

# Análise do comportamento global plano e espacial de pórticos metálicos utilizando a teoria generalizada de vigas

*Cilmar Basaglia<sup>1\*</sup>, Dinar Camotim<sup>1\*\*</sup>, Nuno Silvestre<sup>1\*\*\*</sup>*

Trabalho recebido em 15/11/2006 e aprovado para publicação em 09/04/2007.

---

## Resumo

Abordam-se a formulação e implementação computacional de elementos finitos de barra baseados na teoria generalizada de vigas (GBT – *Generalised Beam Theory*), que permitem analisar o comportamento global plano e espacial de estruturas porticadas metálicas a trabalhar em regime elástico. Para isso, torna-se indispensável estabelecer relações cinemáticas que permitam assegurar a compatibilidade entre deslocamentos e rotações nas ligações que unem duas ou mais barras com orientações distintas (principalmente no que respeita aos deslocamentos de empenamento). Após uma breve revisão dos conceitos fundamentais envolvidos numa análise estrutural baseada na GBT, apresentam-se em detalhes a formulação e implementação numérica de elementos finitos baseados na GBT que incluem apenas os quatro modos de deformação “de corpo rígido” – em particular, descrevem-se os procedimentos envolvidos na determinação das matrizes de rigidez, linear e geométrica, do elemento finito e do pórtico (as últimas devem incorporar a influência das ligações e condições de apoio do pórtico). Em seguida, abordam-se os modelos cinemáticos para simular a transmissão do empenamento em ligações de pórticos que unem duas ou mais barras com secção em U ou I e exibem três configurações diferentes: continuidade da alma e continuidade dos banzos com reforço em diagonal ou em caixa. Finalmente, com o objectivo de ilustrar a aplicação e o potencial dos elementos finitos desenvolvidos, apresentam-se e discutem-se resultados numéricos relativos ao comportamento linear de um pórtico simples (com apenas duas barras ortogonais) e à estabilidade de pórticos de edifícios industriais com travessas inclinadas – validam-se alguns desses resultados pela sua comparação com valores fornecidos por análises de elementos finitos de barra ou casca (convencionais) efectuadas no programa ANSYS.

*Palavras-chave:* Pórticos metálicos. Perfis com secção de parede fina. Teoria generalizada de vigas (GBT). Método dos elementos finitos (casca e barra). Comportamento geometricamente linear. Estabilidade elástica plana e espacial.

---

<sup>1</sup> Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura, ICIST/IST, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal.

E-mails: \* cbasaglia@civil.ist.utl.pt

\*\* dcamotim@civil.ist.utl.pt

\*\*\* nunos@civil.ist.utl.pt

# 1. Introdução

Nos últimos anos, tem se assistido a um considerável aumento da utilização de perfis metálicos (*e.g.*, perfis de aço enformados a frio) na construção de pórticos destinados a edifícios industriais ou a edifícios de habitação de pequeno porte. Este facto deve-se à cada vez maior resistência exibida pelos aços de fabrico corrente, a qual torna possível a adopção de elementos estruturais de elevada esbelteza e, por consequência, a obtenção de soluções muito económicas. Por outro lado, o comportamento deste tipo de estruturas é bastante complexo, na medida em que são constituídas por perfis com secção de parede aberta muito fina, os quais possuem baixa rigidez de torção e exibem uma grande susceptibilidade ao empenamento e às deformações locais.

A maior dificuldade associada à avaliação do comportamento global espacial de pórticos formados por perfis esbeltos advém da necessidade de modelar com precisão a compatibilidade entre os deslocamentos de empenamento (devidos a torção) nas ligações entre barras com orientações distintas – esses deslocamentos provocam o acoplamento entre extensão axial, flexão e torção nas secções transversais extremas unidas pelas ligações do pórtico. No contexto das análises numéricas “tradicionais”, tais como as baseadas no método dos elementos finitos (MEF), esta tarefa só pode se realizar de forma “exacta” recorrendo-se a elementos finitos de casca e adoptando-se malhas refinadas para discretizar os perfis – esta abordagem conduz a um elevado esforço computacional, proibitivo na esmagadora maioria das aplicações correntes (embora os notáveis avanços que se têm observado recentemente em termos de capacidade de cálculo). Assim, não surpreende a atenção que a comunidade científica ligada à estruturas de aço dedica ainda ao desenvolvimento de metodologias baseadas em elementos finitos unidimensionais que permitam efectuar uma avaliação rigorosa da resposta estrutural de pórticos metálicos. De modo geral, pode-se afirmar que a principal dificuldade na formulação de elementos finitos de barra para analisar o comportamento estrutural de estruturas porticadas formadas por barras com secção de parede fina aberta reside no facto de ser indispensável modelar o empenamento devido à torção – esta tarefa é habitualmente realizada pela consideração de um grau de liberdade específico por nó, para além dos seis que se consideram em elementos de barra com secções não susceptíveis de empenar (*e.g.*, secções tubulares): três deslocamentos e três rotações. Enquanto a compatibilidade entre estes últimos graus de liberdade é assegurada trivialmente, o mesmo não se passa com o grau de liberdade associado ao empenamento – na realidade, quantificar a transmissão do empenamento em ligações que unem dois ou mais perfis não alinhados constitui uma tarefa bastante complexa, a qual depende de vários factores, tais como a geometria da secção transversal dos perfis e a configuração da ligação.

Com o objectivo de superar as dificuldades referidas no parágrafo anterior, vários autores têm realizado investigação no domínio da análise *global plana e espacial* (tridimensional) de pórticos de aço – destacam-se aqui os trabalhos devidos a Vacharajittiphan e Trahair (1974), Sharman (1985), Krenk (1990), Krenk e Damkilde (1991), Morrell et al. (1996) e Tong et al. (2005), nos quais são abordados vários aspectos relacionados com a cinemática das ligações entre barras cujos eixos têm orientações distintas, um tópico ab-

solutamente essencial para estudar e quantificar a transmissão do empenamento devido à torção nos nós de um pórtico. No que diz respeito a este tópico, Sharman (1985) obteve relações que modelam a transferência da torção em ligações entre barras com secção em U e em I; Krenk e Damkilde (1991) analisaram o mesmo fenómeno em vários tipos de ligações unindo barras com secção em I e, muito recentemente, Tong et al. (2005) desenvolveram um modelo para analisar a transmissão do empenamento em ligações reforçadas de duas barras com secção em I. Para além disso, merecem ainda destaque as publicações de Masarira (2002) e MacPhedran e Grondin (2005), relativas à estabilidade de pórticos simples com diferentes ligações coluna-viga (ambas formadas por perfis com secção em I). Finalmente, no que respeita especificamente ao comportamento estrutural de pórticos com travessas inclinadas, Baigent e Hancock (1982) formularam um elemento finito tridimensional de barra para efectuar análises lineares e Silvestre e Camotim (2007) estudaram com bastante profundidade a estabilidade e o comportamento de pós-encurvadura (no plano do pórtico).

A maioria dos estudos mencionados no parágrafo anterior foram efectuados através de análises por elementos finitos (de casca ou de barra, baseados na teoria de Vlasov 1958) – para além disso, todos esses trabalhos envolveram unicamente pórticos com ligações unindo apenas duas barras. Uma metodologia alternativa e muito promissora consiste na utilização de elementos finito de barra baseados na teoria generalizada de vigas (GBT – *Generalised Beam Theory*), originalmente formulada por Schardt (1989) e consideravelmente desenvolvida nos últimos cinco-seis anos na Universidade Técnica de Lisboa (Camotim et al. 2004, 2006) – novas formulações (*e.g.*, Silvestre e Camotim 2002a,b ou Dinis et al. 2006) e implementações numéricas (*e.g.*, Silvestre e Camotim 2003), bem como o alargamento do seu domínio de aplicação a diversos tipos de análise (*e.g.*, Silvestre e Camotim 2003b, 2006b,c) e leis constitutivas (*e.g.*, Gonçalves e Camotim 2004, 2006). No entanto, todos esses desenvolvimentos da GBT decorreram exclusivamente no âmbito da análise de barras isoladas (*e.g.*, colunas, vigas ou vigas-coluna).

O objectivo deste trabalho consiste em (i) apresentar a formulação e a implementação computacional e (ii) ilustrar a aplicação e as potencialidades de elementos finitos de barra baseados na GBT que permitem analisar o comportamento global espacial de pórticos metálicos. Após uma breve descrição dos fundamentos da GBT, descrevem-se os procedimentos que conduzem à obtenção das matrizes de rigidez (linear mais geométrica) dos referidos elementos finitos de barra e da correspondente matriz de rigidez total da estrutura, a qual incorpora a influência das ligações e condições de apoio do pórtico. No que respeita às ligações do pórtico, dá-se uma atenção especial (i) à quantificação da transmissão do empenamento, (ii) ao efeito das propriedades de simetria das secções transversais das barras unidas e (iii) à caracterização do elemento de nó que exprime as grandezas da GBT em termos de deslocamentos generalizados (*e.g.*, deslocamentos transversais, rotações de flexão, ou derivadas de rotações de torção). Em seguida, descrevem-se as relações cinemáticas que asseguram a compatibilidade e a transmissão do empenamento de torção em ligações entre duas ou mais barras (secção em U ou I) com orientações distintas – em parti-

cular, abordam-se ligações não reforçadas e ligações com reforço em diagonal ou em caixa. Finalmente, ilustra-se a aplicação da metodologia proposta (i) à análise linear elástica de um pórtico simples, formado por duas barras ortogonais dispostas em “L” e (ii) à análise da estabilidade de pórticos de travessas inclinadas – validam-se alguns desses resultados pela sua comparação com valores fornecidos por análises de elementos finitos (de barra ou casca) efectuadas no programa ANSYS (SAS 2004).

## 2. Breve descrição dos fundamentos da GBT

Considere-se um perfil com a secção transversal de parede fina aberta arbitrária ( $n$  paredes) representada na Figura 1, onde se indicam também o sistema de coordenadas global ( $X, Y, Z$ ) e os sistemas de coordenadas locais ( $x, s, z$ ) adoptados em cada parede. Com base nos procedimentos habitualmente utilizados nas análises baseadas na GBT (Schardt 1989, Silvestre e Camotim 2002a), os deslocamentos num ponto da superfície média do perfil são dados por

$$u(x, s) = u_k(s) \phi_k(x) \quad v(x, s) = v_k(s) \phi_k(x) \quad w(x, s) = w_k(s) \phi_k(x) \quad (1)$$

onde (i)  $(.)_{,x} \equiv d(.) / dx$ ; (ii) as funções  $u_k(s)$ ,  $v_k(s)$  e  $w_k(s)$  são os campos de deslocamentos associados ao modo de deformação  $k$ ; (iii)  $\phi_k(x)$  é a função que fornece a variação longitudinal da amplitude desse mesmo modo de deformação e (iv) se aplica a convenção da soma ao índice  $k$ .

Ao exprimir o campo de deslocamentos da secção como uma combinação linear de modos de deformação, a GBT conduz a sistemas de equações diferenciais de equilíbrio da barra escritos de forma modal, o que é extremamente conveniente e proporciona uma melhor compreensão dos vários aspectos envolvidos num determinado comportamento estrutural – assim, os sistemas de equações relativos às análises linear (de 1ª ordem) e de estabilidade escrevem-se na forma

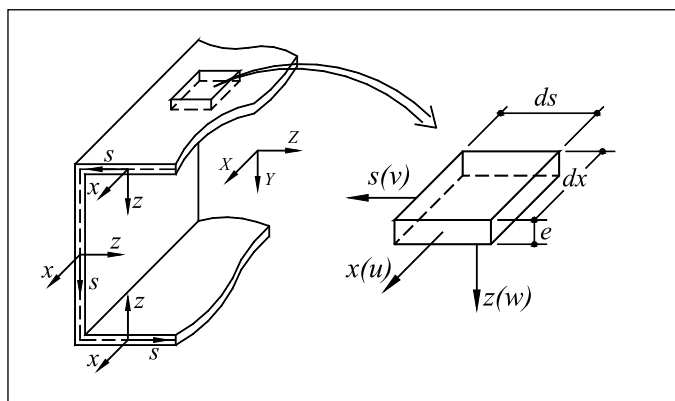


Figura 1: Geometria, campo de deslocamentos e sistemas de eixos globais e locais de uma secção arbitrária.

$$\begin{aligned}
 C_{ik} \phi_{k,xxxx} - D_{ik} \phi_{k,xx} + B_{ik} \phi_k &= q_i \\
 C_{ik} \phi_{k,xxxx} - D_{ik} \phi_{k,xx} + B_{ik} \phi_k - \lambda W_j^0 X_{jik} \phi_{k,xx} &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

As componentes dos tensores de segunda ordem que figuram nessas equações resultam da integração dos deslocamentos  $w_k$  e  $u_k$ , e suas derivadas, ao longo da linha média da secção, ao passo que (i) o tensor  $D_{ik}$  diz respeito à rigidez da secção à rotação de torção; (ii) o tensor  $C_{ik}$  está relacionado com a rigidez da secção em relação aos deslocamentos axiais das suas paredes (*e.g.*, o empenamento das suas paredes). Quanto ao tensor  $B_{ik}$ , não utilizado neste trabalho, está associado à rigidez da secção às deformações locais. Por fim, refira-se que (i)  $X_{jik}$  são as componentes da matriz geométrica relativas ao modo  $k$  e que (ii)  $W_j^0$  são os esforços de pré-encurvadura actuantes na barra.

Nas secções de parede fina aberta, todos os modos de deformação da GBT satisfazem às hipóteses de Vlasov – distorções e extensões transversais de membrana nulas na linha média da secção ( $\gamma_{xs}^M = \varepsilon_{ss}^M = 0$ ). No que respeita aos modos globais, representados na Figura 2 (para a secção em U) e os únicos considerados neste trabalho, caracterizam-se (i) por uma variação linear dos deslocamentos axiais (de empenamento) em cada parede e (ii) pela ausência de deformação da secção no seu próprio plano (modos “de corpo rígido”) – na terminologia da GBT, designam-se esses modos por modo 1 (extensão axial –  $C_{11} \equiv EA$  é a rigidez axial), modos 2 e 3 (flexões rectas principais –  $C_{22} \equiv EI_I$  e  $C_{33} \equiv EI_{II}$  são as correspondentes rigidezes de flexão) e modo 4 (torção –  $C_{44} \equiv EI_w$  é a rigidez de empenamento e  $D_{44} \equiv GJ$  é a rigidez de torção de Saint-Venant).

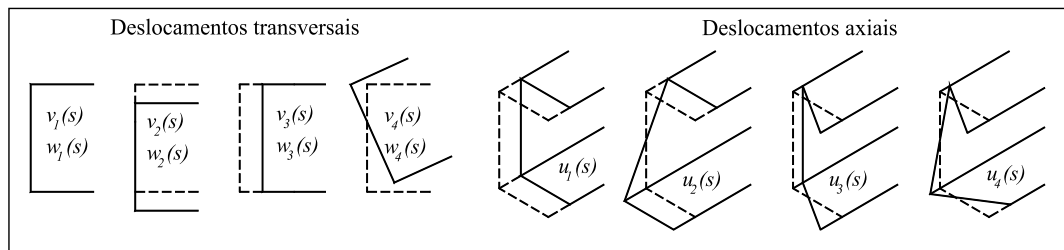


Figura 2: Deslocamentos transversais e axiais associados aos modos globais da secção em U.

### 3. Formulação de elementos finitos baseados na GBT

Para obter a solução dos sistemas de equações da GBT definidos em (2), utiliza-se o método dos elementos finitos e adoptam-se elementos de barra semelhantes ao desenvolvido por Silvestre e Camotim (2003a), no contexto da análise de estabilidade de perfis compósitos: elementos com dois nós e dois graus de liberdade por modo de deformação em cada nó – assim, cada elemento finito possui  $4n$  graus de liberdade, sendo  $n$

o número de modos de deformação incluídos na análise. No caso particular de se considerarem unicamente os modos globais nas análises, a formulação dos elementos finitos baseados na GBT envolve as seguintes etapas:

- (i) Reescrever o sistema de equações diferenciais de equilíbrio (2), sem a matriz  $B_{ik}$ , na forma variacional do tipo ( $L_e$  é o comprimento do elemento finito)

$$\int_{L_e} (\tilde{C}_{ik} \tilde{\phi}_{k,xx} \delta \tilde{\phi}_{i,xx} + \tilde{D}_{ik} \tilde{\phi}_{k,x} \delta \tilde{\phi}_{i,x} - q \delta \phi_i + \lambda \tilde{W}_j^0 \tilde{X}_{jik} \tilde{\phi}_{k,x} \delta \tilde{\phi}_{i,x}) dx = 0 \quad (3)$$

- (ii) Aproximar as funções de amplitude  $\phi_k(x)$  de cada modo de deformação por meio de expressões da forma

$$\phi_k(x) = \psi_1(x) Q_{k1} + \psi_2(x) Q_{k2} + \psi_3(x) Q_{k3} + \psi_4(x) Q_{k4} \quad (4)$$

onde  $Q_1 = \phi_{kx}(0)$ ,  $Q_2 = \phi_k(0)$ ,  $Q_3 = \phi_{kx}(L_e)$  e  $Q_4 = \phi_k(L_e)$  e as funções  $\psi_i(x)$  são os polinómios cúbicos de Hermite, definidos por ( $\xi = x/L_e$ )

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi) &= L_e(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) & \psi_2(\xi) &= 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \\ \psi_3(\xi) &= L_e(\xi^3 - \xi^2) & \psi_4(\xi) &= 3(\xi^2 - 2\xi^3) \end{aligned} \quad (5)$$

- (iii) Substituir (4) em (3) e efectuar a integração em  $0 \leq \xi \leq 1$ , o que permite obter a equação matricial que traduz o equilíbrio do elemento finito (discretizado),

$$([K_e] + \lambda[G_e])\{d_e\} = \{f_e\} \quad (6)$$

onde  $[K_e]$  e  $[G_e]$  são as matrizes de rigidez linear e geométrica e  $\{d_e\}$  e  $\{f_e\}$  são os vectores de deslocamentos e forças aplicadas generalizados, de dimensão 16 e escritos na forma

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [0] & [0] & [0] \\ & [K_{22}] & [0] & [0] \\ & & [K_{33}] & [0] \\ sim. & & & [K_{44}] \end{bmatrix} \quad K_{ik}^{pr} = C_{ik} \int_{L_e} \psi_{p,xx} \psi_{r,xx} dx + D_{ik} \int_{L_e} \psi_{p,x} \psi_{r,x} dx \quad (7)$$

$$[G_e] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] \\ & [G_{22}] & [0] & [G_{24}] \\ & & [G_{33}] & [G_{34}] \\ sim. & & & [G_{44}] \end{bmatrix} \quad G_{ik}^{pr} = -W_j^0 X_{jik} \int_{L_e} \psi_{p,x} \psi_{r,x} dx \quad (8)$$

$$\{d_e\} = \{\{d_1\}^T \quad \{d_2\}^T \quad \{d_3\}^T \quad \{d_4\}^T\} \quad d_{kr} = Q_r \quad (9)$$

$$\{f_e\} = \{\{f_1\}^T \quad \{f_2\}^T \quad \{f_3\}^T \quad \{f_4\}^T\} \quad f_{kr} = q_k \int_{L_e} \psi_r dx \quad (10)$$

onde os índices inferiores  $i$  e  $k$  identificam os modos de deformação associados a cada sub-matriz, os índices superiores  $p, r=1...4$  dizem respeito aos graus de liberdade envolvidos e o índice inferior  $j$  identifica o esforço generalizado associado ao modo de deformação  $j$ .

A Figura 3 permite visualizar os graus de liberdade associados a cada um dos quatro modos de deformação globais (ver Fig. 2) – note-se que (i) os deslocamentos transversais e as rotações de flexão relativas aos modos 2 e 3 são  $v_a$  ( $d_{22}$  e  $d_{32}$ ) e  $\theta_a$  ( $d_{21}$  e  $d_{31}$ ), para  $X=0$ , e  $v_b$  ( $d_{24}$  e  $d_{34}$ ) e  $\theta_b$  ( $d_{23}$  e  $d_{33}$ ), para  $X=L_e$ , e que (ii) a rotação de torção associada ao modo 4 e à sua derivada (responsável pelo empenamento) se designam por  $\varphi_a$  ( $d_{42}$ ) e  $\varphi'_a$  ( $d_{41}$ ), para  $X=0$ , e por  $\varphi_b$  ( $d_{44}$ ) e  $\varphi'_b$  ( $d_{43}$ ), para  $X=L_e$ . Para o modo 1 (extensão axial) tem-se  $u_a$  ( $d_{12}$ ) e  $u_a$  ( $d_{11}$ ), em  $X=0$  e  $u_b$  ( $d_{14}$ ) e  $u_b$  ( $d_{13}$ ), em  $X=L_e$ .

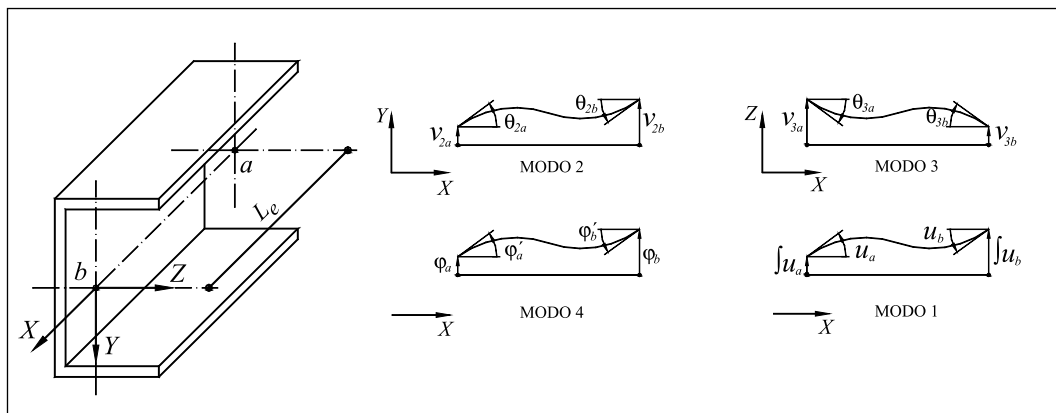


Figura 3: Graus de liberdade nodais associados a cada modo de deformação.

Como se sabe, a determinação da matriz de rigidez total de um sistema estrutural requer que se “combinem” as matrizes dos elementos finitos que a constituem por meio do conceito de “matriz de incidência”. Muito embora esse procedimento seja trivial no caso de apenas existirem elementos co-lineares (*i.e.*, se se analisar uma barra isolada), a sua extensão ao caso de estruturas reticuladas apresenta várias dificuldades. Na realidade, o facto de os eixos das barras possuírem orientações distintas faz com que seja necessário contabilizar os efeitos devidos à compatibilidade entre os graus de liberdade dos elementos finitos que convergem num mesmo nó da estrutura – estes efeitos resultam de (i) a matriz de rigidez elementar pressupor que os graus de liberdade relativos à flexão e à torção estão ambos referidos ao centro de corte (só assim os respectivos com-

portamentos são desacoplados<sup>2)</sup> e de (ii) a compatibilidade num nó de uma estrutura reticulada apenas poder envolver um ponto da secção de cada uma das barras que nele convergem. Para resolver os problemas colocados por essas questões, é possível adoptar uma das duas seguintes abordagens:

- (i) referir os graus de liberdade relativos à flexão e à torção a um mesmo ponto ao longo de todo o comprimento de cada barra, *i.e.*, a um “eixo (longitudinal) de referência” dessa barra – a escolha dos “eixos de referência” pode ser condicionada pelas características da ligação no nó (se não houver qualquer indicação em contrário, escolhas óbvias são os eixos dos centros de corte ou de gravidade, na medida em que alguns graus de liberdade permanecem inalterados). Assim, assegura-se a compatibilidade no ponto de intersecção dos “eixos de referência”, mas o comportamento de cada barra passa a exibir acoplamentos flexão/torção – como é óbvio, é necessário incorporar na matriz de rigidez elementar as excentricidades do “eixo de referência” em relação ao eixo dos centros de corte. As Figuras 4(a) e 4(b) ilustram esta abordagem, a qual foi adoptada, por exemplo, por Baigent e Hancock (1982);
- (ii) manter os graus de liberdade relativos à flexão e à torção referidos aos eixos dos centros de gravidade e de corte das barras (*i.e.*, sem recorrer a qualquer “eixo de referência”) e tratar a compatibilidade apenas num ponto do nó de ligação – como esse ponto corresponde à intersecção dos “eixos de referência” descritos na abordagem anterior, a sua escolha obedece a condicionalismos análogos. Assim, o comportamento de cada barra não exibe acoplamento entre flexão e torção, o que significa que a matriz de rigidez elementar não precisa incorporar os efeitos da excentricidade entre os eixos mencionados atrás, e toda a problemática relativa à compatibilidade é transferida para um “elemento de nó” – como é óbvio, nesse elemento são incorporados os efeitos da excentricidade<sup>3)</sup>, através de deslocamentos generalizados referidos ao sistema de coordenadas  $\bar{X}-\bar{Y}-\bar{Z}$  (ver Fig. 4(c)). Esta abordagem será adoptada neste trabalho, pois é a única que permite tirar partido das características modais da GBT.

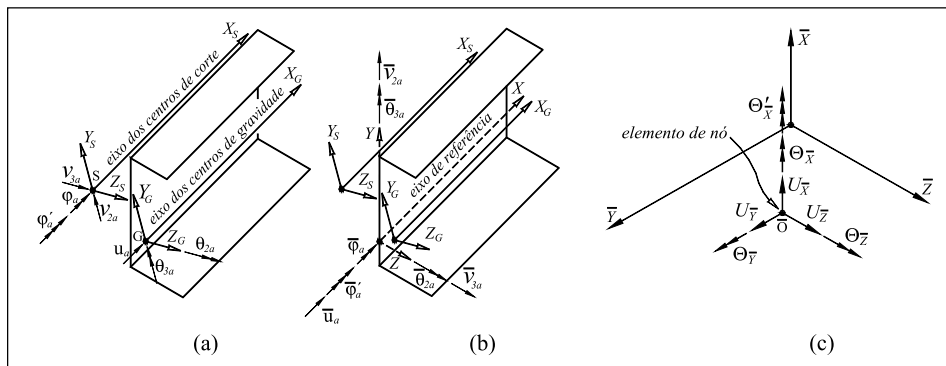


Figura 4: Graus de liberdade de flexão, torção e extensão axial referidos (a) aos eixos dos centros de corte e de gravidade, (b) a um “eixo de referência” e (c) ao “elemento de nó” e correspondente sistema de coordenadas.

Em seguida, descrevem-se os procedimentos envolvidos na obtenção da matriz de rigidez total de uma estrutura reticulada a partir de matrizes de rigidez elementares baseadas na GBT:

- (i) Uma vez discretizada a estrutura, é necessário tratar separadamente os nós interiores das barras e os nós de ligação da estrutura (onde convergem elementos finitos não co-lineares) – ver Figs. 5(a) e 5(b). Nos nós interiores, a compatibilização dos graus de liberdade associados aos modos de deformação da GBT não oferece qualquer dificuldade – ver, por exemplo, o trabalho de Silvestre e Camotim (2003a). No entanto, o mesmo não sucede nos nós de extremidade correspondentes às ligações do pórtico (e.g., os nós  $b_r$  e  $a_{r+1}$  mostrados na Fig. 5(b)), onde os graus de liberdade devem ser “transferidos” para um “elemento de nó” (ver Fig. 5(c)).

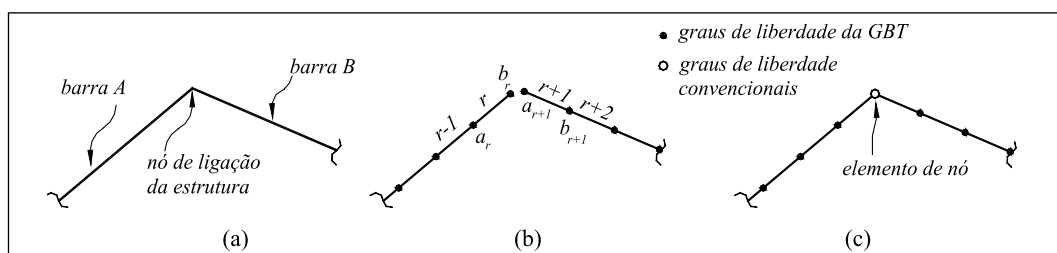


Figura 5: (a) Nó de ligação de uma estrutura reticulada, (b) discretização das barras que nele convergem e (c) conceito de “elemento de nó”.

- (ii) Num elemento de nó, os graus de liberdade da GBT dos elementos finitos que nele convergem não são directamente “compatibilizáveis” em virtude de estarem referidos a sistemas de eixos (locais) distintos. Por esse motivo, é indispensável começar por “transformar” esses graus de liberdade em deslocamentos generalizados (referidos ao sistema  $\bar{X}-\bar{Y}-\bar{Z}$ ) do ponto onde se admite materializada a ligação, aqui designado por  $\bar{O}$ , o qual corresponde à intersecção dos eixos de referência (arbitrários) das várias barras ligadas (e.g., o eixo X nas Figs. 6(a)-(b)). Para isso, utiliza-se a matriz de transformação T, definida por

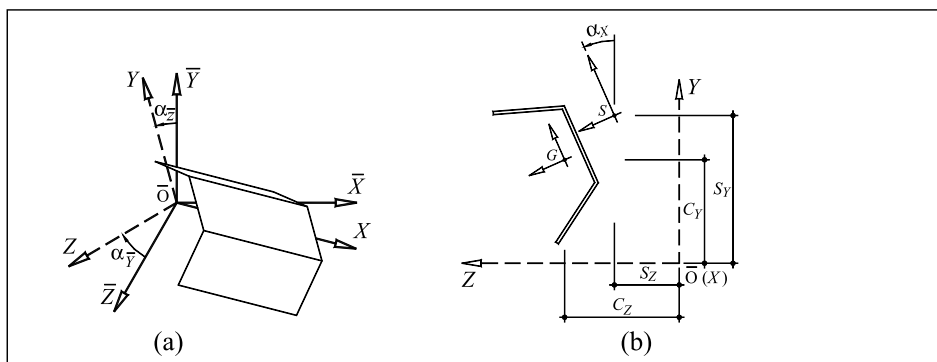


Figure 6: Sistemas de coordenadas (a) global (elemento de nó) e (b) local da barra.

$$\{\bar{\xi}\} = [T]\{d\} = \begin{bmatrix} [R_{\bar{Y}+\bar{Z}}][R_X][L] \\ I \end{bmatrix} \{d\} \quad (11)$$

$$\{\bar{\xi}\} = [U_{\bar{X}} \ U_{\bar{Y}} \ U_{\bar{Z}} \ \Theta_{\bar{X}} \ \Theta_{\bar{Y}} \ \Theta_{\bar{Z}} \ \Theta'_{\bar{X}}]^T \quad \{d\} = [u \ v_Y \ v_Z \ \varphi_X \ \theta_Y \ \theta_Z \ \varphi']^T \quad (12),$$

onde  $\{\bar{\xi}\}$  é o vector dos deslocamentos generalizados (referido aos eixos  $\bar{X}-\bar{Y}-\bar{Z}$ ); as componentes do vector  $\{d\}$  são os graus de liberdade da GBT; a matriz  $[R_{\bar{Y}+\bar{Z}}]$  descreve a transformação associada a duas rotações sucessivas, a primeira em torno do eixo  $\bar{Y}$  e a segunda em torno do eixo  $\bar{Z}$ , definida pelas matrizes  $[R_{\bar{Y}}]$  e  $[R_{\bar{Z}}]$  (ver Fig. 6(a));  $[R_X]$  é a matriz de transformação associada à rotação em torno do eixo X da barra (ver Fig. 6(b)) e  $[L]$  é a matriz de translação que contabiliza os efeitos da transferência dos deslocamentos generalizados dos eixos dos centros de gravidade ( $G$ ) e dos centros de corte ( $S$ ) para um ponto comum  $\bar{O}$  (ver Fig. 6(b)). As componentes das matrizes  $[R_{\bar{Y}+\bar{Z}}]$ ,  $[R_X]$  e  $[L]$  são dadas por

$$[R_{\bar{Y}+\bar{Z}}] = \begin{bmatrix} [R_{\bar{Y}+\bar{Z}}]' \\ [R_{\bar{Y}+\bar{Z}}]' \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[R_{\bar{Y}+\bar{Z}}]' = [R_{\bar{Y}}]' \cdot [R_{\bar{Z}}]' = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{\bar{Y}} & 0 & -\sin\alpha_{\bar{Y}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_{\bar{Y}} & 0 & \cos\alpha_{\bar{Y}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha_{\bar{Z}} & -\sin\alpha_{\bar{Z}} & 0 \\ \sin\alpha_{\bar{Z}} & \cos\alpha_{\bar{Z}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_X] = \begin{bmatrix} [R_X]' \\ [R_X]' \end{bmatrix} \quad [R_X]' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_X & -\sin\alpha_X \\ 0 & \sin\alpha_X & \cos\alpha_X \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} I & & & & \\ & I & & & \\ & & I & & \\ & & & -S_Z & S_Y & I \\ C_Z & & & & & I \\ -C_Y & & & & & I \end{bmatrix} \quad (15)$$

Finalmente, note-se que as componentes do vector  $\{\bar{\xi}\}$  têm origem nos graus de liberdade da GBT  $\{d\}$  e são obtidas por meio de uma sequência de rotações: a primeira em torno do eixo  $X$  da barra, a segunda em torno do eixo global  $\bar{Z}$  e a última em torno do eixo global  $\bar{Y}$  – a alteração da ordem dessas rotações pode conduzir a resultados incorrectos.

- (iii) Com a utilização da matriz de transformação definida em (11), obtêm-se, no caso mais geral, sete graus de liberdade em cada uma das extremidades de barra correspondentes ao nó de ligação. Esses dois conjuntos de graus de liberdades satisfazem as relações

$$\{\bar{\xi}\}_{b_r} = \begin{bmatrix} [I]_{6 \times 6} \\ \Gamma \end{bmatrix} \{\bar{\xi}\}_{a_{r+1}} \quad (16)$$

onde  $[I]$  é a matriz identidade e a constante  $\Gamma$  relaciona as derivadas da rotação de torção (*i.e.*, quantifica a “transmissão do empenamento” – aborda-se esse conceito na secção 4).

- (iv) Utilizando (11) e (16), chega-se com relativa facilidade à matriz de rigidez total da estrutura ( $K_G^n$ ), a qual ( $iv_1$ ) inclui os efeitos da compatibilização dos graus de liberdade em todos os seus nós e ( $iv_2$ ) está associada a graus de liberdade “mistos” – graus da GBT ( $d_{ki}$ ) nos nós interiores das barras e graus “convencionais” ( $\bar{\xi}_i$ ) nos nós de ligação entre elas.

Uma vez determinada a matriz de rigidez total, está-se em condições de efectuar a análise do sistema estrutural (pórtico), a qual consiste na resolução de

$$K_G^0 \cdot \delta = f \quad \text{ou} \quad K_G^1(\lambda) \cdot \delta = 0 \quad (17)$$

consoante se trate de uma análise de primeira ordem (sistema de equações algébricas lineares) ou de estabilidade (problema de valores e vectores próprios) – (i)  $f$  e  $\delta$  são os vectores das forças aplicadas e dos deslocamentos generalizados e (ii)  $\lambda$  é o parâmetro de carga cujo valor crítico se procura. Como as componentes de  $\delta$  são “mistas” e se pretendem representações modais das configurações deformadas das barras, torna-se indispensável voltar a transformar os deslocamentos generalizados relativos aos nós da estrutura ( $\bar{\xi}_i$ ) em graus de liberdade da GBT nas extremidades dos elementos finitos que lhes correspondem ( $d_{b_r}$  e  $d_{a_{r+1}}$ ). Para isso, utiliza-se a relação

$$\{d\} = [T]^{-1} \{\bar{\xi}\} \quad (18)$$

a qual traduz precisamente a execução da “operação inversa” daquela que se efectuou através de (11).

Finalmente, conhecidos os valores dos graus de liberdade da GBT em todos os nós (*i.e.*, os valores de  $d_{ki}$  em todos os elementos finitos – ver (4)), torna-se possível representar a

configuração deformada da estrutura reticulada de uma forma modal, identificando e quantificando separadamente as contribuições dos modos de deformação das várias barras que a constituem.

#### 4. Transmissão do empenamento

A teoria clássica de Vlasov (1961) estabelece que o empenamento num ponto  $Q$ , situado sobre a linha média de uma secção de parede fina aberta actuada por um momento torsor, é dado por

$$u_Q = \omega_Q \bar{\phi}'_x \quad (19)$$

onde  $\omega_Q$  é a área sectorial associada ao ponto  $Q$  e  $\bar{\phi}'_x$  é a taxa de variação do ângulo de torção. Por esse motivo, em secções formadas por apenas três paredes (não convergentes) é possível definir uma “superfície de empenamento”  $\Omega$ , a qual contém as posições deformadas de todos os nós naturais da secção (extremidades de paredes) – a Figura 7(a) mostra essas superfícies nos casos das secções em I e U. Para além disso, a relação entre os deslocamentos de empenamento nas extremidades de um banzo (de secções em I ou U) conduz, através de relações de índole geométrica, ao valor da rotação da superfície de empenamento (Fig. 7(b)), dado por

$$\Phi = \frac{h \bar{\phi}'_x}{2} \quad (20)$$

onde  $h$  é a largura da alma da secção.

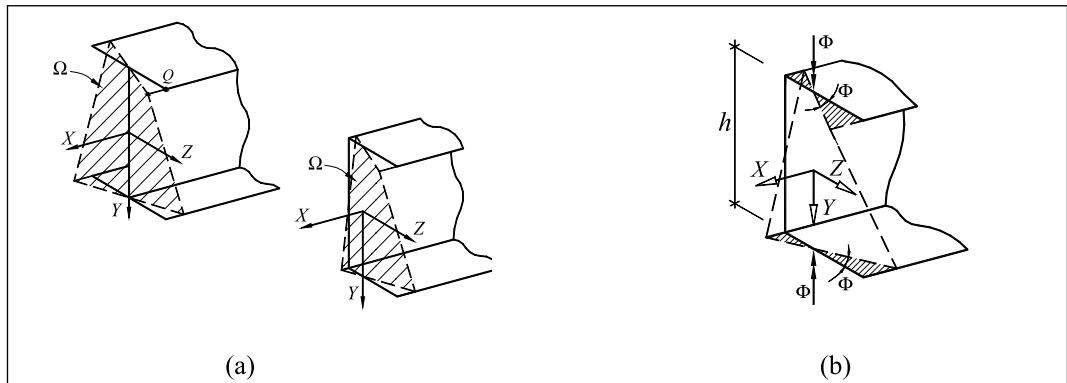


Figura 7: (a) “Superfícies de empenamento”  $\Omega$  das secções em I e em U, e (b) conceito de rotação da superfície de empenamento.

Em virtude da existência da referida superfície de empenamento, pode demonstrar-se que existe sempre “transmissão completa de empenamento” num nó de ligação entre duas barras com secção em I ou U (independentemente das inclinações dos eixos dessas

barras), desde que a configuração da ligação impeça a flexão transversal da alma. Dessa forma, o conceito de transmissão completa de empenamento traduz o facto de as taxas de variação do ângulo de torção das secções de ligação entre duas barras terem o mesmo valor absoluto – consoante os deslocamentos axiais das secções extremas das duas barras tenham ou não o mesmo sinal (*i.e.*, correspondam a “sentidos de circulação” idênticos ou opostos), a transmissão de empenamento designa-se por completa directa ou completa inversa. Por outro lado, no caso de existir flexão transversal da alma, a transmissão do empenamento devido à torção é incompleta – para além dos deslocamentos de empenamento, a compatibilidade envolve também os deslocamentos provocados pela flexão transversal das paredes. Com o auxílio das Figuras 8 (a)-(b), onde se mostram duas possíveis ligações entre perfis com secção em I (perfis A e B) com os banzos ou a alma no mesmo plano, torna-se possível compreender melhor a diferença entre os dois tipos de transmissão de empenamento completa. Designando por  $u_A$  e  $u_B$  os deslocamentos de empenamentos nos pontos homólogos  $Q_A$  e  $Q_B$  das secções ligadas, as Figuras 8(a) e 8(b) ilustram uma transmissão directa e uma transmissão inversa, respectivamente.

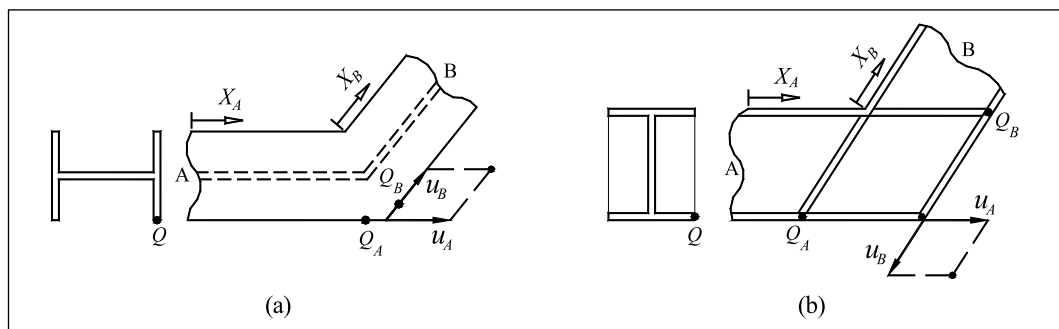


Figura 8: Conceito de transmissão de empenamento (a) completa directa e (b) completa inversa.

No caso da Figura 9(a) os banzos homólogos dos dois perfis idênticos estão no mesmo plano, sendo lícito admitir que existe “continuidade” entre eles, *i.e.*, que trabalham conjuntamente. Tudo se passa como se as duas secções ligadas fossem as “faces” de uma mesma secção, o que significa que o empenamento é igual em ambas, tanto em valor como em sinal (*i.e.*,  $u_A = u_B$ ). Desse modo, a transmissão do empenamento é completa directa, o que equivale a dizer que se tem  $\bar{\varphi}'_A = \bar{\varphi}'_B$ . A Figura 9(b) mostra o mecanismo cinemático de transmissão do empenamento devido à torção numa ligação deste tipo entre perfis com secção em I – as superfícies de empenamento das secções ligadas relacionam-se através de uma rotação em torno do eixo paralelo a  $Y_A$  e  $Y_B$  que passa no ponto R. O mecanismo é semelhante se os perfis tiverem secção em U – ver Figura 9(a).

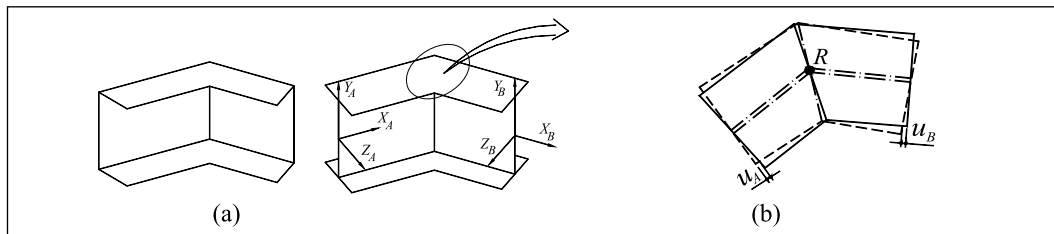


Figura 9: (a) Ligação com transmissão completa directa do empenamento envolvendo perfis em U e I, e (b) mecanismo cinemático de transmissão do empenamento devido à torção (perfis em I).

Por outro lado, no caso de as almas dos perfis (com secção em I ou U) estarem situadas no mesmo plano (*i.e.*, continuidade da alma na ligação), a transmissão do empenamento devido à torção envolve, no caso geral, deformações locais nas almas das secções ligadas – é o que se passa com a ligação simples (não reforçada) que se mostra na Figura 10(a). Assim, pode afirmar-se que a transmissão completa do empenamento apenas é possível se a ligação entre as duas barras possuir chapas de reforço que impeçam por completo as deformações locais provocadas nas almas pela torção – é esse o caso das ligações reforçadas representadas nas Figuras 10(b)-(c): ligações entre perfis com secção em U com reforço *em diagonal* e reforço *em caixa* (“prolongamentos” dos banzos inferiores dos perfis ligados), respectivamente.

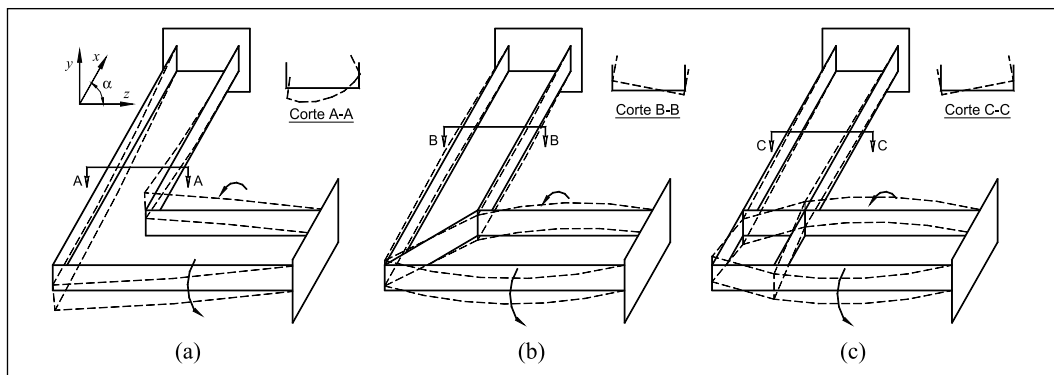


Figura 10: Ligações entre barras com secção em U ortogonais com as almas no mesmo plano: (a) ligação simples e ligações reforçadas com reforço (b) *em diagonal* e (c) *em caixa*.

Em face do que foi exposto atrás, sempre que o reforço impede as deformações locais das almas (dos perfis com secção em I ou U) é possível interpretar a transmissão completa do empenamento (directa ou inversa) utilizando um raciocínio que se baseie apenas no conceito da rotação  $\Phi$  da superfície de empenamento. Em seguida, aplica-se esse raciocínio ao caso da ligação entre dois perfis com reforço em diagonal (ver Fig. 11(a)): pretende-se avaliar a forma como a rotação de empenamento da secção de ligação da barra A ( $\Phi_A = h\bar{\varphi}'_A/2$ ) se transmite para a sua congénere da barra B, através da ligação onde existe a chapa de reforço C1 – *i.e.*, pretende-se conhecer  $\Phi_B = h\bar{\varphi}'_B/2$  (ver Fig. 11(b)). Para isso, utiliza-se o facto de se admitir que a chapa de reforço se deforma solidariamente com as

secções extremas das duas barras, o que implica que a configuração deformada da chapa (após a rotação) coincide com as configurações deformadas de ambas as secções de ligação. Uma vez que as alturas das barras se relacionam através de

$$\frac{h_A}{\cos \alpha_A} = \frac{h_B}{\cos \alpha_B} \quad (21)$$

e a rigidez de flexão da chapa de reforço  $C1$  no seu próprio plano é muito superior à rigidez de empenamento das barras ligadas, conclui-se que  $\bar{\varphi}'_A = \bar{\varphi}'_B$  por meio das relações

$$\Phi_{C1} = \frac{\Phi_A}{\cos \alpha_A} = \frac{h_A \bar{\varphi}'_A}{2 \cos \alpha_A} \quad \Phi_B = \frac{h_B \bar{\varphi}'_B}{2} = \Phi_{C1} \cos \alpha_B \quad (22)$$

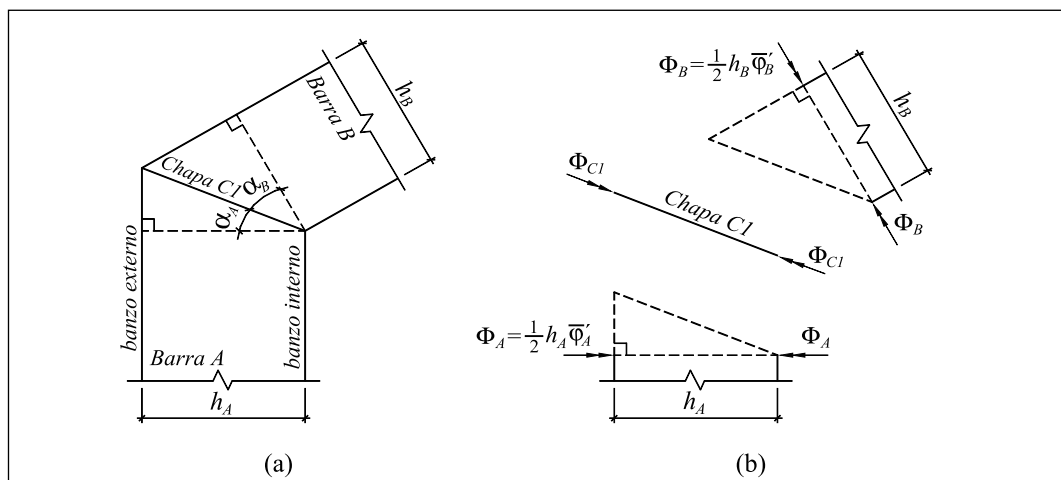


Figura 11: Ligação com reforço em diagonal: (a) configuração da ligação e (b) rotações de empenamento.

Relativamente à ligação com reforço em caixa, representada nas Figuras 10(c) e 12(a)-(b), a transmissão do empenamento entre as secções extremas dos perfis envolve a torção das paredes laterais da “caixa” formada (i) pelas duas chapas de reforço das almas, as quais “prolongam” os banzos inferiores dos perfis, e (ii) pelas zonas extremas dos banzos superiores desses mesmos perfis. Admitindo que as quatro paredes da “caixa” permanecem indeformadas nos seus próprios planos (sofrem apenas rotações de corpo rígido), a Figura 12(a) mostra com grande clareza que a compatibilidade de deslocamento nas “arestas” da “caixa” (larguras dos banzos) obriga a que as rotações das chapas de reforço das almas dos perfis (chapas C1-C3 e C2-C4 – ver Figs. 12(a)-(b)) tenham sentidos opostos (observadas a partir do interior da “caixa”). Utilizando um raciocínio análogo ao adoptado no caso do reforço em diagonal, é possível quantificar a transmissão do empenamento devido à torção entre as secções extremas das barras A, B, C e D – para isso, recorre-se ao procedimento esquematizado nas Figuras 12(b)-(c), o qual envolve a utilização sequencial das expressões (note-se que estas relacionam as rotações da superfície de empenamento)

$$\begin{aligned}
\Phi_{C1} &= \frac{\Phi_A}{\cos\alpha} = \frac{h_1 \bar{\Phi}'_A}{2 \cos\alpha} & \Phi_{C2} &= -\frac{h_2}{h_1} \Phi_{C1} & \Phi_B &= \frac{h_2 \bar{\Phi}'_B}{2} = \Phi_{C2} \cos\alpha = -\Phi_A \\
\Phi_{C3} &= -\frac{h_1}{h_2} \Phi_{C2} & \Phi_C &= \frac{h_1 \bar{\Phi}'_C}{2} = \Phi_{C3} \cos\alpha = \Phi_A \\
\Phi_{C4} &= -\frac{h_2}{h_1} \Phi_{C3} & \Phi_D &= \frac{h_2 \bar{\Phi}'_D}{2} = \Phi_{C4} \cos\alpha = \Phi_B
\end{aligned} \tag{23}$$

e conduz à obtenção das seguintes relações entre as taxas de variação do ângulo de torção

$$\bar{\Phi}'_B = -\bar{\Phi}'_A \quad \bar{\Phi}'_C = \bar{\Phi}'_A \quad \bar{\Phi}'_D = \bar{\Phi}'_B \quad \bar{\Phi}'_D = -\bar{\Phi}'_A \tag{24}$$

É importante notar que a transmissão do empenamento é (i) completa inversa entre as barras adjacentes (A-B, B-C, C-D ou A-D) e (ii) completa directa entre as barras opostas (A-C ou B-D).

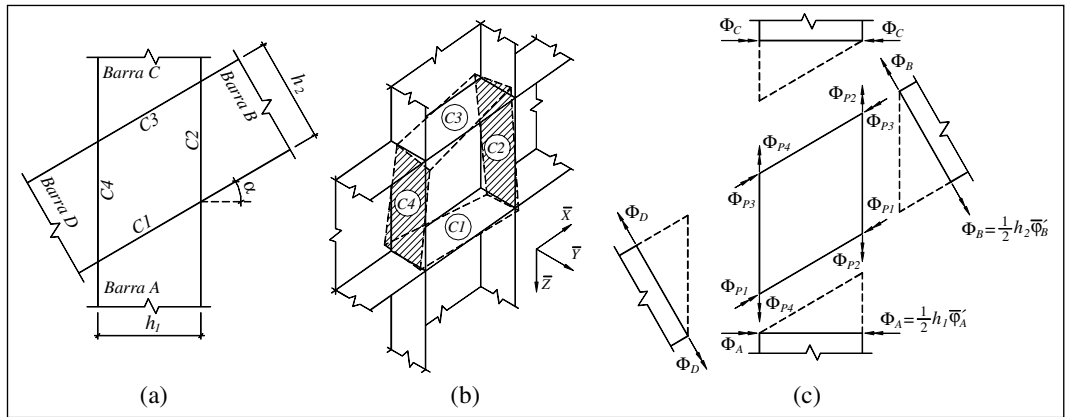


Figura 12: Ligação com reforço em caixa: (a) configuração da ligação, (b) compatibilidade dos deslocamentos ( $\alpha=90^\circ$ ) e (c) transmissão do empenamento.

A transmissão de empenamento devido à torção numa ligação entre duas ou mais barras pode também ser analisada por meio de uma abordagem que envolve a modelação da ligação por meio de elementos finitos de casca e está ilustrada na Figura 13 – em cada modelo, (i) uma das barras está submetida a um binário aplicado na sua extremidade (pontos A e A') e (ii) todas as barras têm os deslocamentos impedidos e as rotações livres nas suas extremidades “não ligadas” (pontos B). No caso da ligação que une duas barras (ver Figs. 13(a) e 13(b)), é necessário evitar a interferência dos deslocamentos proveniente da flexão – assim, restringem-se os deslocamentos segundo y em dois pontos da ligação (pontos C). Para além de os valores numéricos obtidos confirmarem plenamente a ocorrência de transmissão completa do empenamento (inversa ou directa), as Figuras 13(a)-(c) permitem ainda visualizar com clareza o efeito que a configuração da ligação exerce no sentido da rotação de torção: esta (i) permanece inalterada (sentido anti-horário) no caso da transmissão inversa e (ii) muda de sentido (de anti-horário para horário) se a transmissão for directa.

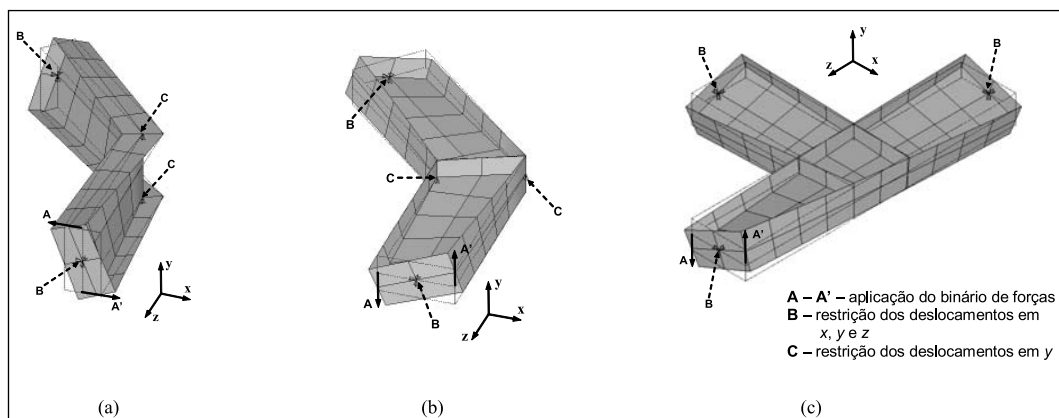


Figura 13: Modelação das ligações por elementos finitos de casca: (a) duas barras com os banzos no mesmo plano, (b) duas barras com reforço em diagonal e (c) três barras com reforço em caixa.

## 5. Exemplos ilustrativos

Com o objectivo de validar e ilustrar a aplicação e as potencialidades dos elementos finitos baseados na GBT formulados nas secções anteriores, apresentam-se e discutem-se em seguida resultados numéricos relativos à análise linear elástica (primeira ordem) de um pórtico metálico simples (duas barras ortogonais em forma de “L”) e à análise de estabilidade de um pórtico metálico simétrico com travessas inclinadas – ambos os pórticos analisados são constituídos por perfis de aço ( $E=205\text{ GPa}$  e  $\nu=0.3$ ) com secção em U. No que respeita à validação, comparam-se alguns destes resultados com valores fornecidos por análises efectuadas no programa ANSYS (SAS 2004) e adoptando discretizações das barras em malhas refinadas de elementos finitos de casca ou barra.

### 5.1 Pórtico simples (em forma de “L”) – análise de primeira ordem

Efectua-se uma análise elástica linear (de primeira ordem) do pórtico biencastado representado na Figura 14(a), o qual é formado por duas barras ortogonais (A e B) de comprimento  $LA=LB=220\text{ cm}$ , com a secção em U apresentada na Figura 14(b) e ligadas entre si de modo a que os banzos fiquem no mesmo plano (ver Fig. 9(a)). Para além disso, a Figura 14(c) mostra os graus de liberdade  $d_{ki}$ , relativos às secções dos elementos finitos unidas no nó de ligação – recorde-se que estes graus de liberdade são “transformados” em deslocamentos generalizados, referidos a um sistema de eixos centrado no ponto de intersecção dos eixos baricêntricos das duas barras ( $s_y=0$  +  $s_z=-3.984\text{ cm}$ ). Enquanto nas análises baseadas na GBT se discretizou o pórtico em oito elementos finitos (quatro por barra), os resultados do ANSYS foram obtidos por meio de uma modelação por elementos finitos de casca Shell63 – elementos com quatro nós e seis graus de liberdade por nó (três translações e três rotações), o que conduz a uma análise que envolve mais de 7000 graus de liberdade.

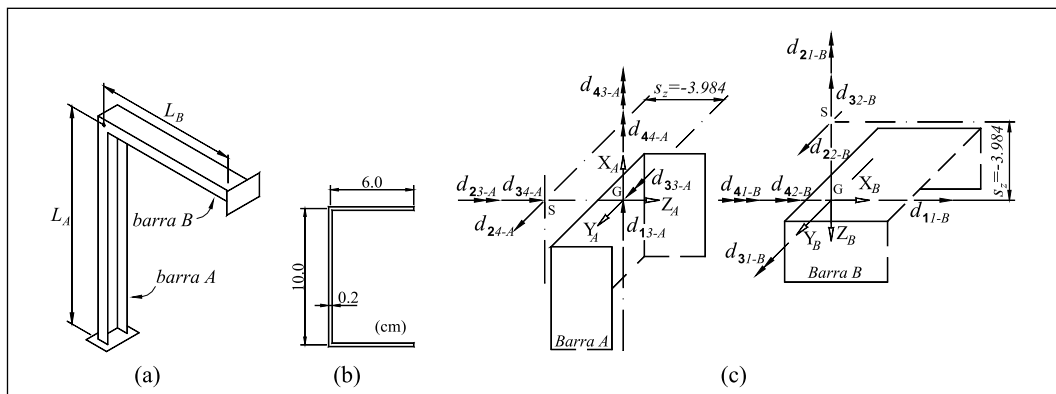


Figura 14: (a) Geometria do pórtico simples em forma de “L”, (b) dimensões da secção das barras (em U) e (c) graus de liberdade  $d_{ki}$  nas secções das barras adjacentes ao nó de ligação.

As Figuras 15(a) e 15(b) mostram o carregamento considerado nas análises de primeira ordem e a localização das secções relativas aos resultados apresentados ( $S_1$  e  $S_2$  – meio do vão das barras), tais como (i) a configuração deformada e (ii) o diagrama de tensões normais. A Figura 16 diz respeito ao pórtico submetido apenas ao momento torsor ( $10 \text{ kN.cm}$ ) e mostra a decomposição modal da variação do deslocamento transversal da extremidade livre do banzo inferior ( $w$ ) ao longo do comprimento das barras A e B. Com o objectivo de avaliar a precisão dos resultados fornecidos pela GBT, apresentam-se também os valores fornecidos pelo ANSYS. Observa-se que:

- (i) os valores dos deslocamentos obtidos através da GBT e do ANSYS praticamente coincidem;
- (ii) contribuem para o deslocamento transversal em análise os modos 2 e 4 da GBT (ver Fig. 2). Note-se que a participação do modo 2, devida ao acoplamento flexão-torção no nó de ligação, é pouco significativa – no caso da barra A, as contribuições dos modos 2 e 4 “opõem-se”.

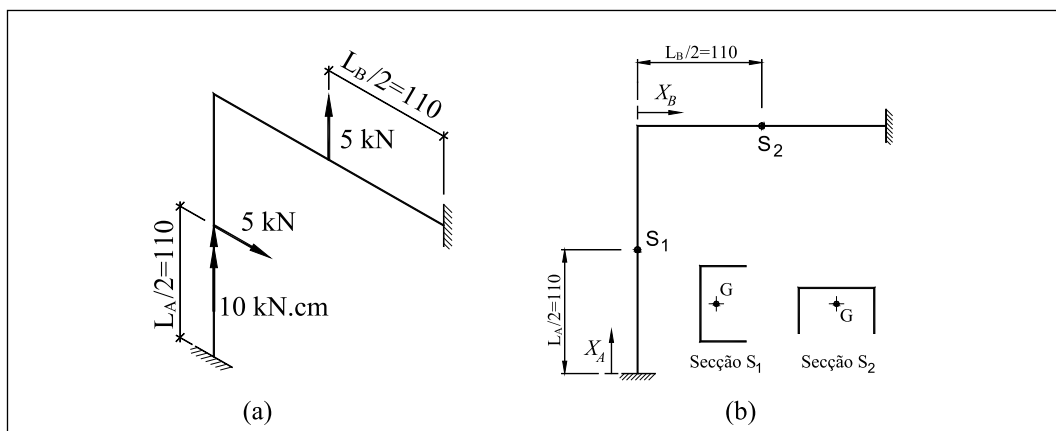


Figura 15: Pórtico simples em forma de “L”: (a) carregamento e (b) localização das secções estudadas.

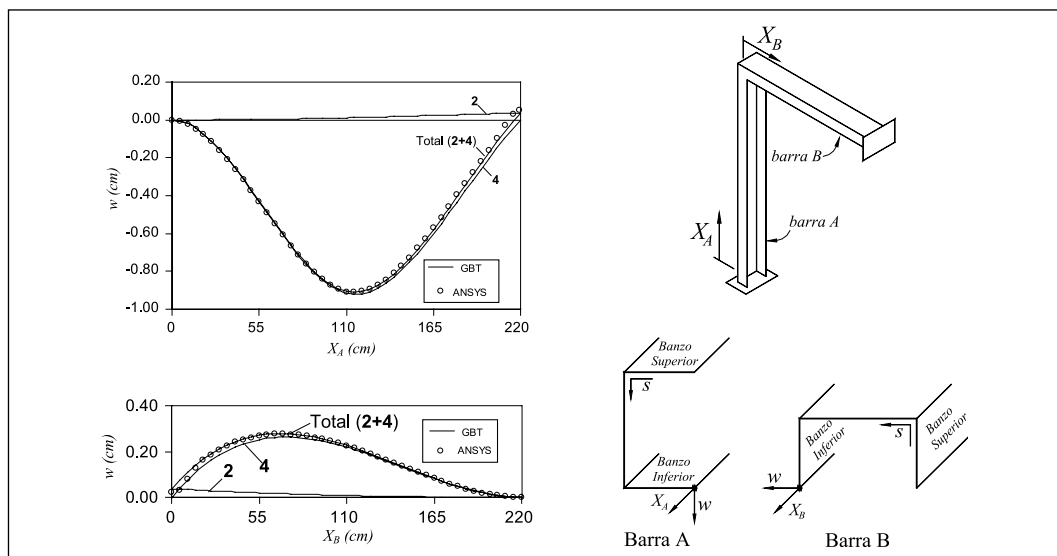


Figura 16: Decomposição modal da variação do deslocamento transversal  $w$  ao longo das barras A e B.

Considere-se agora o pórtico submetido ao momento torsor e às forças transversais igualmente indicadas na Figura 15(a). Tirando partido da natureza modal da GBT, mostram-se na Figura 17(b) as configurações deformadas das duas barras. A visualização e interpretação dessas configurações é consideravelmente facilitada e clarificada pela inclusão, na Figura 17(a), das respectivas decomposições modais – *i.e.*, os andamentos das funções de amplitude dos quatro modos de deformação em cada uma das barras.

Na Figura 18(a) representam-se as configurações deformadas obtidas pelas análises efectuadas por meio da GBT (*i.e.*, a soma da participação de todos os modos de deformação)<sup>4</sup> e utilizando o programa ANSYS<sup>5</sup> – a Figura 18(b) mostra os valores dos deslocamentos nas secções  $S_1$  e  $S_2$  (meio vão das barras).

Relativamente aos resultados apresentados nas Figuras 17(a)-(b) e 18(a)-(b), refira-se que:

- (i) apesar de se considerarem apenas oito elementos finitos de barra na análise baseada na GBT, os resultados obtidos praticamente coincidem com os fornecidos pelo programa ANSYS;
- (ii) o momento torsor aplicado a meia altura da barra A é o único responsável pelas flexão em torno do eixo de maior inércia (modo 2) e torção (modo 4) que ocorrem nas barras A e B – a torção na barra B e a flexão na barra A são devidas, respectivamente, à transmissão do empenamento e ao deslocamento do nó do pórtico para fora do seu plano. Na barra A, o modo 4 tem maior expressão junto da secção onde o momento torsor é aplicado e a sua relevância vai-se esbatendo à medida que nos aproximamos das secções extremas. No nó do pórtico ocorre uma troca do sinal de  $\phi_4$ , o que corresponde a uma inversão do sentido da rotação na barra B. Logicamente, a contribuição do modo 2 cresce do encastramento para o nó em ambas as barras;

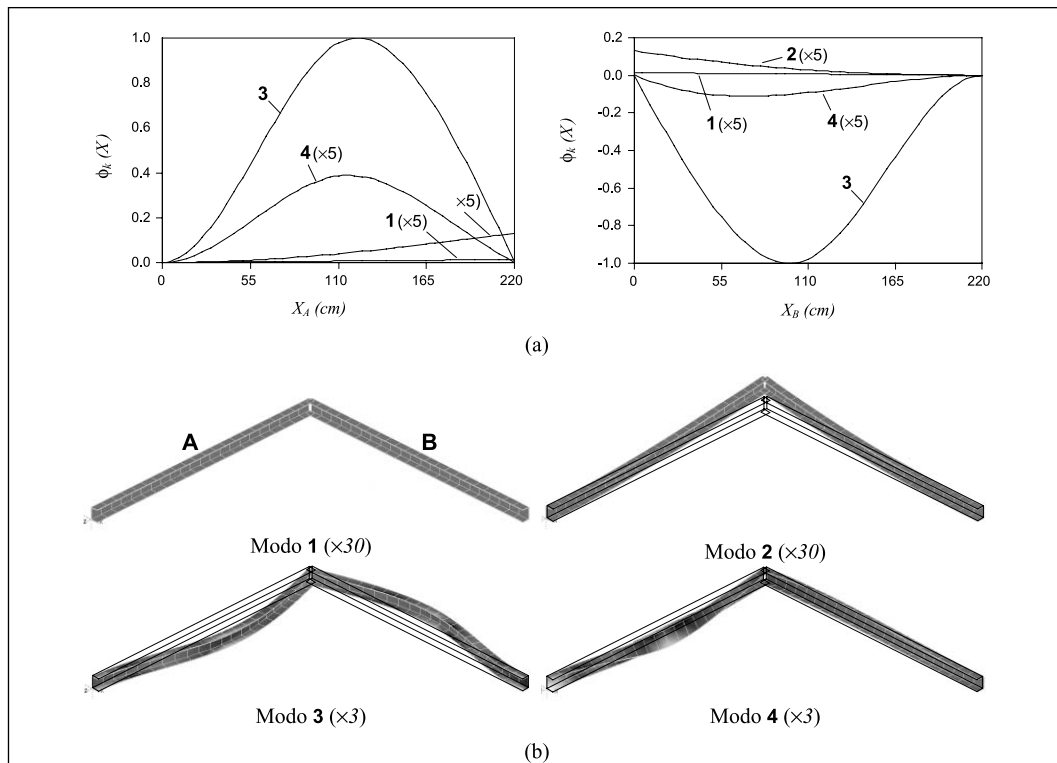


Figura 17: (a) Funções de amplitude dos modos de deformação das barras A e B e (b) decomposição modal da configuração deformada dessas barras.

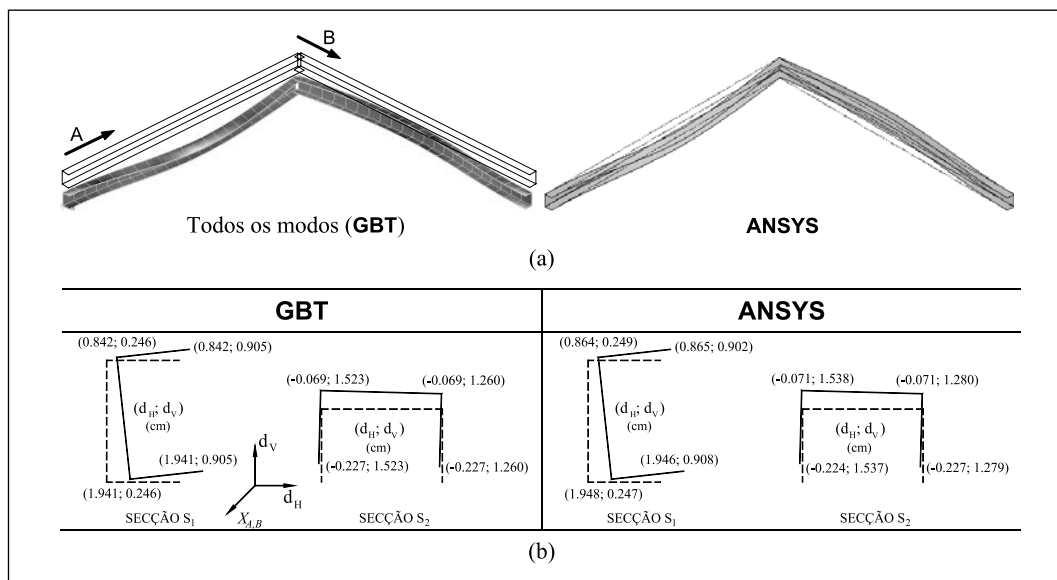


Figura 18: Comparação entre os resultados obtidos através da GBT e do ANSYS: (a) vista geral da configuração deformada do pórtico e (b) configurações deformadas das seções S1 e S2 (meio vão).

- (iii) as cargas concentradas aplicadas a meio vão das duas barras (no plano do pórtico) provocam apenas flexão em torno do eixo de menor inércia (modo 3) e extensão axial (modo 1) em qualquer das barras – *i.e.*, um comportamento “plano” do pórtico. Constata-se ainda que, como seria de esperar, a função  $\phi_3$  é aquela que exhibe amplitudes mais elevadas e a participação do modo 1 é extremamente pequena (desprezável).

A concluir, os diagramas apresentados na Figura 19(a) mostram a variação das tensões normais de membrana que o carregamento indicado na Figura 15(a) provoca ao longo da superfície média (planificada) das barras *A* e *B*. Essas tensões são obtidas a partir das relações da GBT

$$\sigma_{xx}^M = Eu_k \phi_{k,xx} \quad (25)$$

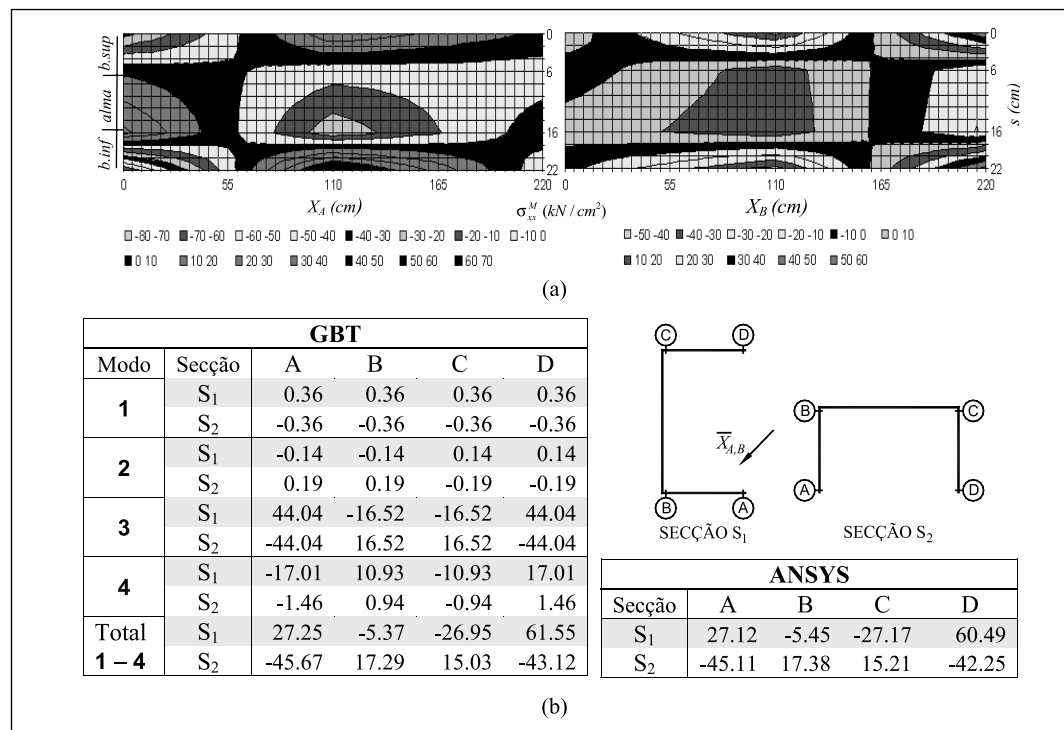


Figura 19: Pórtico simples em forma de “L”: (a) diagramas das tensões normais  $\sigma_{xx}^M(x,s)$  instaladas nas superfícies médias das barras *A* e *B* e (b) valores das tensões normais nas secções S<sub>1</sub> e S<sub>2</sub> (momento + forças).

o que significa que, tal como sucede no caso dos deslocamentos, as tensões também se podem decompor de forma modal. A Figura 19(b) mostra as tensões normais instaladas nas secções S<sub>1</sub> e S<sub>2</sub> e associadas à deformação de cada modo – as somas destas contribuições modais são comparadas com os valores fornecidos pelo ANSYS, observando-se, uma vez mais, que a precisão dos resultados obtidos por meio da GBT é notável (chega quase a ser surpreendente).

## 5.2 Pórtico de travessas inclinadas – análise de estabilidade

Apresenta-se agora a análise da estabilidade de um pórtico metálico simétrico com a geometria indicada na Figura 20(a) – o pórtico é formado por duas colunas (*A* e *D*) encastadas na base e duas travessas inclinadas (*B* e *C*), formadas por perfis de aço com a secção em U apresentada na Figura 20(b). As barras estão ligadas entre si de forma a que as almas dos perfis fiquem situadas no mesmo plano e o carregamento que actua no pórtico é constituído unicamente por esforços de compressão uniformes simétricos aplicados nas colunas ( $N_c$ ) e travessas ( $N_t$ ), cujos valores se relacionam através do parâmetro  $\gamma = N_t / N_c$  – toma-se  $N_c = P$  e faz-se variar  $\gamma$  continuamente entre 0 e 1. Analisam-se a estabilidade plana e espacial do pórtico, consistindo os resultados obtidos nos valores de  $P_b$ , os quais definem os carregamentos de bifurcação do pórtico, e nas configurações dos correspondentes modos de instabilidade. Alguns desses resultados são novamente comparados com valores fornecidos por análises efectuadas no ANSYS, sendo o pórtico agora discretizado por meio de elementos finitos de barra Beam189 – elementos com três nós e sete graus de liberdade por nó (três translações, três rotações e empenamento)<sup>6</sup>. Enquanto nas análises baseadas na GBT se discretizou o pórtico em 16 elementos finitos (quatro por barra), os resultados do ANSYS foram obtidos considerando seis elementos por barra – em ambos os casos, essas discretizações asseguram que existe convergência dos resultados. Chama-se a atenção para o facto de a modelação por meio de elementos finitos de barra do ANSYS incorporar também, nas ligações do pórtico, a cinemática da transmissão do empenamento que foi descrita na secção 4.

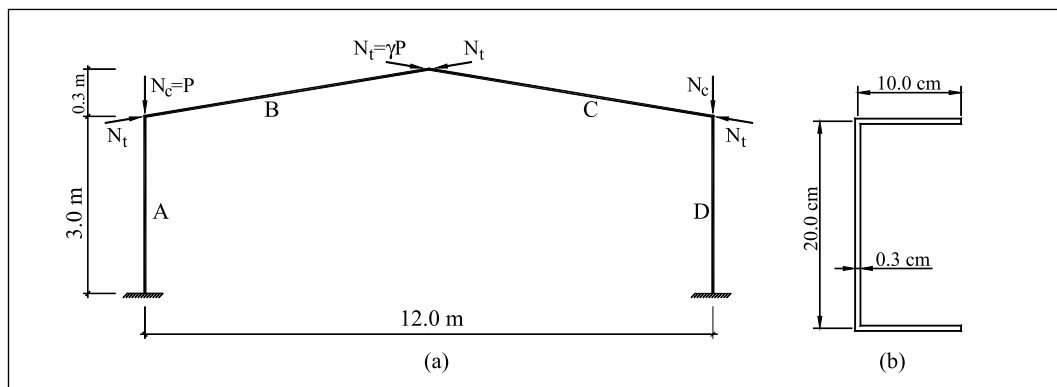


Figura 20: Pórtico de travessas inclinadas: (a) Geometria e carregamento e (b) dimensões da secção transversal comum a todas as barras (em U).

Com o objectivo de tornar a exposição tão clara quanto possível, começa-se por apresentar os resultados da análise mais simples: uma análise plana que inclui apenas os modos 1 e 2. Enquanto as Figuras 21(a)-(b) mostram as configurações dos dois primeiros modos de instabilidade do pórtico (um anti-simétrico e o outro simétrico – MAS ou MS), as curvas presentes na Figura 21(c) fornecem a variação dos valores de  $P_b$  associados a cada

um desses modos de instabilidade com o parâmetro  $\gamma$  (alguns valores foram calculados através da GBT e do ANSYS) – note-se que  $P_{cr}$ , valor que define o carregamento crítico do pórtico, é o menor dos dois valores de  $P_b$ . Por outro lado, a Figura 22 mostra a variação da configuração do modo crítico de instabilidade do pórtico (MAS ou MS) com o valor de  $\gamma$  – recorde-se que esta configuração é dada directamente pelo andamento das funções de amplitude dos modos um e dois (os únicos incluídos nas análises). A observação dos resultados apresentados nas Figuras 21(c) e 22 conduz aos seguintes comentários:

- (i) antes de mais, refira-se que os resultados obtidos confirmam as conclusões do trabalho de Silvestre e Camotim (2007), nomeadamente, que, dependendo do valor da relação entre os esforços de compressão actuantes nas travessas e colunas, a configuração do modo crítico de instabilidade pode ser anti-simétrica ( $\gamma < 0.73$ ) ou simétrica ( $\gamma > 0.73$ ) – para  $\gamma = 0.73$ , tem-se  $P_b = 543.5 \text{ kN}$ , valor que corresponde à ocorrência simultânea dos dois tipos de modos de

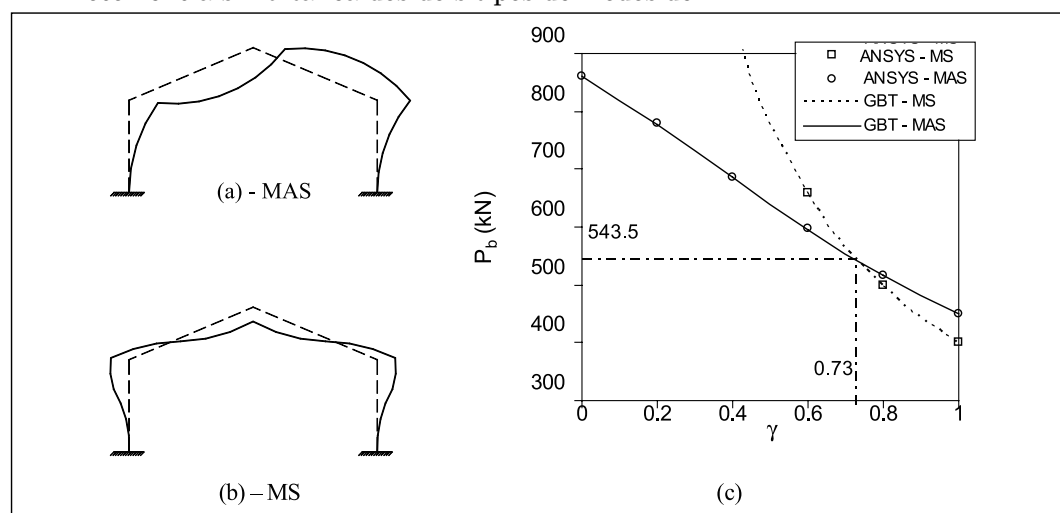


Figura 21: Estabilidade plana de pórticos de travessas inclinadas: configuração dos modos de instabilidade (a) anti-simétrico (MAS) e (b) simétrico (MS), e (c) variação das respectivas cargas de bifurcação com  $\gamma$ .

instabilidade, *i.e.*, tanto o MAS como o MS são *modos críticos*. A Figura 22 mostra claramente a mudança da natureza do modo crítico de instabilidade – enquanto no MAS tanto as travessas como as colunas exibem deformações significativas, no MS a deformação ocorre sobretudo nas travessas (as colunas praticamente não se deformam):

- (ii) as maiores deformações ocorrem nos nós coluna-travessa, no caso do MAS, e junto do vértice do pórtico, no caso do MS;
- (iii) para  $\gamma < 0.73$ , as deformações nas travessas associadas ao modo crítico de instabilidade (MAS) aumentam bastante com  $\gamma$ . Para  $\gamma > 0.73$ , a configuração do modo crítico de instabilidade (MS) permanece virtualmente inalterada;
- (iv) existe uma coincidência praticamente perfeita entre os valores das cargas de bifurcação  $P_b$  obtidos através da GBT e do programa ANSYS – as diferenças são sempre inferiores a 0.5%.

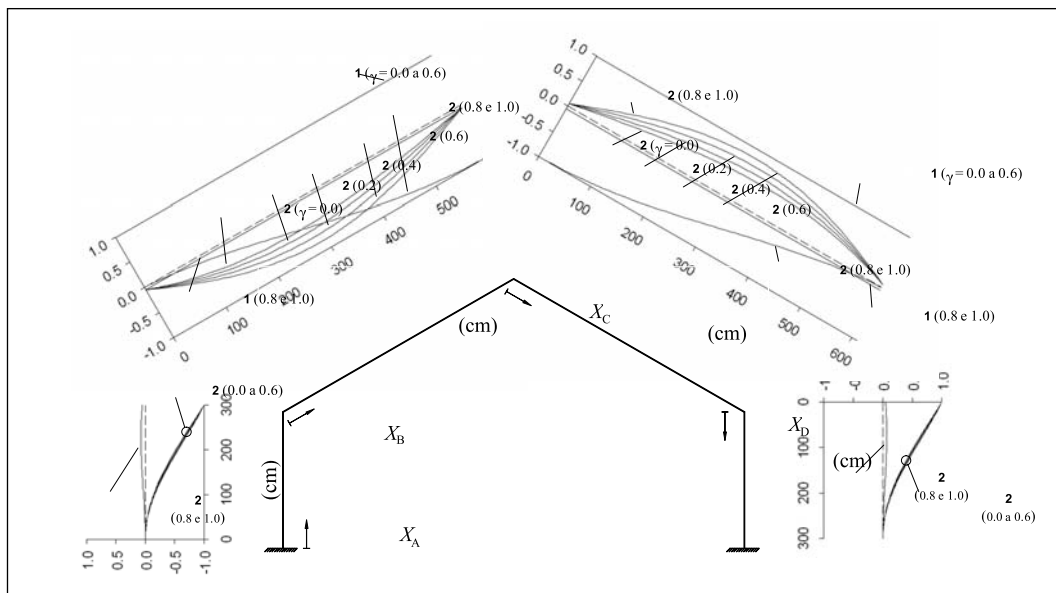


Figura 22: Variação do modo de instabilidade crítico do pórtico (estabilidade plana) com  $\gamma$ .

Estuda-se em seguida a estabilidade espacial do pórtico descrito anteriormente, com a geometria e o carregamento representados nas Figuras 20(a)-(b). Admite-se que (i) as bases das colunas estão encastradas nos dois planos e que (ii) os deslocamentos transversais perpendiculares ao plano do pórtico estão impedidos nos nós coluna-travessa e no vértice do pórtico (mais precisamente, nas intersecções dos eixos baricêntricos das barras que convergem nesses nós – ver Fig. 23(a)). Como as barras se podem agora deformar para fora do plano do pórtico, torna-se necessário incluir nas análises os modos 3 e 4 (para além dos modos 1 e 2). Analisam-se pórticos em que as ligações entre as barras são todas do mesmo tipo e possuem chapas de reforço em diagonal (ver Fig. 10(b) ou em caixa (ver Fig. 10(c)).

As curvas apresentadas na Figura 23(b) traduzem a variação da carga crítica  $P_{cr}$  com o valor do parâmetro  $\gamma$ , para ligações com chapas de reforço em diagonal e em caixa. Em qualquer dos casos, o modo crítico de instabilidade é por flexão-torção – no caso geral, este modo de instabilidade envolve flexão oblíqua e torção (ver Fig. 24). Os resultados apresentados na Figura 23(b) permitem extrair as seguintes conclusões:

- Uma vez mais, os resultados fornecidos pelas duas análises (GBT e ANSYS) praticamente coincidem – diferenças continuam a nunca exceder 0.5%;
- Para  $\gamma=0$  (esforços axiais apenas nas colunas), a influência da configuração das ligações (reforço em diagonal ou em caixa) no valor de  $P_{cr}$  é virtualmente nula (diferença de 0.3%). À medida que se aumenta o valor de  $\gamma$  (i.e., passa a existir compressão nas travessas), essa influência vai-se fazendo sentir um pouco mais, apesar de nunca ser muito significativa – a diferença máxima ocorre para  $\gamma=1.0$  e vale cerca de 9% (as ligações com reforço em diagonal conduzem a uma maior carga crítica).

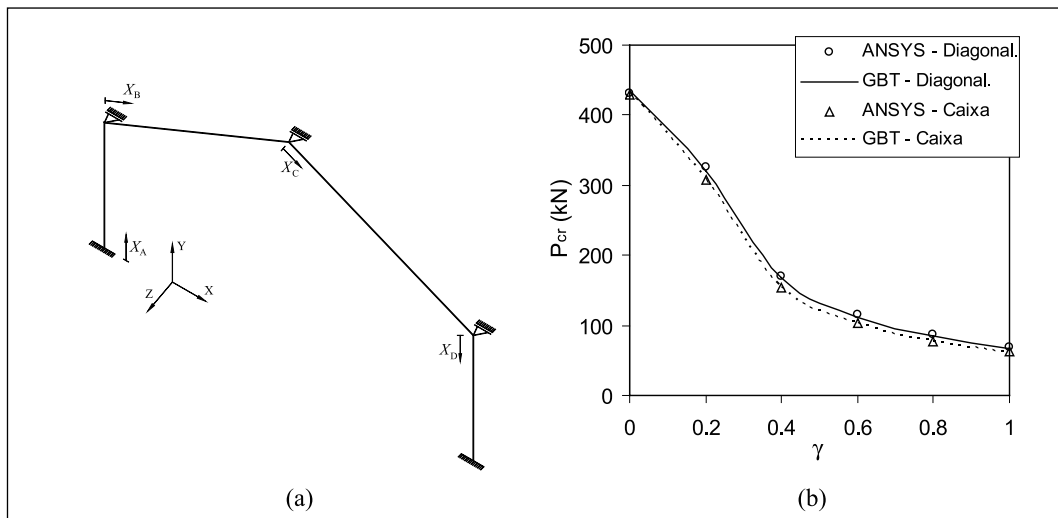


Figura 23: Estabilidade espacial: (a) condições de apoio e (b) variação da carga crítica com  $\gamma$

Consideram-se agora pórticos em que apenas as colunas estão comprimidas ( $\gamma=0$ ) – as Figuras 24 e 25 mostram os andamentos das funções de amplitude modal  $\phi_k(x)$  relativas aos modos críticos de instabilidade dos pórticos com ligações reforçadas em diagonal e em caixa. A observação desses resultados sugere os seguintes comentários:

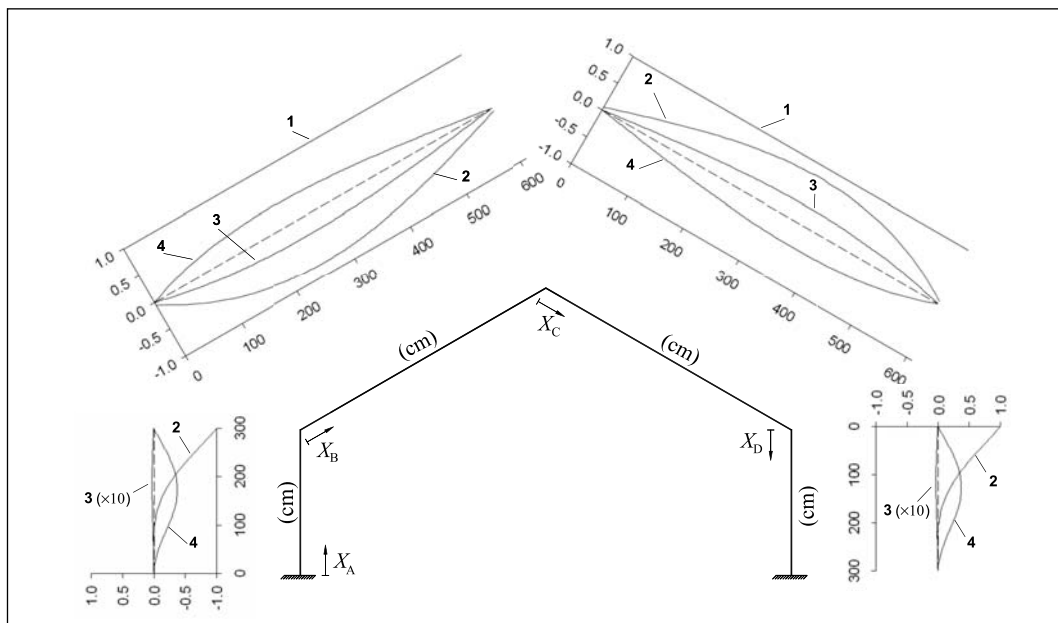


Figura 24: Estabilidade espacial: modo de instabilidade crítico ( $\gamma=0$ ) com reforços em diagonal.

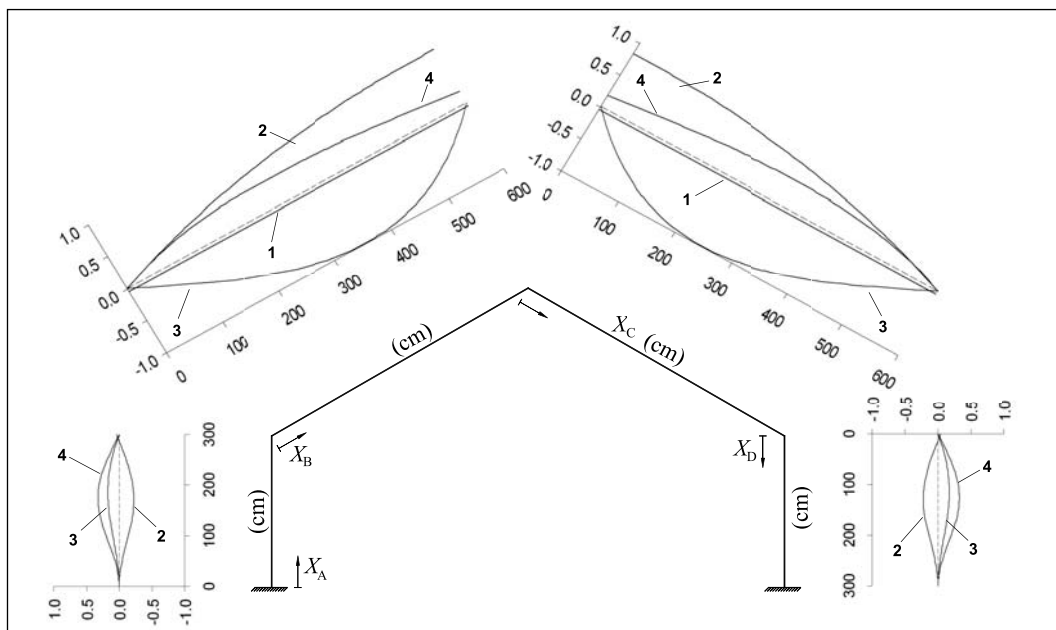


Figura 25: Estabilidade espacial: modo de instabilidade espacial ( $\gamma=0$ ) com reforços em caixa.

- (i) apesar de a configuração das ligações não afectar o valor de  $P_{cr}$ , o mesmo não se passa no que respeita à forma do modo crítico de instabilidade (bastante diferente nos dois pórticos) – recorde-se que, consoante a transmissão do empenamento seja directa ou inversa, o sentido da rotação de torção muda ou permanece inalterado nas ligações;
- (ii) no caso das ligações reforçadas em diagonal, o modo crítico de instabilidade do pórtico é anti-simétrico. A maior contribuição pertence ao modo 2 e ocorre nos topos das colunas; por outro lado, a participação do modo 4 é nula em todas as ligações do pórtico;
- (iii) quando os reforços das ligações do pórtico são em caixa, o modo crítico de instabilidade é simétrico. A maior contribuição pertence agora ao modo 3 e ocorre na vizinhança das secções de meio vão das travessas (um pouco mais próximo do vértice). Refira-se ainda que existe uma pequena participação do modo 4 no nó de ligação entre as travessas.

## 6. Conclusão

Neste trabalho começou-se por apresentar a formulação e a implementação computacional de elementos finitos de barra baseados na GBT que permitem analisar o comportamento global espacial de pórticos metálicos, em regime elástico – análises de primeira ordem e análises de estabilidade. Após uma breve descrição dos fundamentos da GBT,

descreveram-se com algum detalhe os conceitos e procedimentos que conduzem à obtenção das matrizes de rigidez (linear + geométrica) dos referidos elementos finitos de barra e da correspondente matriz de rigidez total da estrutura, a qual incorpora a influência das ligações e condições de apoio do pórtico. No que respeita ao tratamento das ligações do pórtico, deu-se uma atenção especial (i) à quantificação da transmissão do empenamento, (ii) ao efeito das propriedades de simetria das secções transversais das barras unidas e (iii) à caracterização do elemento de nó que permite exprimir as grandezas da GBT em termos de deslocamentos generalizados (*e.g.*, deslocamentos transversais, rotações de flexão, ou derivadas de rotações de torção). Em seguida, descreveram-se e comentaram-se as relações cinemáticas que asseguram a compatibilidade e a transmissão do empenamento de torção em ligações entre duas ou mais barras com secção em U ou I e orientações distintas – em particular, abordaram-se ligações não reforçadas e ligações com reforço em diagonal ou em caixa. Finalmente, ilustra-se a aplicação e as potencialidades da metodologia proposta – para este efeito, apresentaram-se e discutiram-se resultados numéricos relativos (i) à análise linear de um pórtico simples, formado por duas barras ortogonais em forma de “L” e (ii) à análise de estabilidade de pórticos com travessas inclinadas. Determinaram-se (i) configurações deformadas e tensões normais ou (ii) cargas de bifurcação e modos de instabilidade dos pórticos referidos – tirando partido das características modais da GBT, exprimiram-se vários modos de instabilidade, configurações deformadas e distribuições de tensões normais em termos das funções de amplitude dos modos de deformação (diagramas de decomposição modal). Alguns dos resultados fornecidos pelas análises baseadas na GBT foram validados pela comparação com valores obtidos por meio de análises de elementos finitos “convencionais” (de barra ou casca) efectuadas no programa ANSYS – apesar de o número de graus de liberdade envolvidos nas aplicações da GBT ser muito menor que os requeridos pelas análises do ANSYS (sobretudo no caso das discretizações em elementos de casca), obtiveram-se sempre resultados praticamente coincidentes (as diferenças nunca excederam os 2%).

## Agradecimentos

O primeiro autor agradece o apoio financeiro do Programa Alþan – programa de bolsas de alto nível da União Europeia para a América Latina (bolsa nº E04D029316BR).

## Notas

- <sup>1</sup> Para “uniformizar” o grau de todas as equações de (2), a primeira delas, relativa o modo 1, é “transformada” numa equação de 4º grau (note-se que, em rigor, ela é de 2º grau) – assim, podem aproximar-se todas as funções de amplitude modal por polinómios cúbicos de Hermite. Este procedimento envolve a definição de um novo grau de liberdade por nó, associado à função  $\phi_I = u$  e sem significado físico óbvio – o deslocamento axial é a derivada desta nova função ( $\phi_{I,x} = u$ ).
- <sup>2</sup> Recorde-se que os esforços transversos têm de ser aplicados no centro de corte para que não haja torção (apesar de as flexões correspondentes ocorrerem em torno dos eixos principais centrais de inércia) e note-se que os graus de liberdade relativos à extensão axial podem ser referidos a qualquer ponto (o procedimento mais habitual é referi-los ao centro de gravidade – ver Fig. 4(a)).

- <sup>3</sup> Neste trabalho, posiciona-se o “elemento de nó” no ponto da ligação definido pela intersecção dos eixos dos centros de gravidade das barras que nela convergem. Nesse ponto, adopta-se um sistema de eixos de referência.
- <sup>4</sup> Trata-se de uma representação tridimensional de resultados obtidos através de uma análise baseada numa modelação unidimensional – elementos finitos de barra baseados na GBT. Já a representação fornecida pelo programa ANSYS é “genuinamente” tridimensional – baseia-se em resultados obtidos com uma modelação por elementos finitos de casca.
- <sup>5</sup> Para permitir uma melhor compreensão da configuração deformada fornecida pelo ANSYS, omitem-se as linhas que definem a malha de elementos finitos de casca adoptada na análise.
- <sup>6</sup> Remete-se o leitor interessado na comparação entre os valores obtidos através da GBT e fornecidos por análises efectuadas com elementos finitos de casca para o trabalho recente de Camotim et al. (2006).

## Referências

- Baigent A. e Hancock G. (1982). Structural analysis of assemblages of thin-walled members. *Engineering Structures*, **4**(7), 207-216.
- Camotim D., Silvestre N., Gonçalves R. e Dinis P.B. (2004). GBT analysis of thin-walled members: new formulations and applications, *Thin-Walled Structures: Recent Advances and Future Trends in Thin-Walled Structures Technology*, (International Workshop – Loughborough, 25/6), J. Loughlan (ed.), Canopus Publishing Ltd., Bath, 137-168.
- Camotim D., Silvestre N., Dinis P.B., Bebiano R. and Basaglia C. (2006). Recent progress on the numerical analysis of thin-walled steel members and frames, *Proceedings of the International Symposium on Innovative Design of Steel Structures* (Hong Kong, 10/11), B. Young (ed.), 63-104.
- Camotim D., Silvestre N., Gonçalves R. e Dinis P.B. (2006). GBT-based structural analysis of thin-walled members: overview, recent progress and future developments, *Advances in Engineering Structures, Mechanics & Construction* (SMCD 2006 – Waterloo, 14-17/5), M. Pandey, W. Xie, L. Xu (eds.), Springer, 187-204.
- Dinis P.B., Camotim D. e Silvestre N. (2006). GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrarily ‘branched’ open cross-sections, *Thin-Walled Structures*, **44**(1), 20-38.
- Gonçalves R. e Camotim D. (2004). GBT local and global buckling analysis of aluminium and stainless steel columns, *Computers & Structures*, **82**(17-19), 1473-1484.
- Gonçalves R. e Camotim D. (2006). Thin-walled member plastic bifurcation analysis using generalised beam theory, *Computers & Structures*, aceite para publicação.
- Krenk S. (1990). Constrained lateral buckling of I-beam gable frames. *Journal of Structural Engineering* (ASCE), **116**(12), 3268-3284.
- Krenk S. e Damkilde L. (1991). Warping of joints in I-beam assemblages, *Journal of Engineering Mechanics* (ASCE), **117**(11), 2457-2474.
- MacPhedran I. e Grondin G. (2005). Warping restraint and steel frame instability. *Proceedings of Structural Stability Research Council (SSRC) Annual Stability Conference* (Montreal, April 6-9), 205-224.
- Masarira A. (2002). The effect of joints on the stability behaviour of steel frame beams, *Journal of Constructional Steel Research*, **58**(10), 1375-1390.

- Morrell P., Riddington J., Ali F. e Hamid H. (1996). Influence of joint detail on the flexural-torsional interaction of thin-walled structures, *Thin-Walled Structures*, **24**(2), 97-111.
- SAS – Swanson Analysis Systems Inc. (2004). *ANSYS Reference Manual* (Version 8.1).
- Schardt R. (1989). *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*, Springer Verlag, Berlin.
- Silvestre N. e Camotim D. (2002a). First-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials, *Thin-Walled Structures*, **40**(9), 755-789.
- Silvestre N. e Camotim D. (2002b). Second-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials, *Thin-Walled Structures*, **40**(9), 791-820.
- Silvestre N. and Camotim D. (2003a). GBT buckling analysis of pultruded FRP lipped channel members, *Computers & Structures*, **81**(18-19), 1889-1904.
- Silvestre N. and Camotim D. (2003b). Non-linear generalised beam theory for cold-formed steel members, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **3**(4), 461-490.
- Silvestre N e Camotim D. (2007). Elastic buckling and second-order behaviour of pitched-roof steel frames, *Journal of Constructional Steel Research*, **63**(08), 804-818.
- Silvestre N. e Camotim D. (2006b). Vibration behaviour of axially compressed cold-formed steel members, *Steel and Composite Structures*, **6**(3), 221-236.
- Silvestre N. e Camotim D. (2006c). GBT-based local and global vibration analysis of loaded composite open-section thin-walled members, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **6**(1), 1-29.
- Tong G., Yan X. e Zhang L. (2005). Warping and bimoment transmission through diagonally stiffened beam-to-column joints. *Journal of Constructional Steel Research*, **61**(6), 749-763.
- Vacharajittiphan P. e Trahair N. (1974). Warping and distortion at I-section joints. *Journal of the Structural Division* (ASCE), **100**(3), 547-564.
- Vlasov V.Z. (1958). *Thin-Walled Elastic Bars*. Fizmatgiz, Moscow. (Russian – English translation: Israel Program for Scientific Translation, Jerusalém, 1961)



# Plane and spatial analysis of the global behaviour of thin-walled steel frames using generalised beam theory

## Abstract

This paper presents the formulation and numerical implementation of beam finite elements based on Generalised Beam Theory (GBT), which are intended to analyse the plane and spatial global structural behaviour of thin-walled steel frames, in the elastic range. In order to achieve this goal, it is indispensable to establish kinematic relationships making it possible to ensure displacement and rotation compatibility at the joints connecting non-aligned members – particular attention is paid to the warping displacement compatibility, a very important aspect. After briefly reviewing the main concepts and procedures involved in the performance of a GBT analysis, one presents in detail the formulation and numerical implementation of GBT-based beam finite elements that include only the four rigid-body deformation modes – in particular, one describes the procedures leading to the determination of the finite element and frame linear and geometric stiffness matrices (the latter must include the influence of the frame joints and end support conditions). Next, one addresses kinematic models aimed at simulating the warping transmission at frame joints connecting two or more U and I-section members and exhibiting three different configurations: web-continuity and flange-continuity with either diagonal or box-stiffening. Finally, in order to illustrate the application and capabilities of the developed GBT-based beam finite elements, one presents and discusses numerical results concerning the first-order behaviour of a simple L-shaped frame and the buckling behaviour of industrial building pitched-roof frames – some of these results were validated through the comparison with values yielded by (conventional) ANSYS beam or shell finite element analyses.

*Keywords:* Thin-walled steel frames. Generalised Beam Theory (GBT). Finite element method (shell and beam). Geometrically linear analysis. Plane buckling analysis. Spatial buckling analysis.

## Introduction

In recent years, cold-formed steel profiles have been increasingly used in the construction industry, namely to build the structural framing of either industrial (predominantly) or residential buildings – this is mostly due to their high structural efficiency (large strength-to-weight ratio), remarkable fabrication versatility and progressively low fabrica-

tion and erection costs. However, the rigorous analysis of this type of frames, by means of beam (one-dimensional) models, still remains a rather open problem that attracts considerable attention from the technical/scientific community. This is due to the fact that most cold-formed steel profiles have thin-walled open cross-sections, which means that they exhibit a small torsional stiffness and are very susceptible to warping deformations, and the mechanics of the warping transmission at joints connecting non-aligned members constitute a very complex (and not yet fully understood) phenomenon – to make matters worse, these mechanics are strongly dependent on the particular joint configuration).

In the context of the global structural behaviour of thin-walled frames, a fair number of researchers have investigated the torsion rotation compatibility and warping transmission at the frame joints (*e.g.*, Masarira 2002 or Tong et al. 2005). However, virtually all these studies were carried out by means finite element analyses, adopting discretisations in either (i) shell elements or (ii) beam elements based on Vlasov's theory – in the latter case, modelling the warping transmission at the joints is no straightforward task. One very promising alternative to the above approaches is the use of a one-dimensional model (beam finite element) based on Generalised Beam Theory (GBT), a beam theory that incorporates genuine folded-plate concepts, was originally formulated by Schardt (1989) and has experienced substantial new developments in the last few years (*e.g.*, Camotim et al., 2004, 2006). Since all these developments took place solely for isolated members, an important gap still needs to be bridged before the GBT approach can be applied to thin-walled frames: one must be able to handle joints connecting members with different orientations, *i.e.*, to express the corresponding degrees of freedom in a “modal language”.

The aim of this work is to present the formulation and numerical implementation of GBT-based beam finite elements, intended to assess the plane and spatial global structural behaviour of thin-walled steel frames, and also to illustrate its application and potential. The numerical results displayed and discussed concern the first-order behaviour of a simple L-shaped frame and the buckling behaviour of pitched-roof frames – for validation purposes, the GBT-based results are compared with values yielded by ANSYS shell or (conventional) beam finite element analyses.

## Brief review of the GBT fundamentals

this section includes a brief overview of the most important concepts involved in the performance of a GBT cross-section analysis: (i) identification of the deformation modes and (ii) evaluation of the corresponding modal mechanical properties (see Fig. 2). Once this knowledge is acquired, it becomes possible to establish the GBT system of equilibrium equations (see Eq. (2)) – note that the components of tensors (matrices)  $C_{ik}$ ,  $D_{ik}$  and  $B_{ik}$  are cross-section modal mechanical properties concerning the cross-section wall warping displacements ( $[C_{ik}]$ ), torsional rotations ( $[D_{ik}]$ ) and transverse bending ( $[B_{ik}]$ ). Because this work deals exclusively with the frame global behaviour, (i) only the four rigid-body modes

are included in the beam finite element formulations and (ii) matrix  $[B_{ik}]$  is obviously null (only tensors  $[C_{ik}]$  and  $[D_{ik}]$  have to be dealt with).

## Formulation of GBT-based beam finite elements

this section addresses the procedures involved in the determination of the frame overall linear and geometric stiffness matrices (on the basis of the corresponding GBT-based element matrices) – the main aspects concerning these procedures may be briefly described as follows:

- (i) After discretising the frame, one must handle separately the degrees of freedom associated with the member internal nodes and the member end nodes corresponding to frame joints (connecting two or more differently oriented members – see Fig. 5). In the former, one always deals with GBT degrees of freedom and compatibility is straightforwardly ensured (Silvestre and Camotim 2003a). The same does not occur in the joint nodes, as it is no easy task to express the compatibility conditions in terms of the GBT degrees of freedom of the converging finite elements – this is due to their modal nature and also to the fact that they are referred to different coordinate systems. Then, one must “transform” these modal degrees of freedom into nodal ones before addressing their compatibility (see eqs. (11)-(12)) – this is done by resorting to a “joint element” concept, which makes it possible to take care of all the joint compatibility issues.
- (ii) In a “joint element” one transforms the GBT modal degrees of freedom of all the converging finite elements into nodal generalised displacements of the point where the connection is deemed to be materialised – usually, the intersection of the centroidal axes of at least two of the various connected members (see Fig. 6). Particular attention must be paid to the quantification of the warping transmission between the members (finite elements) connected at the joint – see Eq. (16), where  $\Gamma$  is a constant relating the member end torsional rotation derivatives.
- (iii) Once all joint compatibility issues are dealt with, one readily obtains the frame overall total stiffness matrix (sum of linear and geometric terms), which relates “mixed” degrees of freedom (GBT modal ones in all member internal nodes and “conventional” generalised displacements in the joints connecting those members) to the corresponding generalised forces.

After determining the frame overall total stiffness matrix, the performance of its structural analysis consists of solving the matrix equations presented in Eq. (17), which concern either a first-order or a buckling analysis. However, since the (“mixed”) eigenvectors combine joint nodal generalised displacements and member GBT degrees of freedom and one wishes to have a modal representation of the frame buckling modes, it is indispensable to “transform back” the nodal degrees of freedom into modal (GBT) ones associated with the end section of each converging finite element (member) end –

see Eq. (18). Finally, with all the member GBT degrees of freedom known, one readily obtains the modal representation of the frame buckling modes, thus making it possible to identify and quantify the individual contributions of the various member deformation modes – this feature provides fresh insight and a in-depth understanding about the mechanics of the frame global (first-order or buckling) behaviour.

## Warping transmission

This section reports the kinematic models adopted to simulate the warping transmission at frame joints connecting two or more non-aligned U and I-section members – this transmission depends on the joint configuration and its quantitative assessment requires the performance and interpretation of careful shell finite element analyses. Next, one briefly addresses the warping transmission mechanisms associated with the joint configurations considered in this work:

- (i) In the joint shown in Figure 9, the flanges of the two connected members lie in the same planes, which means that it is logical to assume “continuity” between them. Then, the two connected member cross-sections may be viewed as the “faces” of a single cross-section, which readily implies that they exhibit exactly the same warping displacement values and signs – therefore, the warping transmission is said to be complete and direct.
- (ii) When the (U or I-section) connected member webs have lie in the same plane (i.e., there is web continuity), the warping transmission at the joint involves, in the general case, distortion (*i.e.*, local deformations stemming from wall transverse bending), a fact automatically implying an incomplete warping transmission – this is the case, for instance, of the “plain” (unstiffened) joint depicted in Figure 10(a). Therefore, a complete warping transmission in joints with web continuity can only be achieved by stiffening the joint, *i.e.*, by adding plates to prevent distortion – this is the case of the joints shown in Figures 10(b) and 10(c), connecting U-section members and stiffened by means of either a diagonally placed plate (diagonal-stiffened joint) or the extension of the connected member flanges (box-stiffened joint).

## Illustrative Examples

In order to validate and illustrate the application and capabilities of the derived GBT-based beam finite elements, in this section one presents and discusses numerical results concerning the (i) spatial first-order behaviour of a simple L-shaped frame and (ii) plane and spatial buckling behaviour of an industrial building pitched-roof frame.

### Simple L-shaped frame – first-order analysis

This subsection deals with the first-order behaviour of a simple L-shaped frame, formed by two fixed-end equal-length ( $L=220\text{ cm}$ ) orthogonal U-section members (see Fig. 14(b)) connected at the joint with flange continuity (see Fig. 9(a)) – its geometry and loading are shown in Figure 15(a). Taking advantage of the GBT modal nature, one determines (i) the variation of the transversal displacements along the member axes (see Fig. 16), (ii) the modal amplitude functions and frame deformed configurations (see Fig. 17) and (iii) the two member mid-span cross-section deformed configurations and normal stress distributions (see Figs. 18(b) and 19(a)) – the proposed GBT-based beam finite element was found to provide very clear insight on the mechanics of the frame structural behaviour. In order to validate the GBT-based results, some of them are compared with values yielded by shell finite element analyses carried out in the commercial code ANSYS (SAS 2004) and adopting member discretisations into shell63 elements (ANSYS terminology) – a practical coincidence was found in all cases (all errors always below 2.0% – the overwhelming majority below 0.5%).

### Pitched-roof plane frame – buckling analysis

Next, one presents and discusses numerical results concerning the in-plane and spatial global buckling behaviour of the symmetrical fixed-base pitched-roof frame shown in Figure 20(a), which is formed by columns and rafters with the same U-section (displayed in Fig. 20(b)), connected by either diagonal-stiffened or box-stiffened joints with web continuity (see Figs. 10(b) and 10(c)) and subjected to a “purely axial” loading defined by the ratio  $\gamma = N_r / N_c$ , where  $N_c$  and  $N_r$  are the column and rafter axial forces (see Fig. 20(a)). The numerical results dealing with the frame in-plane buckling behaviour consist of the variation, with the loading parameter ratio  $\gamma$ , of the frame first two buckling load values, associated with symmetric and anti-symmetric buckling modes (see Fig. 21(a)-(c)), and critical buckling mode shapes, which are either symmetric or anti-symmetric (see Fig. 22). Next, one investigates the spatial buckling behaviour of the same pitched-roof plane frame, now assumed to have the columns fixed in both planes and the out-of-plane transverse displacements fully restrained at the three joint locations (see Fig. 23(a)). The results presented concern both diagonal and box-stiffened joints and comprise the variation of the frame critical buckling load with  $\gamma$  (see Fig. 23(b)), and, for  $\gamma=0$  (only the column are axially loaded), the modal representation of the frame critical spatial buckling mode (see Figs. 24 and 25). For validation purposes, some GBT-based in-plane and spatial buckling results are compared with values yielded by conventional beam finite element analyses again performed in the code ANSYS, now adopting member discretisations into beam189 elements – once more, an excellent agreement was found (the errors remain always below 0.5%).

## Conclusion

Besides going quickly over the content of the whole paper, one underlines the very high numerical efficiency of the proposed GBT-based beam finite elements. Indeed, virtually exact results (the maximum difference between the GBT-based and ANSYS values never exceeded 2.0%, with the vast majority of them below 0.5%) were obtained with rather small numbers of degrees of freedom – orders of magnitude below the ones required to perform equally accurate ANSYS analyses.