

A construção do conhecimento lógico-matemático segundo Piaget

implicações para a educação matemática

Ana Cristina S. Rangel *

O número imaginário, onde e como ele teria existido? Desde toda a eternidade ou desde que surgiu o pensamento humano?

Piaget

Considerações sobre a natureza do conhecimento lógico-matemático

Piaget defende a idéia de que os números naturais e todo o conhecimento lógico-matemático não são frutos de descobertas ou de invenções, mas de um processo progressivo de construção a partir da atividade adaptativa do sujeito em sua integração com o meio.

Por que a epistemologia genética de Piaget descartaria a possibilidade de o conhecimento matemático e de a própria exis-

tência do número não ser resultado de um processo de descoberta ou de invenção? O epistemólogo (1967) responde que só se descobre aquilo que já existe. Nesse entendimento, o ser humano só *descobriria* a existência do número se esse conhecimento possuísse existência prévia na realidade externa e o conhecimento lógico-matemático fosse possível de ser adquirido ou produzido como simples cópia da realidade observável. A explicação empirista sobre o papel da experiência reduz a inteligência e todo o conhecimento matemático à descoberta das propriedades observáveis dos

* Mestre em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Autora do livro *Educação matemática e a construção do número pela criança* (Artes Médicas). Professora do Programa de Pós-Graduação e da Graduação da Faculdade Ritter dos Reis, Ulbra/Canoas.

objetos e das ações exercidas materialmente sobre eles (experiência física), e Piaget nega, radicalmente, em sua teoria, a concepção empirista a respeito da natureza do conhecimento lógico-matemático.

Encontramos, porém, no empirismo, algo mais que uma simples afirmação do papel da experiência: o empirismo é, antes de mais nada, uma certa concepção da experiência e da sua ação. Por um lado, tende a considerar que a experiência se impõe por si mesma, sem que o indivíduo tenha necessidade de organizá-la, isto, como se fosse impressa diretamente sobre o organismo, prescindindo da atividade do indivíduo para poder constituí-la. Por outro lado, como consequência disso, o empirismo considera que a experiência existe por si mesma... (Piaget, 1968, p. 315-396).

Por outro lado, não é possível considerar o conhecimento matemático como produto da *invenção* da mente humana. Na *invenção*, o sujeito exercita a liberdade da escolha, que lhe permite criar e chegar a resultados quaisquer surpreendentes, enquanto que o número e as leis matemáticas são concludentes e, portanto, inacessíveis à escolha livre (Kesselring, 1993, p. 78).

Contrapondo à possibilidade de a existência do número e de sua aquisição ser fruto de descobertas de propriedades observáveis na experiência física ou de um processo de livre invenção, Piaget propõe a natureza construtiva do conhecimento lógico-matemático, através de uma outra ordem de experiência, que denomina de *experiência lógico-matemática*:

Parece excluído, em primeiro lugar, interpretar as estruturas lógicas como formas a priori, pois a aprendizagem e a experiência são necessárias para a sua

elaboração. Trata-se, é verdade, de um tipo especial, que não comporta, como a experiência física, uma abstração a partir das ações se exercendo sobre esses objetos e sim de coordenações que ligam essas ações (experiência lógico-matemática). A aprendizagem das estruturas lógicas é, pois, ela mesma, um tipo especial, pois consiste simplesmente em exercer ou diferenciar estruturas lógicas ou pré-lógicas anteriormente adquiridas (Piaget, 1973, p.99).

Piaget denomina o tipo de abstração característica da experiência lógico-matemática de *abstração reflexionante* e aquela própria da experiência física, de *abstração simples*. A abstração reflexionante é, portanto, construída pela mente do sujeito ao criar relacionamentos entre vários objetos e coordenar essas relações entre si, enquanto a abstração simples, ou empírica, é a abstração do próprio objeto, ou seja, de suas propriedades, mediante a observação das respostas que o objeto da ação exercita sobre ele.

Inicialmente, a experiência lógico-matemática apóia-se na reflexão sobre as ações materiais exercidas sobre objetos; porém, com os progressos da inteligência, ela pode dispensar a aplicação sobre os objetos, e esta criação e coordenação de relacionamentos ocorrem sobre as operações simbolicamente manipuláveis.

As ações lógico-matemáticas do sujeito podem, num momento dado, dispensar aplicação aos objetos físicos, interiorizando-se em operações simbolicamente manipuláveis. Dizendo de outra maneira, é por isso que, a partir de um certo nível, existem uma lógica e uma matemática puras às quais a experiência é inútil. De outro lado, é por isso que essa lógica e essa matemática puras são suscetíveis de ultrapassar infinitamente a experiên-

cia, sem estarem limitadas pelas propriedades físicas dos objetos (Chiarottino, 1984, p. 38).

A grande contribuição epistemológica de Piaget foi mostrar que as condições necessárias à experiência lógico-matemática são construídas nessa própria experiência. A invariância e, em particular, a invariância numérica¹ - uma condição necessária (portanto, um dado *a priori* para realizarmos quaisquer experiências ou operações numéricas) é produto da construção da mente humana. Assim, qualquer pressuposto concebido como um dado *a priori* à atividade matemática é essencialmente produto da construção ou reconstrução do sujeito em sua interação com o meio: "Ao invés de falar em construção, Piaget também se referia, freqüentemente, ao conceito de *reconstrução* apontando, com isso, para um novo processo cognitivo cuja base é, ela própria, o resultado de combinações e reconstruções mais remotas" (Kesselring, 1993, p. 78).

Implicações para a educação matemática

Piaget concebe, em sua teoria, que o pensamento matemático é um prolongamento das construções espontâneas da inteligência. Ele sustenta a idéia de que as estruturas operatórias da inteligência em formação manifestam, desde o princípio, a presença de três grandes tipos de organização que correspondem ao que serão, em matemática, as estruturas algébricas, de ordem e as estruturas topológicas:

Em sua origem, o desenvolvimento das operações aritméticas e geométricas espontâneas da criança e, sobretudo, as opera-

ções lógicas que constituem suas necessárias condições prévias se encontram em todas as etapas; primeiro, uma tendência fundamental de organização de totalidades ou sistemas, fora dos quais os elementos carecem de significado e de existência e, em seguida, uma distribuição desses sistemas de conjunto segundo três espécies de propriedades que correspondem precisamente as das estruturas algébricas, de ordem e topológicas (Piaget, 1968b, p. 7).

O autor defende o ponto de vista de que o edifício da matemática repousa sobre estruturas, as quais correspondem às da própria inteligência. Para Piaget, a estrutura cognitiva é a forma, mas não é construída independentemente do conteúdo a que se aplica. Assim, na abstração reflexionante, o sujeito aplica a forma (estrutura) já construída na busca de entendimento dos conteúdos; por sua vez, esses provocam seguidamente resistências que impedem sua imediata compreensão (assimilação), exigindo do sujeito um esforço para superação de suas formas atuais por novos ajustamentos (acomodação), através de um processo de reorganização interna e diferenciação das estruturas presentes em sua inteligência. É nessa atividade adaptativa do sujeito que, sucessivamente, novas e melhores formas de reflexão são construídas e o conteúdo é assimilado ao plano da razão. Nessa perspectiva, o conteúdo da matemática coincide com a própria forma da razão humana:

Trata-se de um processo em espiral... uma alternância ininterrupta de forma e conteúdo, sem limites, sem fim e sem começos absolutos. A característica desta espiral é a de conduzir a formas cada vez mais ricas e, conseqüentemente,

mais importantes em relação aos conteúdos. O constante processo de abstração reflexiva leva à construção de maior número de formas em relação aos conteúdos. As formas podem determinar a elaboração de estruturas do pensamento formal (exemplo, a Matemática), ou de estruturas atribuídas aos objetos e às regularidades da Natureza em que consistem as explicações causais da Física. (...) O difícil de se entender é que Piaget ao falar da capacidade de raciocinar, se refere a uma capacidade orgânica e que a lógica e a Matemática aparecem em sua teoria como produto dessa capacidade, cujo conteúdo são as próprias formas ... (Chiarottino, 1984, p.70-71).

Assim, os conceitos matemáticos não podem ser diretamente ensinados, nem se trata, pois, de treinar formas em si mesmas para sustentar aprendizagens posteriores, mas de apelar para a ação construtiva do sujeito, que, agindo sobre os fatos matemáticos e refletindo sobre as relações construídas por sua mente, torna-se capaz de postular coordenações novas em seu pensamento, melhorando e superando, portanto, suas formas atuais de conhecer, na medida em que reconstrói o próprio saber matemático.

O ensino da matemática sempre se ocupou com o formalismo e o rigor que caracterizam esta ciência, porém a educação matemática não pode partir da estrutura lógico-formal dessa disciplina, nem coisificá-la para, pretensamente, torná-la acessível à mente infantil. O desafio que se impõe ao ensino da matemática é considerarmos tanto a natureza dessa ciência quanto os ensinamentos da psicologia do desenvolvimento.

O educador, para ser fiel ao espírito das matemáticas contemporâneas, deve considerar o pensamento matemático como um prolongamento das construções espontâneas da inteligência e recorrer, assim, aos ensinamentos da Psicologia tanto como da lógica (...) O objeto do ensino da matemática foi sempre alcançar o rigor lógico e compreensão de um formalismo suficiente. Somente a Psicologia está em condições de proporcionar aos pedagogos dados sobre o modo de conseguir, com maior segurança este rigor, este formalismo. Nada prova que colocando o formalismo a princípio o encontramos ao final. Porém, os estragos de um pseudo formalismo por ser demasiado precoce, mostram os perigos de um método que ignora as leis do desenvolvimento mental (Piaget, 1968ba, p. 27).

A criança pequena possui uma forma de pensar qualitativamente diferente da do adulto, e as suas concepções sobre os conceitos matemáticos muitas vezes nos são estranhas, tanto quanto a nossa lógica é incompreensível à criança. É na sua interação dinâmica com o meio, exercitando progressivamente descentrações, que a criança constrói a lógica operatória e as noções matemáticas (Rangel, 1994, p.149).

Nesse sentido, diz-se que a atividade que constrói a inteligência e o conhecimento lógico-matemático é, ao mesmo tempo, estruturada e estruturante. A atividade é estruturada, enquanto orientada pelo sistema de ações e relações possíveis até então, produzido pela atividade do sujeito e posto em funcionamento para organizar e atribuir significado a um determinado objeto que se deseja assimilar. A atividade é estruturante porque ela própria cria novas e atuais formas, melhores e superiores às anteriores, por modificação do velho sistema, ao se ajustar às resistências impostas

pelo objeto desejado através de novas ordenações de ações ou de relações.

Conhecer, para Jean Piaget, é, portanto, agir e transformar o objeto do conhecimento, inserindo-o num sistema dinâmico de relações. Conhecer é organizar, estruturar e interpretar o vivido, o experimentado. Assim, não há conhecimento que não parta do vivenciado, porém, para conhecer, o sujeito vai além da vivência, pois precisa refletir e se apropriar dos mecanismos da própria ação. “O objeto só é conhecido na medida em que o sujeito consegue agir sobre ele e essa ação incompatível com o caráter passivo que o empirismo, em graus diversos, atribuiu ao conhecimento” (Piaget, 1973, p. 99).

A aprendizagem real e duradoura dos conceitos matemáticos só será possível se as crianças forem solicitadas e desafiadas pelo meio educativo a refletir mais sobre as ações que exercitam, prevendo-as, antecipando os efeitos possíveis dessas ou recapitulando e reconstituindo mentalmente aquelas que determinaram certo fato ao compararem objetos distantes no passado, representando-os e comparando essas representações.² Cabe ao educador solicitar, encorajar e desafiar a criança a agir, estabelecendo o maior número possível de relações sobre os objetos e os acontecimentos vivenciados, descentrando-se para ordenar as diferentes ações experimentadas ou as diferentes hipóteses de interpretação do seu grupo. Um conceito matemático não é reconstruído por um indivíduo que não ouse expor e confrontar o seu ponto de vista com o do outro, pondo-o em xeque, revisando-o e reelaborando-o para atingir maior coerência e objetividade.

Piaget anuncia que as operações lógico-matemáticas não ocorrem num indivíduo

isolado de seu meio social e cultural. Apesar de a operação mental ser um ato individual, ela é fruto de efetivas cooperações, ou seja, resulta da coordenação de ações exercitadas interiormente, simbolicamente, pelo próprio sujeito (coordenações em nível intra-individual), e, simultaneamente, resulta da coordenação de ações (relações e operações) realizadas entre diferentes indivíduos pertencentes a um mesmo grupo social (coordenações interindividuais), sendo, portanto, as operações mentais socializadas todas elas.

A lógica é antes de tudo a expressão da coordenação geral das ações; e esta coordenação geral das ações implica necessariamente *uma dimensão social* porque a coordenação interindividual dos atos e sua coordenação intraindividual constituem um único e mesmo processo sendo as operações do indivíduo *socializadas todas elas*, e constituindo a cooperação no sentido estrito em tornar comum as operações de cada um (Piaget, 1970, p.77; grifo nosso).

Uma hipótese postulada por uma criança a respeito de um determinado conceito matemático só será autoquestionada e posta em dúvida quando, na sua interação com o meio, ela tiver oportunidade de agir anunciando, espontaneamente, o seu ponto de vista, sem medo de errar e, pelo exercício da descentração, colocar-se no ponto de vista dos outros, procurando melhor se fazer entender. Conseqüentemente, a criança toma conta das suas contradições internas ou das falhas da sua interpretação e, pelas leis de reciprocidade, busca a coordenação simultânea dos diferentes pontos de vistas ou hipóteses anunciadas, construindo novas coordenações internas de ações ou relações, para postular uma

nova interpretação desse conceito, mais coerente e objetiva, portanto, superior às hipóteses anteriores.

Os erros precisam ser percebidos como resultado das concepções do aprendiz e, portanto, não devem ser minimizados ou evitados. É preciso oferecer investigações abertamente desafiadoras em contextos significativos realistas, permitindo aos aprendizes explorar e gerar muitas possibilidades, tanto corroboradoras como contraditórias. As contradições, em particular, precisam ser esclarecidas, exploradas e discutidas (Fosnot, 1998, p.46).

Educar para a construção do conhecimento matemático é comprometer-se com a formação de sujeitos capazes de diálogo franco, de crítica e autocritica, capazes de pensamento criativo e transformador; sujeitos que se posicionem frente à realidade e que defendam seus pontos de vista. É formar sujeitos que aprendam a situar o seu eu frente aos outros, convivendo de forma solidária e enfrentando, de maneira positiva, as contradições vivenciadas. É educar a coragem e a ousadia para buscar a superação dos conflitos, confrontando e negociando os diferentes significados na interação social ao criar novas coordenações entre relações para melhor explicar a realidade em que se vive. É favorecer, portanto, a construção da autonomia intelectual, moral e, conseqüentemente, social e afetiva, com base no exercício das relações de reciprocidade, que é uma propriedade das relações lógicas e quantitativas e, simultaneamente, das relações sociais e afetivas. “A capacidade de perceber relações a partir de dois lados também, de grande importância para o comportamento social da criança. Piaget deu a tal capacidade o

nome de reciprocidade (*wechsel seitigkeit*): É recíproca uma relação entre duas pessoas se ambas se envolvem uma com a outra e cada uma avalia por ambos os lados a relação compartilhada” (Kesselring, 1993, p. 150)

A educação matemática deveria, portanto, apoiar-se na concepção construtivista que defende a construção progressiva das estruturas operatórias pela atividade do sujeito. Tal concepção privilegia o espaço da escola, no qual o professor propõe jogos, desafios e situações-problemas que possibilitam o exercício ou o aprimoramento das estruturas da inteligência, na medida em que o aluno age e reconstrói o conhecimento matemático, expressando-o através da linguagem dos signos operatórios.

A aprendizagem das estruturas cognitivas não consiste nem em colocar simplesmente em jogo condutas operatórias previamente adquiridas, nem em transformá-las totalmente: “Aprender é proceder a uma síntese indefinidamente renovada entre a continuidade e a novidade” (Inhelder, 1977, p. 262).

A linguagem matemática, nessa visão, também é reconstruída progressivamente pelo sujeito através de um processo progressivo de apropriação em função de duas necessidades. Inicialmente, pela necessidade de o sujeito registrar as relações que estão sendo estabelecidas para melhor refletir sobre suas próprias ações, organizando-as, ordenando-as e sistematizando-as para recapitulá-las ao antecipar ações futuras. A linguagem matemática também cumpre outra função, simultaneamente a essa, que é a necessidade do registro para melhor se fazer entender pelos outros, ao demonstrar os caminhos que foram percorridos no processo de reconstrução do conhecimento, validando-o ao compartilhá-lo jun-

to à comunidade da sala de aula. “As idéias são aceitas como verdade apenas a medida que fazem sentido para a comunidade e assim alcançam o nível de *tidas-como-partilhadas*” (Fosnot, 1998, p.47).

Isso supõe acreditar que a vida do sujeito é dinâmica e que a construção da inteligência e a própria reconstrução da matemática não se reduzem às atividades fora ou dentro da escola. Na verdade, a vida fora da escola é ponto de partida para as conquistas que serão desencadeadas dentro da escola, enquanto esta privilegia a atividade autônoma e espontânea do sujeito. Por outro lado, o sujeito que se sente suficientemente problematizado e curioso, com coragem de buscar novas compreensões da realidade, a partir do trabalho realizado na escola, estenderá essa conduta em suas vivências fora da escola. Ele continuará buscando, em suas interações com os outros e o mundo, novas situações para colocar em exercício suas formas de interpretar e agir, pondo-as em xeque, autoquestionando-se incessantemente, lançando-se, assim, à construção de novas formas de entendimento e de transformação dessa realidade e de si mesmo. Esse é um processo realmente educativo, pois, como afirma Piaget, “o ideal da educação é, antes de tudo, aprender a aprender e aprender a se desenvolver e aprender a continuar a se desenvolver depois da escola” (1973, p. 32).

Notas

- 1 A invariância numérica é construída pela criança quando compreende que a quantidade de fichas de duas coleções numericamente equivalentes permanece a mesma independentemente das transformações espaciais que podem ser realizadas em uma das coleções:

Para a criança conceber que A e B têm a mesma quantidade de fichas, Piaget afirma que ela tem de subordinar os aspectos figurativos dados pela percepção (comprimento das filas) aos aspectos operativos do pensamento (reflexão sobre as ações e transformações que são realizadas sobre as fichas). Assim, pela reversibilidade operatória, a criança postula a conservação da quantidade, concebendo a invariância numérica. Kesselring (1993, p. 148) afirma que a reversibilidade seria apenas um dos aspectos em jogo, e não a causa da conservação, pois a falta de reversibilidade é devida à falta de um sistema de relações. “O problema dessas crianças não é, primeiramente, o de reversibilidade insuficiente. Apresenta-se em qualquer situação em que se trata de coordenar, uma com a outra, duas relações e mesmo se a reversão das relações não entra em jogo” (Kesselring 1993, 149).

Neste caso, as duas relações que a criança precisaria coordenar num único sistema compensatório seriam a distância entre as fichas e o comprimento. “O comprimento de B, é maior, porque a distância entre as fichas é maior, mas o número de fichas é o mesmo em A e B. Esta compreensão é, portanto, fruto de uma atividade da mente quando a criança constrói um sistema operatório que coordena e integra, simultaneamente, duas relações. Assim, a criança estabelece uma relação bi-unívoca e recíproca, concebendo que, para cada aumento da distância de B1, corresponde o mesmo aumento no comprimento de B2, comparando, portanto, objetos e configurações existentes no passado, por representá-las mentalmente ao comparar representações, o que pressupõe a construção de uma representação de segunda ordem (grifo/ colocações de Kesselring em conferência, Porto Alegre, 2000).

- 2 Segundo Kesselring (conferência outubro, 2000, Porto Alegre), a construção das operações mentais sustenta-se em representações de segunda ordem, fruto da comparação de objetos existentes no passado, representando-os.

Referências bibliográficas

- CHIAROTTINO, Zélia Ramozzi. *Ensaio 107*: em busca do sentido da obra de Jean Piaget. São Paulo: Ática, 1984.
- FOSNOT, Catherine Twomey (Org.). *Construtivismo*: teoria, perspectivas e prática pedagógica. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.
- INHELDER, B.; BOVET, M.; SINCLAIR, H. *Aprendizagem e estruturas do conhecimento*. São Paulo: Saraiva, 1967.

KESSELRING, Thomas. *Jean Piaget*. Petrópolis: Vozes, 1993.

PIAGET, Jean. *La naissance de l' 'intelligence*. Nauchatel: Delachaux et Niestlé, 1968.

PIAGET, Jean. *Psicologia e pedagogia*. Rio de Janeiro: Forense, 1970.

PIAGET, Jean. *Problemas de psicologia genética*. Rio de Janeiro: Forense, 1973.

PIAGET, Jean. *Para onde vai a educação*. Rio de Janeiro: Forense, 1980.

PIAGET, J. et al. *La enseñanza de las matemáticas*. 3.ed. Madrid: Aguilar, 1963.

RANGEL, Ana Cristina. *Educação matemática e a construção do número pela criança*. Porto Alegre: Artmed, 1992.

RANGEL, Ana Cristina. Matemática e a construção do conhecimento na escola infantil. *Revista Educação e Realidade*, Porto Alegre 19(1): 1-164, jan./jun. 1994.