

Estudio numérico de la longitud de pandeo inelástica de columnas de concreto armado intraslacionales

América Bendito,⁽¹⁾ M. L. Romero,⁽²⁾ J. L. Bonet,⁽³⁾ P. F. Miguel,⁽⁴⁾ M. A. Fernández⁽⁵⁾

Trabalho recebido em 11/7/2008 e aprovado para publicação em 31/10/2008.

Resumen

Este trabajo propone una nueva ecuación para la longitud de pandeo para columnas de concreto armado esbeltas e intraslacionales. Dicha ecuación es válida para concreto normal y de alta resistencia. La ecuación se obtuvo de un análisis de sensibilidad realizado en un modelo numérico 2D de elementos finitos no-lineales que toma en cuenta el comportamiento real de las columnas (fisuración, plastificación y los efectos de segundo orden). El modelo numérico se calibró con 44 ensayos experimentales realizados por el grupo de investigación. Se realizó un estudio comparativo entre el modelo numérico y diferentes códigos de diseño, existiendo diferencias importantes respecto a cada una de ellos: la norma ACI (desde 37% hasta -3%), el código español EHE (desde 26% hasta -9.26%), el Eurocódigo N° 2 (desde 14% hasta -14%).

Palabras clave: Concreto armado. Longitud efectiva. Pandeo. Columnas intraslacionales. Inelástico. Esbeltez.

⁽¹⁾ Prof. Dra. Departamento de Ingeniería, Núcleo Universitario Rafael Rangel, Universidad de Los Andes, Venezuela. Email: americab@ula.ve

⁽²⁾ Prof. Dr. Universidad Politécnica de Valencia, España. Email: mromero@mes.upv.es

⁽³⁾ Prof. Dr. Depto. Ingeniería Civil, Universidad Politécnica de Valencia, España. Email: jlbonet@cst.upv.es

⁽⁴⁾ Prof. Dr. Depto. Ingeniería Civil, Universidad Politécnica de Valencia, España. Email: pmiguel@cst.upv.es

⁽⁵⁾ Profesor Dr. Depto. Ingeniería Civil, Universidad Politécnica de Valencia, España. Email: mafernán@cst.upv.es.

1 Introducción

La mayoría de los estudios llevados a cabo para la determinación del cálculo de la longitud de pandeo en columnas reales de concreto armado se han realizado suponiendo hipótesis de comportamiento elástico y lineal del material o en la reducción de la rigidez de la columna, cosa que dista bastante del comportamiento real del concreto en donde la resistencia del concreto, la cuantía longitudinal de armadura, la esbeltez y la rigidez de los nodos, entre otros parámetros, tienen un efecto importante en la no linealidad de las columnas, Broms y Viest (1961).

Como es bien sabido, el dimensionamiento de una columna perteneciente a una estructura cualquiera consiste en pasar de esta columna real con unas condiciones de contorno genéricas a otra biapoyada mediante el empleo de la longitud de pandeo, que es la longitud que ha de tener esta pieza biarticulada y sometida a compresión simple para tener la misma carga crítica que la pieza real considerada.

En las especificaciones, tanto de acero como de concreto armado, la longitud efectiva de una columna se denomina βL en donde β es el factor de pandeo y L es la longitud de la columna. La magnitud de la longitud efectiva depende de la restricción rotacional en los extremos de la columna y de la resistencia al movimiento lateral de ésta.

Resulta claro que mientras menor sea la longitud efectiva de una columna, menor será el peligro de que se pandee y mayor su capacidad de carga.

Las normativas de uso actual, en la mayor parte de los casos, remiten para el cálculo de la longitud de pandeo a los ábacos de Jackson y Moreland o a ecuaciones simplificadas. Ambos casos suponen linealidad en el comportamiento del material.

Para el cálculo del factor de longitud efectiva en columnas de pórticos continuos, se define el término de rigidez relativa ψ el cual debe ser evaluado en cada extremo de la columna, donde la sumatoria comprende todos los miembros conectados rígidamente a cada junta y ubicados en el plano donde se analiza el pandeo de la columna. Esta expresión se presenta a continuación:

$$\Psi_i = \frac{\sum \left(\frac{E_c I_c}{L_c} \right)}{\sum \left(\frac{E_g I_g}{L_g} \right)} \quad (1)$$

Donde: I_c es el momento de inercia de la columna y L_c es la longitud no arriostrada de una columna y E_c es el módulo de elasticidad del material de la columna. I_g es el momento de inercia de la viga y L_g es la longitud no arriostrada de una viga u otro miembro que genere una restricción y E_g es el módulo de elasticidad del material de las vigas. Las inercias se toman alrededor de ejes perpendiculares al plano donde se considera el pandeo.

Este factor es utilizado en las Normas ACI (2005) y el Código Español, EHE (1999) y varía entre cero e infinito.

Aristizabal-Ochoa (1994) propone unos factores adimensionales de fijación que varían entre 0 para el caso de rótula en el extremo y 1 para el caso de empotramiento perfecto y se calculan según la ecuación (2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i = \frac{1}{1 + \frac{3}{R_i}} \\ Ri = \frac{K_i}{\left(\frac{E \cdot I}{L} \right)} \end{array} \right. \quad (2)$$

Siendo K_i la constante de rigidez a giro de cada muelle, E el módulo de elasticidad del concreto, I el momento de inercia de la sección transversal de la pieza respecto al eje de flexión de la misma y L la longitud de la columna.

Para estructuras de concreto armado existen varias propuestas de ecuaciones simplificadas para el factor de longitud efectiva algunas de ellas se encuentran en Mekonnen (1987), Cranston (1972), Duan et al. (1993) y Hu et al. (1993).

El problema de pandeo inelástico se ha estudiado desde 1889 cuando Engesser (1889), propuso la teoría del módulo de la tangente y luego en 1895 la teoría del módulo reducido.

Ambas teorías fueron aceptadas para el pandeo inelástico de columnas, hasta que Shanley (1947) demostró que la carga crítica está localizada entre la carga crítica predicha por la teoría del módulo tangente (límite inferior) y la predicha por la teoría del módulo reducido (límite superior).

Para estructuras de acero, Yura (1971) y Disque (1973) presentaron un factor “k” utilizando la teoría del módulo elástico tangente pero modificando el factor de restricción en los extremos.

Una manera simple de incluir el comportamiento inelástico en columnas y vigas es el método implementado en las Normas ACI (2005) en donde la rigidez de las vigas y columnas es reducido por un factor, por ejemplo en columnas para calcular la rigidez inelástica se multiplica por 0.7 la rigidez elástica.

Gracias al avance en los modelos numéricos el concreto puede estudiarse cada vez más próximo al comportamiento real. Bazant y Xiang (1997) plantean un estudio del pandeo inelástico aplicado a estructuras de concreto. Es un método complejo ya que proponen una forma senoidal de la deformada pero con una amplitud y frecuencia variables durante el proceso de carga. En este trabajo no se plantean calcular la longitud de pandeo, pero conceptualmente se corresponde con la frecuencia de la función senoidal, es decir los puntos en los que el momento se anula.

La aplicación de concreto de alta resistencia en la edificación o en la obra civil se ha incrementado notablemente en los últimos años. Los distintos métodos simplificados

para el cálculo de columnas se han desarrollado para el rango de aplicación de concreto normal (resistencia a compresión simple inferior a 50 MPa). Puesto que el comportamiento mecánico de del concreto de alta resistencia no es directamente extrapolable a partir de las experiencias obtenidas con concretos normales, es necesario revisar los distintos métodos simplificados para el cálculo en rotura de columnas esbeltas.

Según la revisión bibliográfica realizada no parecen existir estudios con modelos de elementos finitos 2D en el ámbito no-lineal que estudie la longitud de pandeo y que pueda representar la acumulación de la curvatura en la región D.

Por lo tanto, este trabajo propone una ecuación para el coeficiente β de pandeo teniendo en cuenta la no linealidad de la columna y la posibilidad de formación de rótulas plásticas tanto en concreto normal como de alta resistencia. Esta ecuación tiene la restricción para columnas intraslacionales.

Para ello, se dispondrá de un laboratorio numérico virtual, Bendito (2006), para realizar los ensayos numéricos necesarios a pandeo. Este laboratorio virtual se consiguió calibrando un modelo numérico 2D, utilizando el programa ATENA, Cervenka (1998) con 44 ensayos experimentales realizados por el grupo de investigación en elementos viga-columna sometidos a flexo-compresión.

El modelo incluye el criterio de fractura biaxial, efecto de tensión stiffening y elementos isoparamétricos cuadráticos integrados por integración por gauss con 4 puntos de integración.

Para mayor detalle se pueden revisar los parámetros de calibración en Bendito (2006), en donde el error de calibración fue del 2.03%.

2 Descripción del modelo

Los métodos simplificados que comprueban la estabilidad local de una columna (aislada o formando parte de una estructura) reducen el análisis a una columna equivalente bi-apoyada mediante el cálculo de la longitud de pandeo, función de la longitud real de la columna, de la tipología estructural y de la rigidez relativa de los elementos estructurales que convergen en cada extremo de la columna incluyendo la de éste.

La longitud de pandeo se define como la longitud que ha de tener esta pieza biarticulada y sometida a compresión simple para tener la misma carga crítica que la pieza real considerada. Por lo tanto, es necesario un modelo geométrico capaz de representar el comportamiento de una columna biarticulada para definir la longitud de pandeo para diferentes longitudes de la columna y diferentes rigideces de las vigas.

Con la herramienta numérica utilizada no es posible simular muelles por tener sólo los grados de libertad “u”, “v” en 2D, por lo que se hizo necesario realizar un modelo geométrico propio que represente un pilar con muelles en los extremos. Para ello se desarrolla un modelo de una columna con dos vigas elásticas unidas rígidamente a la columna y articuladas en el otro extremo. Estas vigas podrían representar la rigidez a giro de los muelles (K_a y K_b), tal como se muestra en la Figura 1.

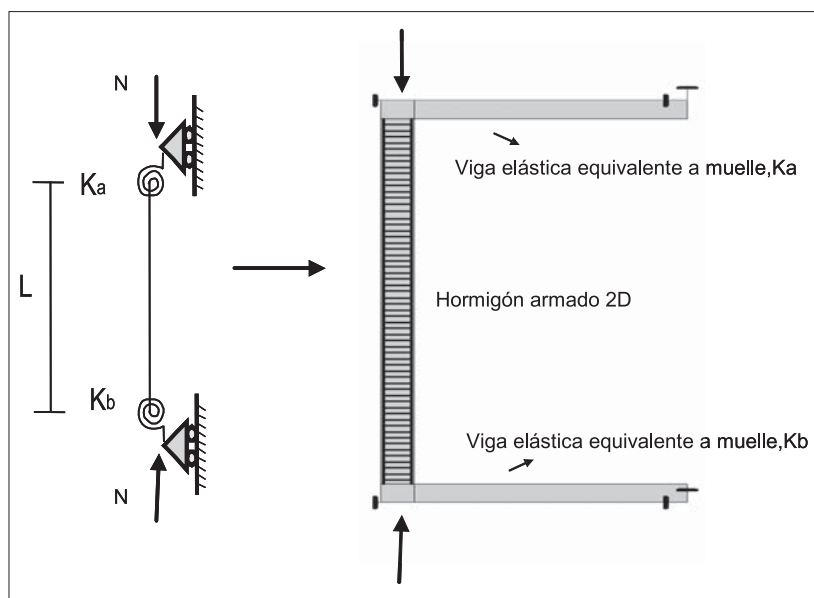


Figura 1: Modelo geométrico de pandeo

Se realizaron tres diferentes pruebas para demostrar que el modelo geométrico 2D tenía un comportamiento aceptable a pandeo.

1. Se modela la columna y los muelles con materiales elásticos para comparar el valor de beta numérico con la solución elástica. Se obtuvieron solo diferencias en el tercer decimal entre ambos valores de beta.
2. Se consideró la columna con comportamiento inelástico y los muelles elásticos pero con rigidez cero. Se realizaron gráficas de carga-esbeltez para comparar con los valores elásticos de Euler y con el valor máximo de carga de una sección. Se observa el valor de axil máximo similar al valor seccional y un comportamiento similar al de la ecuación de Euler.
3. Se realizaron curvas de carga normalizada-esbeltez para observar coherencia en la influencia del hormigón y de la cuantía de armadura. Se verifica la conclusión de Broms y Viest (1961) “al aumentar la proporción de carga que se lleva la armadura conduce a columnas más estables, es decir columnas de concreto de alta resistencia o con menor cuantía mecánica tienden a estar más afectadas por la longitud”.

Por lo tanto el modelo geométrico con rigidez cero en las vigas muestra un comportamiento similar al de una columna biarticulada, por esta razón, es posible definir la longitud de pandeo para diferentes longitudes de la columna y diferentes rigideces de las vigas que simulan muelles. Las curvas de carga-esbeltez para un valor de cero en la

rigidez de las vigas y columnas inelásticas se denominarán **curvas base**. Existiendo una curva base para cada combinación de parámetros.

Con la columna inelástica y diferentes rigideces elásticas en las vigas se observaron diferencias importantes entre los valores elásticos e inelásticos del coeficiente de pandeo (menores valores de β), por lo que se hace necesario un estudio más detallado tomando en cuenta la no-linealidad de los materiales. Conceptualmente, esto puede explicarse porque la columna real de concreto es menos rígida (debido a la fisuración y otros efectos) que el teórico elástico, es como si las vigas presentasen mayor rigidez relativa frente al giro, reduciendo la rigidez relativa de cada extremo, Ψ , y por tanto, β . El problema fundamental es que la rigidez de las estructuras de concreto no sólo depende de la fisuración sino también de la cuantía de acero, del tipo de concreto, etc.

Así, es necesario un estudio de sensibilidad para detectar los parámetros de mayor influencia en el coeficiente, β , de la longitud de pandeo.

3 Estudio de sensibilidad

En la Tabla 1 se muestran los factores que se toman en cuenta en el estudio de sensibilidad.

Tabla 1: Parámetros a variar en el estudio de sensibilidad

Parametros de estudio	Rango
Resistencia del hormigón, f_c	30, 60 v 90 (MPa)
Cuantía longitudinal, ρ_g	2%, 3% v 4%
Esbeltez geométrica ($\lambda = l/h$)	20, 30, 40, 50
Resistencia de la armadura, f_y	400, 500 (MPa)
Factores de fijación en los muelles, $\rho_1 \rho_2$	0.2-0.2
	0.2-0.8
	0.5-0.5
	0.6-0.6
	0.8-0.8

Tanto la columna como las vigas tienen sección cuadrada de 30 x 30 cm. Para la columna las armaduras se han supuesto ubicadas una en cada esquina de la columna de forma simétrica. El recubrimiento de las cabillas fue considerado como un 10% de la altura y ancho de la columna.

Con el uso de la herramienta numérica, basándose en el modelo geométrico de la Figura 1 y variando los parámetros mencionados en la Tabla 1 se obtiene la carga crítica a compresión (N_{crit}) para cada uno de los 360 casos ejecutados.

Introduciendo cada valor de N_{crit} en la ecuación de la llamada curva base, según cada caso, ajustada a un polinomio de quinto grado por medio de aproximaciones de Newton, se obtiene la esbeltez correspondiente para ese axil. Despejando de la fórmula de esbeltez se obtiene el beta inelástico. Este procedimiento se muestra en la Figura 2.

Se generaron muchas curvas en el estudio de sensibilidad pero solo algunas son presentadas en las Figuras 3, 4, 5 y 6.

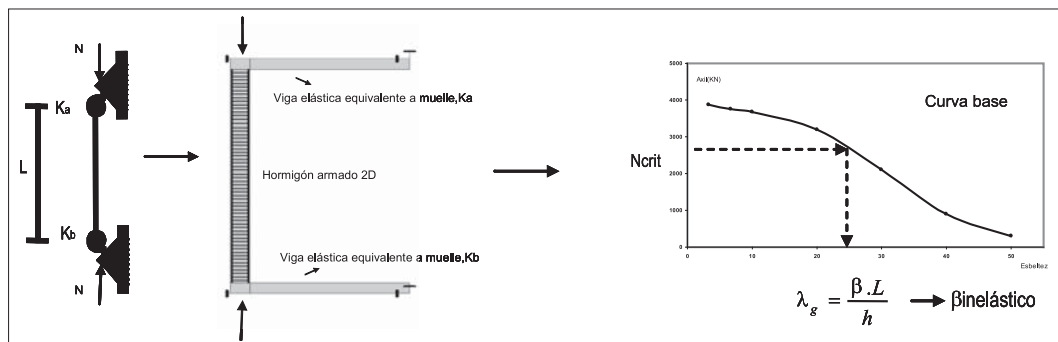


Figura 2: Procedimiento para el cálculo del coeficiente de pandeo a modo de esquema

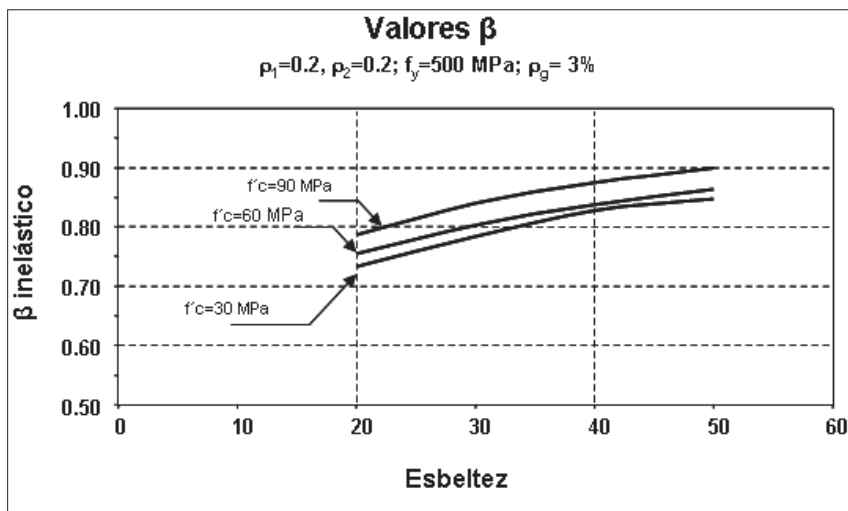


Figura 3: Curvas $\beta_{inelástico} - \lambda$ variando $f'c$

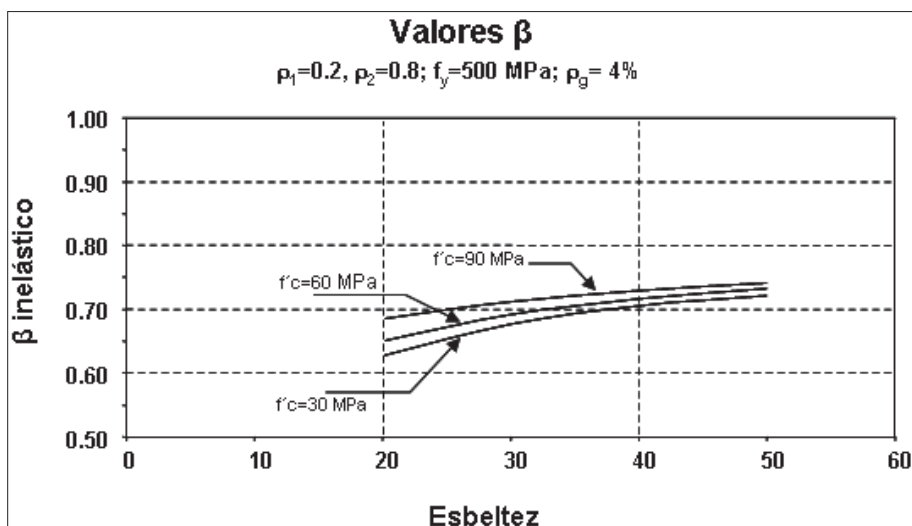


Figura 4: Curvas $\beta_{\text{inelástico}} - \lambda$ variando $f'c$

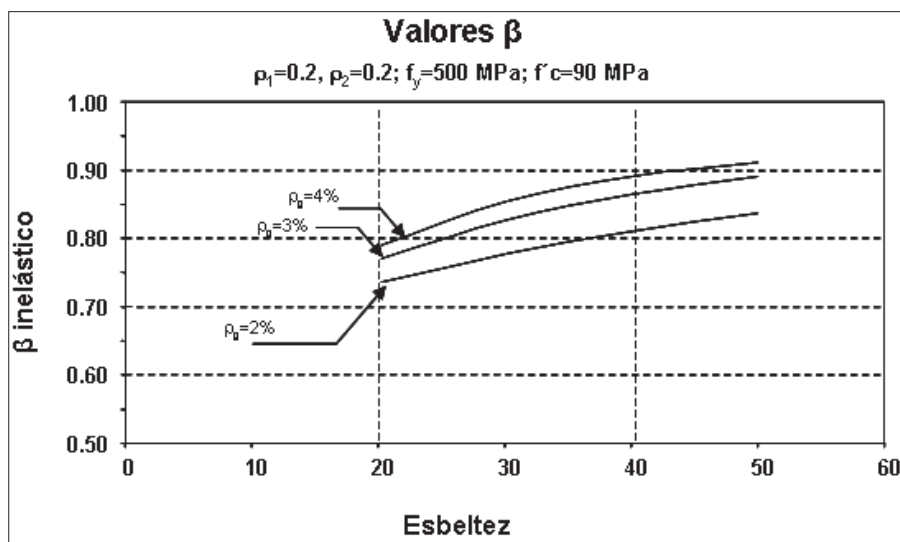


Figura 5: Curvas $\beta_{\text{inelástico}} - \lambda$ variando ρ_g

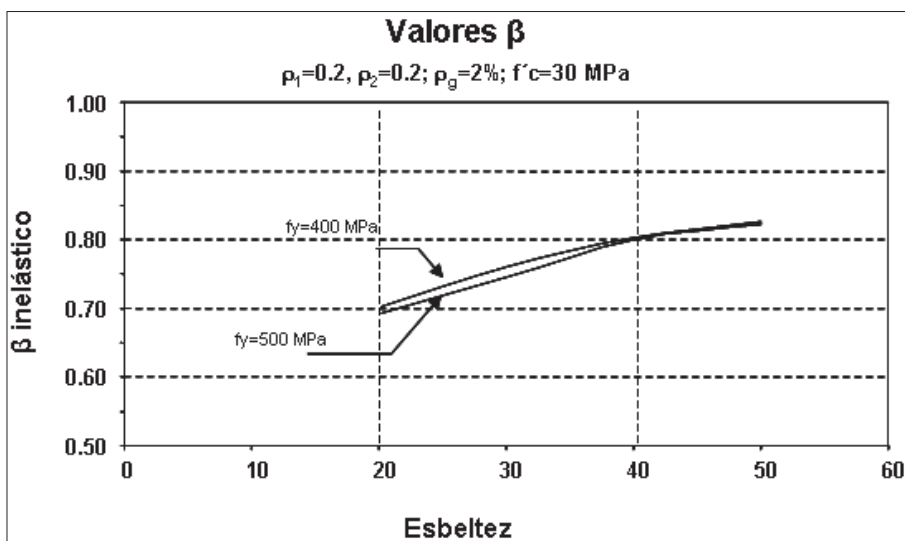


Figura 6: Curvas $\beta_{\text{inelástico}} - \lambda$ variando ρ_g

En las gráficas, es posible observar como el valor de beta aumenta con la resistencia del concreto (Fig. 3 y 4) y con la cuantía de la armadura (Fig. 5 y 6).

Sin embargo, para armaduras con menor valor de resistencia se tienen valores ligeramente mayores de β , según se muestra en la Figura 7.

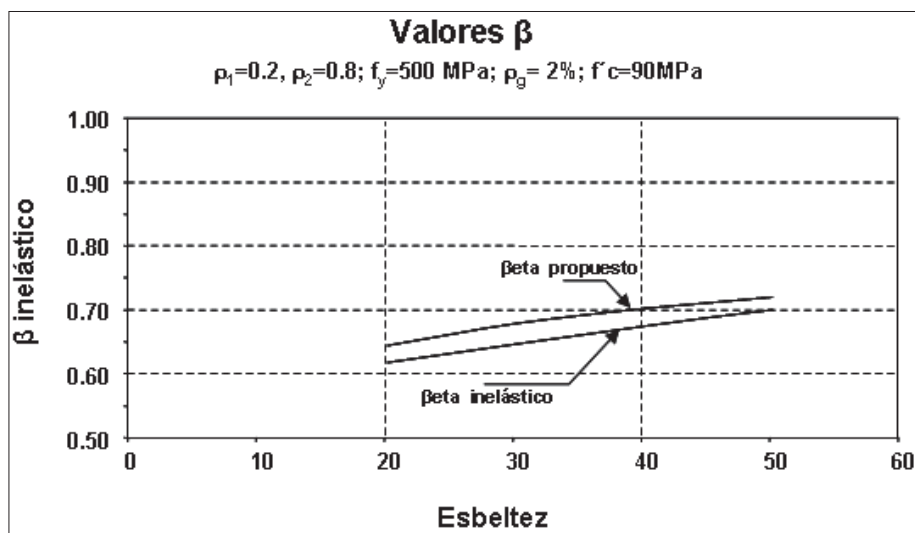


Figura 7: Gráficas del valor de beta inelástico y el valor con la fórmula propuesta

4 Propuesta de fórmula de longitud de pandeo

A fin de proponer una fórmula para el cálculo del coeficiente de pandeo tomando en cuenta la no linealidad del pilar y la posibilidad de formación de rótulas plásticas, se efectuó un análisis estadístico ajustado al siguiente modelo:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6 \quad (2)$$

Siendo:

y = Beta Inelástico

$x_1 = F_y$ (MPa)

$x_2 = \text{Cuantía (\%)}$

$x_3 = f_c$ (MPa)

$x_4 = \text{Esbeltez}$

$x_5 = \rho_1$

$x_6 = \rho_2$

En base a este análisis se concluye que los parámetros x_1 y x_2 no tienen mayor influencia en el valor del coeficiente beta inelástico, x_3 se encuentra en el límite de influencia pero las variables x_4 , x_5 y x_6 , son decididamente influyentes, en un orden de magnitud similar.

La ecuación resultante es la siguiente:

$$\hat{y} = 0.7252 + 0.0005711x_3 + 0.004268x_4 - 0.1809x_5 - 0.1809x_6 \quad (3)$$

Con un coeficiente de determinación de 0.661 (con lo que el modelo explica el 66,1% de las variaciones de la variable y) y un coeficiente de correlación de 0.813 (que resulta un valor razonablemente alto).

Por lo tanto, se propone una nueva fórmula (4), de la longitud de pandeo para columnas esbeltas intraslacionales de concreto normal y de alta resistencia, teniendo en cuenta la no linealidad de la columna y la posibilidad de formación de rótulas plásticas.

$$\beta = 0.7252 + 0.0005711f'_c + 0.004268\lambda - 0.1809\rho_1 - 0.1809\rho_2 \quad (4)$$

5 Gráficas comparando los valores de beta inelástico y el beta con la formula propuesta

Las Figuras 8, 9, 10 y 11 muestran algunas de las curvas en donde se compara la fórmula propuesta con el beta inelástico numérico para comprobar las similitudes.

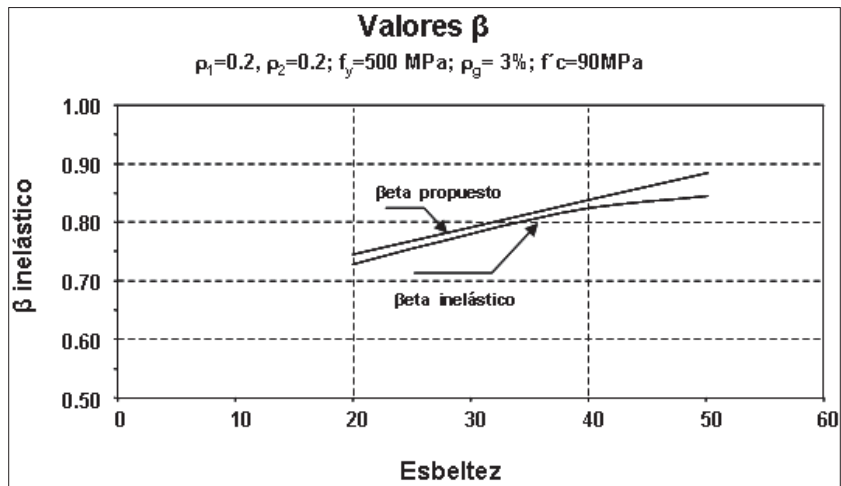


Figura 8: Gráficas del valor de beta inelástico y el valor con la fórmula propuesta

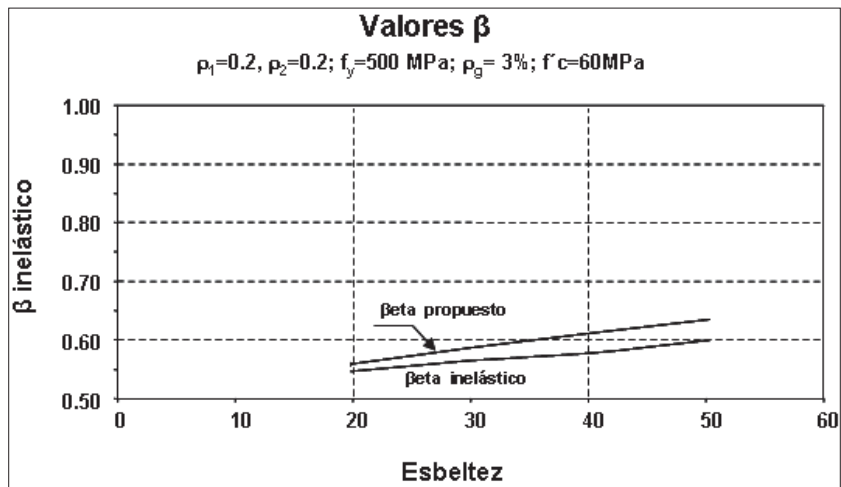


Figura 9: Gráficas del valor de beta inelástico y el valor con la fórmula propuesta

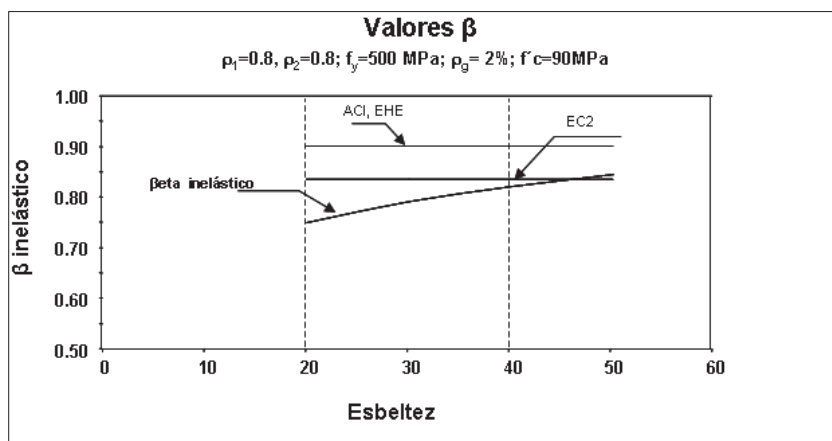


Figura 10: Curvas comparativas entre diferentes valores de beta

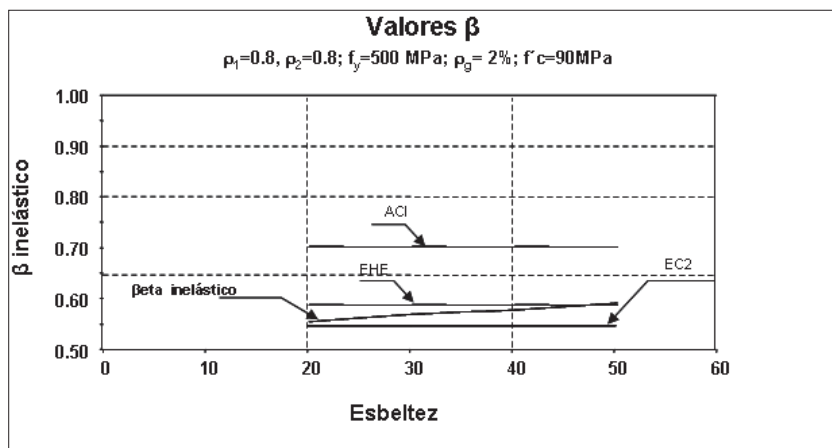


Figura 11: Curvas comparativas entre diferentes valores de beta

Se observan pocas diferencias entre el beta numérico inelástico y el beta propuesto, además, en la mayoría de los casos, el beta propuesto se encuentra por encima del beta inelástico, es decir, en el lado de la seguridad. El error medio entre el beta propuesto y el beta numérico inelástico en base al beta inelástico es de 7.67% con una desviación estandar de 0.069.

Se realizan análisis de carácter aleatorio para diferentes valores de esbeltez, rigidez de los apoyos, resistencia de concreto, para verificar el ajuste de los valores predichos por las fórmulas propuestas para cualquiera de estos casos aleatorios; observándose valores máximos de error del 1.8%. Con esto, es posible considerar que la fórmula propuesta representa una buena aproximación para el cálculo de β para columnas inelásticas y muelles elásticos.

6 Comparación del beta numérico con los métodos simplificados y la normativa

Finalmente, la fórmula de β en columnas esbeltas de concreto armado en **estructuras intraslacionales** que toma en cuenta la no-linealidad mecánica del material, se compara con los valores de la norma ACI (2005) de la instrucción de hormigón estructural EHE (1999) Eurocódigo No. 2 (2004) tal como puede verse en las Figuras 12, 13 y 14.

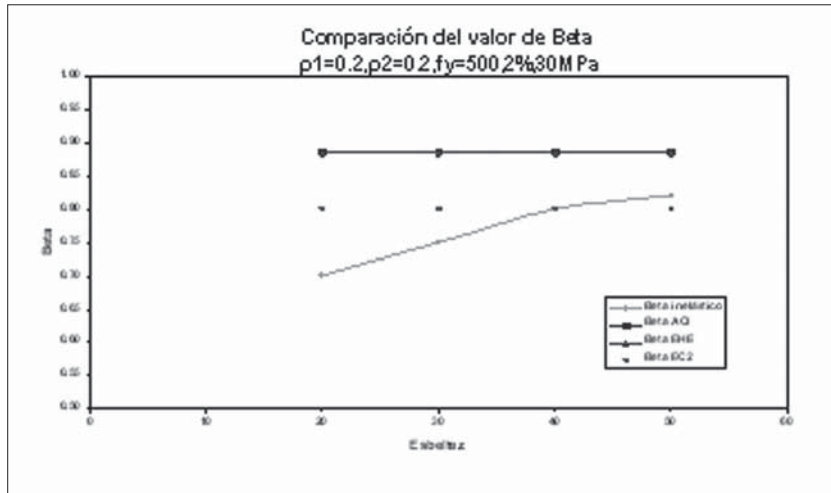


Figura 12: Curvas comparativas entre diferentes valores de beta

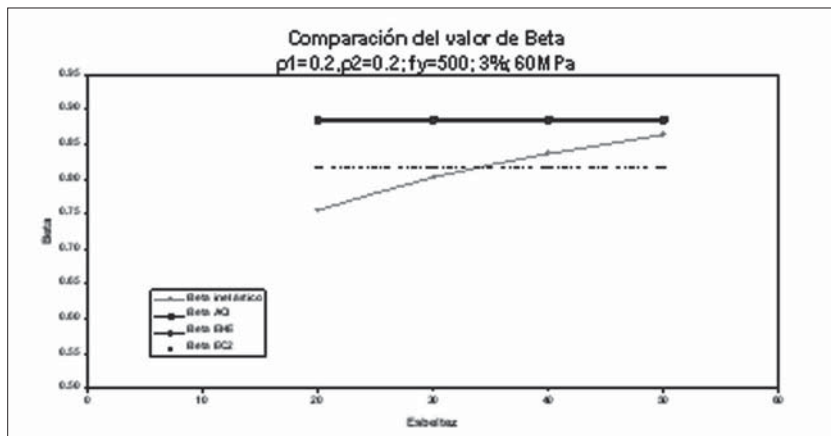


Figura 13: Curvas comparativas entre diferentes valores de beta

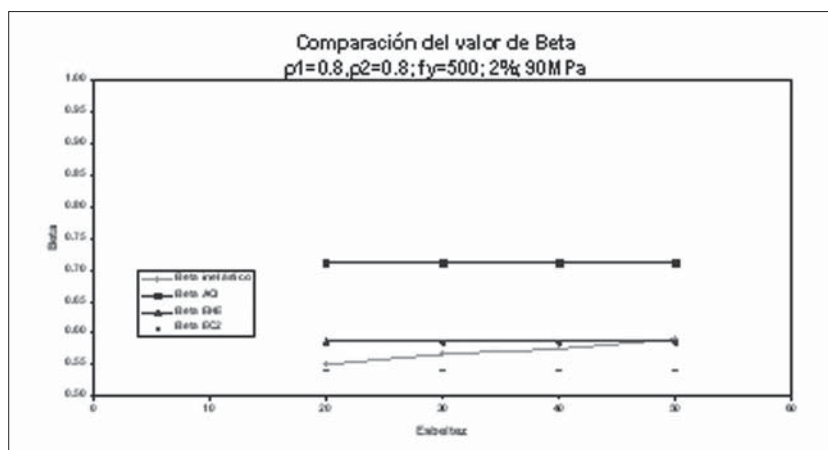


Figura 14: Curvas comparativas entre diferentes valores de beta.

Se observa que para todos los casos y para cualquier esbeltez el valor de beta inelástico propuesto es menor que los valores de la norma ACI (sobreestimando la norma el valor del coeficiente de pandeo). Sin embargo, con respecto a EHE, EC2 para algunas esbelteces, el beta propuesto es mayor (Fig. 12-14).

Los valores de beta para las normativas analizadas no varían respecto a la esbeltez ni respecto a la resistencia del hormigón, encontrando en éste trabajo que son variables influyentes en el coeficiente de pandeo.

7 Conclusiones

La mayoría de los estudios llevados a cabo para determinar el cálculo de la longitud de pandeo en columnas reales de concreto armado se han realizado suponiendo hipótesis de comportamiento elástico y lineal del material cosa que dista bastante del comportamiento real del concreto.

Según la revisión bibliográfica realizada no parecen existir estudios con modelos de elementos finitos 2D en el ámbito no-lineal que estudie la longitud de pandeo y que pueda representar la acumulación de la curvatura en la región D.

Se comprobó que modelando la columna real el valor de coeficiente de pandeo, β , es menor que el valor elástico.

Para los parámetros de sensibilidad considerados en el estudio tanto la resistencia como la cuantía geométrica de la armadura tienen poca influencia en el valor del coeficiente de pandeo inelástico. Sin embargo, la resistencia del concreto, la esbeltez y las rigideces de cada muelle tienen mayor influencia.

Se proponen una nueva fórmula sencilla y práctica en función de la resistencia del concreto, esbeltez y rigidez de los muelles para el calculo del coeficiente de pandeo para columnas intraslacionales, tanto para concreto normal, como de alta resistencia, teniendo en cuenta la no-linealidad mecánica del material y la posibilidad de formación de rótulas plásticas.

Comparando los valores del beta inelástico propuesto obtenidos con el modelo numérico para todos los casos y para cualquier esbeltez se observa que existen diferencias importantes respecto a cada una de ellos: con la norma ACI (desde 40% hasta -4%), con el código español EHE (desde 30% hasta -12%) y con el Eurocódigo N° 2 (desde 15% hasta -15%).

Los valores de beta para las normativas analizadas no varían respecto a la esbeltez ni respecto a la resistencia del concreto, encontrando en éste trabajo que son variables influyentes en el coeficiente de pandeo.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Ministerio de Fomento Español (13-12-2001) por el financiamiento de este trabajo.

Y a la profesora Isabel Florez por el apoyo en el análisis estadístico.

Referencias

- American Concrete Institute. (2005). "Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary". ACI 318-05, ACI Committee 318, Farmington Hills, Mich.
- Aristizabal-Ochoa, J.D. (1994). "K-factor for columns in any type of construction: Nonparadoxical approach", *Journal of Structural Engineering*, 120(4), p. 1272-1290.
- Bazant, Z.P., Xiang, Y. (1997). "Inelastic buckling of concrete column in braced frame." *J. Structural Eng.* 123(5), p. 634-642.
- Bendito, A. (2006). "Estudio numérico de la longitud de pandeo inelástica de soportes de hormigón armado intraslacionales". Tesis doctoral. Universidad Jaume I. España.
- Broms, B y Viest, I.M. (1961). "Long Reinforced Concrete Columns - A Symposium" *Transactions J. Structural Eng.* 126 (2), p. 308-400.
- Cervenka, V. (1998). "Applied brittle analysis of concrete structures". *Fracture Mechanics of Concrete Structures (Proc. 5th Int. Conf. FraMCoS-5, Gifu, Japan)*, Publ., Freiburg, Germany, v. 4, p. 1107-1116.
- Cranston, W.B. (1972). "Analysis and design of reinforced concrete columns", *Cement and Concrete Association, Research report 20*. London.
- Disque, R.O. (1973). Inelastic K-Factor in Design. *AISC Eng.J.*, v. 10(2), p. 33-35.
- Duan L., Chen W.F., King, W.S., Zhou R.G y Hu Y.X. (1993). "On effective length factor of framed columns in the ACI building code", *ACI Struct. J.*, 90(2), p. 135-143.
- Engesser, F. (1889). Die Knickfestigkeit gerader StaË be. *Z. Architekten und Ing. Vereins zu Hannover* 35, p. 455.
- European Committee of Standardization, EC-2. (1991). "Europe 2: Design of Concrete structures-Part 1: General Rules and Rules for Buildings". EN-1992-1-1.
- EHE. (1999). "Instrucción de Hormigón Estructural", Ministerio de Fomento, España.
- Hu Y.X., Zhou R.G., King, W.S., Duan L. y Chen W.F. (1993). "On Effective Length Factor of Framed Columns in ACI Code", *ACI Struct. J.*, 90(2), p. 135-143.
- Mekonnen, B. (1987). "Effective length and rigidity of columns". *ACI Structural Journal*.
- Shanley, F.R. (1947). "Inelastic column theory". *J. Aero. Sci.* 14 (5), p. 261-268.
- Yura, J.A. (1971). "The Effective Length of Columns in Unbraced Frames". *AISC Eng. J.*, 8 (2), p. 37-42.

Numerical study of the inelastic buckling length for inelastic reinforced concrete stands

Abstract

This paper proposes a new equation for effective length factor for reinforced concrete columns in braced frames. The new formula is valid both for normal and high strength concretes. The equation was obtained from a sensitivity analysis performed in a 2-D nonlinear finite element numerical model that takes into account the inelastic behavior of the concrete columns (cracking, yielding and second order effects). The numerical model was calibrated with 44 own experimental test performed in the research group. A comparative study was performed between the numerical model and different national design codes, displaying important differences with respect to all of them: the ACI code (from 37% to -3%), the Spanish code EHE (from 26% to -9.26%), and the Euro code 2 (from 14% to -14%).

Key words: Reinforced Concrete. Effective Length. Buckling. Non-sway columns. Inelasticity. Slenderness.

1 Introduction

The most of the equations to obtain the evaluation of the effective length factor are developed assuming a linear elastic material behavior or a reduced stiffness of the column, which is far away for the real behavior of reinforced concrete columns; where the strength of concrete, the reinforcement ratio, the slenderness and the stiffness of the joints have an important effect in the curvature of the support, Broms y Viest (1961).

As it is well known, the effective length factor transforms the buckling of a column with different stiffness restrains at the ends in the buckling of another equivalent pinned-pinned column with an effective buckling length.

In the different design codes, both for steel or concrete structures, effective length of a column called βL , where β is the effective length factor and L is the length of the column. The magnitude of the effective length depends on the rotational restriction on the ends of the column and the lateral movement of resistance to it.

Clearly, while lower is the effective length of a column, lower is the danger that is buckling and increased its carrying capacity.

The different design codes, in most cases, refer to calculate the length of buckling to Jackson and Moreland alignment charts or simplified equations. Both cases involve linearity in the behavior of the material.

Typically the β -factor depends on the relative stiffness of the joints ψ , also called "end restrain factor" (the sum of the column stiffness divided by the sum of beam stiffness).

$$\Psi_i = \frac{\sum \left(\frac{E_c I_c}{L_c} \right)}{\sum \left(\frac{E_g I_g}{L_g} \right)} \quad (1)$$

Where: I_c is the moment of inertia of the column, L_c is the unsupported length of the column and E_c is the elastic modulus of the concrete in the column. I_g is the moment of inertia of the beam, L_g is the unsupported length of the beam or another member that generates a restriction and E_v is the elastic modulus of the concrete in the beam.

This factor is used in the American Code ACI (2005) or the Spanish EHE (2001), which can vary from zero to infinite.

Aristizabal-Ochoa (1994) proposed a "fixity factor" that varies from zero to one:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i = \frac{1}{1 + \frac{3}{R_i}} \\ Ri = \frac{K_i}{\left(\frac{E \cdot I}{L} \right)} \end{array} \right. \quad (2)$$

Where: K_i is the stiffness of each spring (end restraint condition), E elastic modulus of concrete, I gross moment of inertia of the column section and L is the length of the column.

For reinforced concrete structures there were a lot of studies in the elastic range regarding the design of slender columns. Mekonnen (1987), Cranston (1972), Duan et al. (1993) y Hu et al. (1993).

Moreover, the theoretical problem of the inelastic buckling was pointed since 1889 when Engesser (1889) proposed the tangent modulus theory and in 1895 the reduced modulus theory or the Shanley's theory, Shanley (1947).

For steel structures, Yura (1971) and Disque (1973) presented an inelastic k-factor method using the concept of tangent elastic modulus but modifying the end restraints factors.

A simple but good manner to include the inelastic behavior of beams and columns is the one implemented in the ACI code (2005), where the stiffness of beams and columns for calculating the end restraint factor is reduced using a fixed factor (i.e. for columns $EI = 0.7 E_c I_g$)

With the actual sophistication of the numerical models, the concrete can be modeled closer each time to the real behavior. Thereupon, Bazant and Xiang (1997) studied the inelastic buckling of concrete columns in braced frames but focusing the study to improve the method of analysis and not to obtaining the β -factor. They assumed a sine curve as the deflection curve of the column and implemented all the non-linearities

of concrete. The improvement consisted in considering the wavelength as unknown and variable during loading. Conceptually this is the same than the effective length factor.

Moreover, concrete technology has been improved considerably and now high strength concrete (HSC) can be easily obtained, whose mechanical behavior cannot be extrapolated simply from that of normal strength concretes (NSC). The different simplified methods that can be used for analysis in failure for slender columns therefore need to be checked, so that their application might be extended to HSC from NSC.

The objective of this paper is therefore to establish an improved β –factor equation which includes the complicated behavior observed for reinforced concrete structures, in which inelastic deformations are combined with tensile cracking and bond slip. The equation is limited to non-sway columns.

To propose a new equation for the buckling length a virtual laboratory was developed (Bendito 2006), thus allowing the performance of more tests. The virtual laboratory was developed calibrating a 2D numerical model, with the ATENA program (Cervenka 1998), using 44 experimental tests conducted by our research group.

The model included a biaxial fracture criteria, tension stiffening and quadratic isoparametric finite elements with 4 gauss integration points. Just to do not extend this paper too much the complex task of calibration can be revised in Bendito (2006) where an error of 2.03% was achieved.

2 Conclusions

The most of the equations to obtain the evaluation of the effective length factor are developed assuming a linear elastic material behavior or a reduced stiffness of the column, which is far away for the real behavior of reinforced concrete columns. There is no any research study that uses 2D non-linear finite element analysis to study the effective length factor.

It was demonstrated that if the real behavior of the column is modeled, the β –factor is lower than the elastic one.

If the sensitivity study is performed the strength of concrete, the stiffness of each spring and the slenderness have influence in the β –factor. The longitudinal reinforcement ratio and the yield stress of steel has not more influence.

It was decided to propose a new equation for the effective length factor for non-sway column.

If a comparative study is performed between the numerical model and the different codes, it can be shown that there are representative differences with respect to all of them: the ACI code (between 40% and -4%), with the Spanish code EHE (30% and -12%), with the Euro code N° 2 (between 15% and -15%).

The β –factor for the codes do not vary with respect to the slenderness or the strength of concrete, finding in this paper that this parameters have influence in the β –factor.