheça também a regra simplificada para utilizá-la com economia de tempo, quando não tiver calculadora. O que não é bom é ele saber somente a regra simplificada e repeti-la sem significado, cometendo, inclusive, erros absurdos, sem controle de situação (GRANDO, 1988).

2.4 Divisão

A falta de percepção da noção de distribuição ou de repartição em partes iguais, subjacente ao conceito de divisão, gera dificuldades para a compreensão do próprio conceito e, conseqüentemente, do algoritmo. No processo da divisão, a utilização do método de *tentativa e erro*, além de mostrar a falta desta noção, mostra a falta de compreensão do sistema de numeração decimal e de suas respectivas transformações. A dificuldade do aluno de iniciar a operação, por não saber *até que algarismo é preciso tomar*, deve-se à falta de análise do número de unidades em cada ordem para saber se é possível reparti-las pelo número indicado no divisor. Por exemplo, numa situação em que é necessário efetuar 238:4, a análise para verificar a possibilidade de distribuir, no mínimo, uma centena de objetos para cada uma das quatro pessoas que representa o divisor mostra que, para iniciar a divisão, é necessário, primeiramente, transformar as duas centenas em dezenas. Nesta etapa, já é possível prever o número de dígitos (ordens) do quociente. Este controle resulta do fato de essa divisão ser iniciada com a repartição de dezenas e, por isso, o quociente só poderá ter duas ordens, dezenas e unidades. As três dezenas (resto parcial) que restaram da divisão de 23 dezenas (20 da transformação das duas centenas, mais 3 dezenas de 238) por 4 são transformadas em unidades para dar continuidade à operação. Percebe-se que a transformação das centenas em dezenas, das dezenas em unidades, para possibilitar as divisões, elimina a expressão *abaixa o oito*, por exemplo, tão inadequada no algoritmo da divisão. O processo de tentativa e erro utilizado no ensino tradicional, sem levar o aluno à compreensão dos passos descritos acima, além de ser mecânico, mostra a falta ou a perda de controle do que está sendo feito, levando, conseqüentemente, a erros absurdos.

Uma concepção válida para os números naturais, e que não vigora para os decimais e para as frações, é a de que, na divisão, há uma *diminuição* em relação ao dividendo. Vejam-se os exemplos a seguir:

a) 3 : 24 = 0,125 (q<D)	d) 36 : 3 = 12 (q<D)	g) 3,6 : 2,5 = 1,44 (q<D)
b) 3 : 2,4 = 1,25 (q<D)	e) 36 : 0,3 = 120 (q>D)	h) 3,6 : 0,25 = 14,4 (q>D)
c) 3 : 0,24 = 12,5 (q>D)	f) 36 : 0,03 = 1200 (q>D)	i) 3,6 : 0,025 = 144 (q>D)

Constata-se que, em c), e), f), h) e i), o quociente (q) é maior que o dividendo (D), o que contradiz a idéia de diminuição.

Conceitualmente, a operação de divisão é mais complexa que as anteriores, uma vez que envolve duas operações fundamentais (multiplicação e subtração) e, geralmente, na aprendizagem, o número de dificuldades aumenta. Nesse sentido, os obstáculos que surgiram nas operações anteriores acumulam-se nesta operação.

3 Conclusões e implicações educacionais

Pela análise dos exemplos de dificuldades através das operações fundamentais, pode-se perceber que a identificação de obstáculos deu-se à caracterização das dificuldades como conhecimentos ou concepções que, em um determinado momento, foram válidos, mas que, em outros, tornaram-se inadequados (concepção de *aumento* e de *diminuição* nas operações de multiplicação e de divisão, respectivamente), ou como idéias ou regras utilizadas inadequadamente ou sem compreensão (*vai um* e *vírgula embaixo de vírgula*, na adição; *empresta um* na subtração). Todos os obstáculos que foram identificados e apontados neste trabalho, segundo BROUSSEAU (1983) e HENRY (1991), devem-se a opções metodológicas e, por isso, de origem didática.

Esta análise mostra que alguns obstáculos devem ser evitados, outros não. O importante é que o professor e o aluno estejam alerta para tomar consciência deles no processo de ensino-aprendizagem; para evitá-los ou para mudar de concepção quando a situação exigir. Esta é uma preocupação própria da educação matemática como uma área interdisciplinar, mais precisamente da didática da matemática.

Abstract

In the teaching-learning process, a teacher meets difficulties every day, which in many cases he cannot overcome. For instance, some of them may be related to knowledge itself or to the form which is given to it in the classroom. In this article one presents briefly the "state of the art" of investigations about the difficulties and obstacles, especially in math education, and then one analyzes the theme through concepts and algorithms of the main math operations.

Referências bibliográficas

ARTIGUE, Michéle. Épistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, Bordeaux, v. 10, n. 23, p.241-286, 1990.

BACHELARD, Gaston. *La formación del espíritu científico*. 19. ed. México: Siglo - Veintiuno Éditores, 1993.

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologiques et les problemes en mathematiques. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, Bordeaux, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.

________. Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathematiques. In: BEDNARZ, Nadine e GARNIER, Catherine (org.). *Construction des savoirs: obstacles & conflits*. Montréal: Agence dÁRC, 1989a, p. 41-63.

________. Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique.In: BEDNARZ, Nadine e GARNIER, Catherine (org.). *Construction des savoirs: obstacles & conflits*. Montréal: Agence dÁRC, 1989b, p. 277-285.

GRANDO, Neiva Ignês. *A matemática na agricultura e na escola*. Dissertação de Mestrado. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1988.

HENRY, Michel. *Didactique des Mathématiques*. Besançon: IREM, 1991.

VERGNAUD, Gérard. Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. In: BEDNARZ, Nadine e GARNIER, Catherine (org.). *Construction des savoirs: obstacles & conflits*. Montréal: Agence dÁRC, 1989, p. 35-40.

SIERPINSKA, Anna. Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. In: BEDNARZ, Nadine e GARNIER, Catherine (org.). *Construction des savoirs: obstacles & conflits*. Montréal: Agence dÁRC, 1989, p. 131-147.