

Algoritmos eficientes para correção de erros na análise dinâmica no domínio da frequência de sistemas estruturais

Rodrigo Silveira Camargo¹, Walnório Graça Ferreira²

Resumo

Este trabalho apresenta algoritmos eficientes disponíveis na literatura para encontrar a resposta de sistemas estruturais submetidos a carregamentos dinâmicos, por meio de um método que usa uma função corretiva para encontrar a resposta transiente a partir da resposta estacionária obtida pela transformada discreta de Fourier (ou discrete Fourier transform, DFT). O uso da DFT, por envolver uma discretização, induz erros nas condições iniciais. Esse procedimento visa corrigir esses erros. São apresentadas duas formulações, uma em termos das respostas do sistema a deslocamento e velocidade iniciais unitários e a outra em termos das respostas a um trem de deslocamentos unitários e a um trem de variações unitárias de velocidade. Essa formulação foi generalizada para sistemas com múltiplos graus de liberdade com o uso de superposição modal, onde um sistema com N graus de liberdade é desacoplado em N sistemas com um grau de liberdade. Foram feitas aplicações numéricas, tanto para sistemas com um grau de liberdade, quanto para múltiplos graus de liberdade, envolvendo algumas cargas dinâmicas.

Palavras-chave: Análise do domínio da frequência. Transformada de Fourier. Teorema da convolução. Algoritmos eficientes.

¹ COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Av. Brigadeiro Trompowski, s/n - Cidade Universitária - CT - Bl. B S100. rodrigo_camargo2000@yahoo.com

² Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo. Av. Fernando Ferrari, 514 - Campus Universitário Alar Queiroz de Araújo. walnorio@pesquisador.cnpq.br

Introdução

A resposta de um sistema estrutural (tal como uma torre ou um edifício) a um carregamento é dependente de vários fatores, e, principalmente, do próprio carregamento. Para carregamentos periódicos (cíclicos), o cálculo da transformada discreta de Fourier (ou *discrete Fourier transform*, DFT) com o uso do algoritmo da transformada rápida de Fourier (ou *fast Fourier transform*, FFT) se mostra extremamente poderoso, tanto na precisão quanto na velocidade de cálculo da resposta. Um carregamento periódico implicará também em uma resposta periódica (estacionária), e por isso, ambos podem ser facilmente analisados em termos de suas transformadas de Fourier, que expressos em forma discretizada podem ser eficientemente calculadas por meio da transformada rápida de Fourier.

Para o caso de um carregamento não-periódico (transiente), a resposta de um sistema será também não-periódica, o que faz suas análises em termos de suas transformadas de Fourier dificultadas. O uso do algoritmo FFT causará, por isso, uma periodização em ambas, com período arbitrário. Em outras palavras, isso significa que ao se usar FFT para encontrar a resposta a um carregamento transiente, encontrar-se-á não a resposta ao carregamento original, mas sim a uma versão periodizada deste. O carregamento original deverá ser truncado em algum ponto, a partir do qual se repetirá indefinidamente. É claro que a resposta obtida a esse carregamento induzido não é igual à resposta real do sistema ao carregamento original, até mesmo porque a resposta ao carregamento induzido será também periódica, enquanto que a resposta ao carregamento original será transiente. Ainda assim, ao menos dentro do intervalo de um período de truncamento, pode-se tornar a resposta obtida tão próxima quanto possível da resposta real, desde que tomados cuidados específicos.

Em engenharia, normalmente carregamentos transientes podem ocorrer em forma semelhante à de pulsos, ou seja, são aplicados durante um determinado tempo e cessam daí em diante, período a partir do qual a estrutura está em vibração livre, e é amortecida até o repouso. Além disso, é usual a estrutura ter condições iniciais nulas, ou seja, deslocamento e velocidade nulos. Um dos modos de se minimizar os erros entre as respostas calculada e real é o de usar o que se chama de tempo estendido, ou seja, definir para o período de repetição induzida do carregamento um valor suficientemente alto para que, depois de cessada a aplicação do carregamento, a estrutura literalmente “tenha tempo” para ser amortecida até atingir novamente condições iniciais nulas antes

da ação do próximo período induzido pela periodização. O valor do tempo estendido é claramente dependente de fatores como a rigidez e fator de amortecimento do sistema, ou a duração da aplicação efetiva do carregamento, e existem diversas recomendações para possíveis valores a se usar.

Entretanto, pode ser necessário um tempo estendido muito grande para assegurar o retorno do sistema a condições iniciais nulas até o próximo período do carregamento. A discretização do período dado pelo tempo estendido em um número arbitrário de pontos poderá, com isso, ser não muito refinada, com poucos pontos, ou ser refinada o suficiente, mas com um número muito grande de pontos. Além disso, muitas vezes o dado de interesse da análise é o deslocamento máximo do sistema, o que acontece não muito depois do fim da ação do carregamento, e freqüentemente muito antes de o sistema atingir o repouso novamente. Portanto, levar em consideração a resposta muito depois do fim da ação do carregamento pode ser um desperdício de armazenamento computacional.

O problema, então, é discutir uma maneira eficaz de se encontrar uma aproximação suficientemente precisa da resposta transiente de um sistema a um carregamento, partindo-se de sua resposta estacionária correspondente, num período arbitrário.

Assim, os objetivos deste trabalho são: revisar, em termos físicos, os procedimentos para encontrar a resposta transiente de sistemas lineares pelo procedimento clássico da DFT; examinar a natureza e as magnitudes dos erros que podem resultar de seu uso; apresentar umprocedimento eficiente, proposto por Veletsos e Ventura (1984, 1985), para calcular a resposta transiente de uma estrutura linear, a partir de sua resposta estacionária a uma extensão periódica do carregamento original, fazendo uso da superposição de uma função corretiva à resposta estacionária, efetivamente transformando-a na resposta transiente desejada; aplicar o procedimento proposto também nas soluções das equações desacopladas do movimento na formulação do método da superposição modal para solução de sistemas com múltiplos graus de liberdade; demonstrar a superioridade do procedimento apresentado com o uso de exemplos numéricos.

Transformada de Fourier

Definição

A *transformada de Fourier* de $f(t)$ é uma transformada integral definida por:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

A transformada que, quando aplicada a $F(\omega)$, é capaz de retornar novamente a função original $f(t)$, é chamada *transformada inversa de Fourier*. Por esse motivo, a Eq. (1) é também chamada transformada *direta* de Fourier.

A transformada inversa de Fourier é definida por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

Se um par de funções $f(t)$ e $F(\omega)$ satisfaz as Eqs. (1) e (2), então diz-se que elas formam um *par de transformadas de Fourier*.

Transformada discreta de Fourier (DFT)

A definição das transformadas de Fourier, mostrada nas Eqs. (1) e (2), torna muito difícil seu cálculo por meios computacionais. Primeiro, porque o resultado das transformadas é uma função contínua, e é extremamente difícil e demorado tratar de funções contínuas analiticamente em computadores. Por meio de softwares, é muito mais eficiente tratar da função *discretizada*, ou seja, na forma de pontos discretos igualmente espaçados. Além disso, em casos práticos, muitas vezes a função $f(t)$, cuja transformada está sendo calculada, pode representar o resultado de dados obtidos experimentalmente, e por isso também conhecida apenas em pontos discretos.

Em segundo lugar, porque os limites de integração das transformadas tornam o número de pontos discretos infinito. Computacionalmente, é preciso efetuar os cálculos apenas num intervalo finito de pontos, ou seja, *truncar* as integrações.

Essa discretização transforma as integrais das transformadas de Fourier em somatórios. Da mesma forma, o truncamento transforma os limites $-\infty$ e ∞ em valores próprios definidos. É claro que esses procedimentos converterão os resultados antes exatos obtidos pelas Eqs. (1) e (2) em *aproximações*, induzindo a erros que devem ser reduzidos com a escolha apropriada do espaçamento entre os pontos discretos e do intervalo de truncamento.

As Eqs. (1) e (2), quando ajustadas como explicado, são as equações da *transformada discreta de Fourier*, ou, do inglês, *discrete Fourier transform* (DFT), definidas por:

$$F(\omega_m) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}, m = 0, \dots, N-1 \quad (3)$$

$$f(t_n) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} F(\omega_m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}}, n = 0, \dots, N-1 \quad (4)$$

Para a aplicação das equações acima, adota-se um período T para o truncamento de $f(t)$. Dentro desse período, são tomados N pontos discretos, igualmente espaçados por $\Delta t = T/N$. O valor de $f(t)$ no n -ésimo ponto é dado por $f(t_n)$, para o qual $t_n = n\Delta t$.

Da mesma forma, a transformada discreta $F(\omega)$ de $f(t)$ terá como resultado N pontos, separados pelo intervalo $\Delta\omega = 2\pi/T$. O valor do m -ésimo ponto é $F(\omega_m)$, para o qual $\omega_m = \mu_m \Delta\omega$, com μ_m dado pela Tabela 1.

Tabela 1: Frequências discretas.

m	μ_m	ω_m
0	0	0
1	1	$\Delta\omega$
2	2	$2\Delta\omega$
\vdots	\vdots	\vdots
$N/2 - 1$	$N/2 - 1$	$(N/2 - 1)\Delta\omega$
$N/2$	$N/2$	$(N/2)\Delta\omega$
$N/2 + 1$	$-N/2 + 1$	$(-N/2 + 1)\Delta\omega$
$N/2 + 2$	$-N/2 + 2$	$(-N/2 + 2)\Delta\omega$
\vdots	\vdots	\vdots
$N - 2$	-2	$-2\Delta\omega$
$N - 1$	-1	$-\Delta\omega$

Essa definição “diferenciada” de ω_m apenas reflete a periodicidade induzida tanto para os pontos discretos $f(t_n)$ quanto para os pontos discretos $F(\omega_m)$. De fato, $\omega_m = \omega_{m+N}$, e essa definição de ω_m é necessária por adequação puramente matemática.

Teorema da convolução

Esta é uma propriedade importante da convolução, simbolizada por um asterisco (*) e definida por:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t - \tau)d\tau \quad (5)$$

O teorema da convolução relaciona a convolução diretamente com a transformada de Fourier. Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções quaisquer, e sejam $F(\omega)$ e $G(\omega)$ suas respectivas

transformadas de Fourier. O teorema da convolução afirma que as funções $f(t) * g(t)$ e $F(\omega) \cdot G(\omega)$ formam um par de transformadas de Fourier. Da mesma forma, as funções $f(t) \cdot g(t)$ e $F(\omega) * G(\omega)$ também formam um par de transformadas de Fourier.

Denotando o operador da transformada de Fourier por \mathcal{F} , o teorema da convolução pode ser escrito matematicamente na forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} &= \mathcal{F}\{f(t)\} \cdot \mathcal{F}\{g(t)\} \\ \mathcal{F}\{f(t) \cdot g(t)\} &= \mathcal{F}\{f(t)\} * \mathcal{F}\{g(t)\}\end{aligned}$$

Se a variável t representa *tempo*, $f(t)$ e $g(t)$ estarão no domínio do tempo e suas transformadas estarão no domínio da frequência. Pelo teorema da convolução, o produto entre elas resulta numa função cuja transformada é a convolução das transformadas de $f(t)$ e $g(t)$. Em outras palavras, multiplicação no tempo equivale a convolução na frequência. Similarmente, multiplicação na frequência equivale a convolução no tempo. Uma demonstração do teorema da convolução pode ser encontrada em Brigham (1974).

Análise de erros

Como afirma Calenzani (2002), os erros decorrentes da utilização da transformada discreta de Fourier, em vez da transformada clássica, podem não apenas estar associados somente às aproximações feitas quando se substitui as integrais por somatórios. Existem realmente erros que são *inerentes* ao processo de obtenção de N pontos discretos da função original, ao truncamento e à obtenção de N pontos discretos na função transformada.

Segundo Meirovitch e Calenzani (2002), a derivação das transformadas discretas de Fourier envolve três passos: discretização no domínio do tempo, truncamento no domínio do tempo e discretização no domínio da frequência. Todo o processo de transformação de uma função contínua do tempo em uma função equivalente discretizada está mostrado na Figura 1.

Seja, agora, uma função $f(t)$ qualquer e sua transformada direta $F(\omega)$, de acordo com a Figura 1 (a). Seja $\Delta_0(t)$ uma função definida como um trem de impulsos unitários separados por um intervalo Δt e $\bar{\Delta}_0(\omega)$ sua transformada direta (Figura 1 (b)). E seja, também, $x(t)$ uma função definida como valendo 1 num intervalo de comprimento $T = N\Delta t$ (que engloba, portanto, N impulsos) e 0 nos demais pontos, e sua transformada direta $X(\omega)$, como a Figura 1 (d) indica. Por último, seja $\Delta_1(t)$ uma função semelhante à função $\Delta_0(t)$, porém, com impulsos de amplitude igual

a $\frac{T}{2\pi}$ e separados por um intervalo T . Ela e sua transformada direta $\bar{\Delta}_1(\omega)$ são mostradas na Figura 1 (f).

A primeira parte do processo de discretização é a discretização no domínio do tempo. Faz-se isso multiplicando a função $f(t)$ pela função $\Delta_0(t)$. Logo, pelo teorema da convolução, a transformada de Fourier da função resultante é a convolução das funções $F(\omega)$ e $\bar{\Delta}_0(\omega)$. Os resultados das duas operações estão na Figura 1 (c). O resultado no domínio do tempo é um trem de impulsos com amplitude modulada pela função $f(t)$, e no domínio da frequência, é a superposição da função $F(\omega)$ repetida em intervalos iguais a $\Delta\omega = 2\pi/\Delta t$. Isso gera a primeira fonte de erros, o fenômeno de *aliasing*, que é a contaminação entre um período e outro no espectro de frequências.

A segunda parte é o truncamento, que é a multiplicação da função $f(t)\Delta_0(t)$ pela função $x(t)$. Da mesma maneira, faz-se a convolução entre as funções $F(\omega) * \bar{\Delta}_0(\omega)$ e $X(\omega)$ e o resultados estão na Figura 1 (e). No domínio da frequência, ocorrem mais erros devido ao efeito *rippling*, que são as ondulações que surgem no espectro, por causa da convolução efetuada.

A terceira parte é a discretização no domínio da frequência. Dessa vez, é feita uma multiplicação no domínio da frequência entre as funções $F(\omega) * \bar{\Delta}_0(\omega) * X(\omega)$ e $\bar{\Delta}_1(\omega)$. Conseqüentemente, é feita uma convolução entre as funções $f(t)\Delta_0(t)x(t)$ e $\Delta_1(t)$, e o resultado final da discretização é mostrado na Figura 1 (g). Nessa última parte, a função no domínio do tempo se torna periódica e, no domínio da frequência, ela se torna discretizada. A escolha do intervalo entre os impulsos da função $\bar{\Delta}_1(\omega)$ como sendo igual a $2\pi/T$ é proposital, e faz com que os impulsos da função $\Delta_1(t)$ sejam espaçados em exatamente $T = N\Delta t$. Por isso, nessa etapa, não ocorre o efeito de *aliasing* no domínio do tempo.

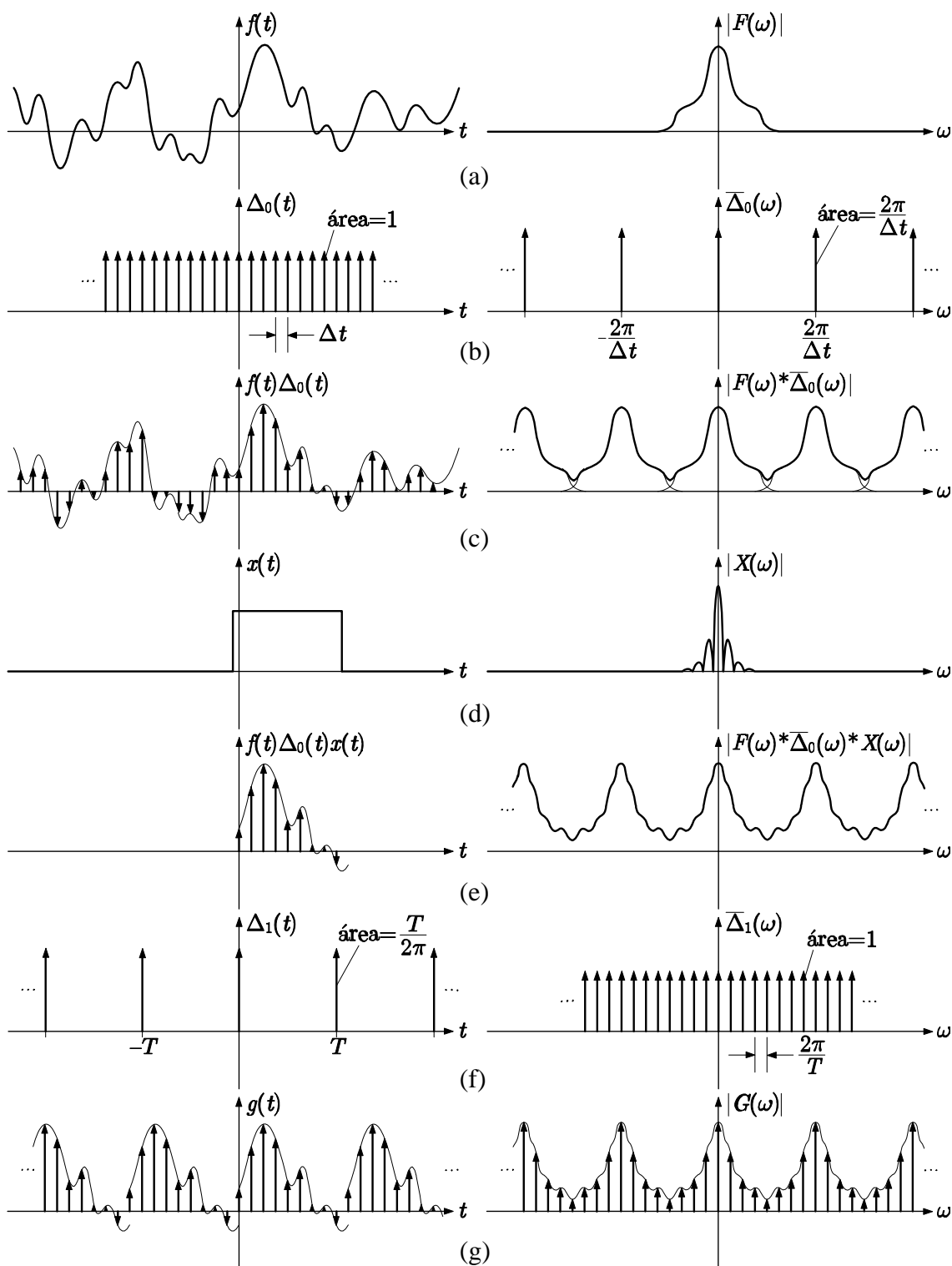


Figura 1: As etapas de discretização de uma função e de sua transformada.

Comparando as Figuras 1 (a) e 1 (g), vê-se que a discretização de $f(t)$ não difere da função original, a menos de uma constante, enquanto que a discretização de $F(\omega)$ é ligeiramente diferente de $G(\omega)$. Isso mostra que trabalhar com pontos discretos, em vez de com funções contínuas, induz a

erros, originados dos efeitos de *aliasing* e *rippling*. Para minimizar o efeito de *aliasing*, deve-se tomar a função $\Delta_0(t)$ com impulsos unitários mais próximos, ou seja, deve-se tomar valores pequenos de Δt . Com isso, os impulsos da função $\bar{\Delta}_0(\omega)$ estarão mais afastados, e ocorrerá menor interferência entre as frequências de um período e outro. Para minimizar o efeito *rippling*, deve-se fazer a função $x(t)$ englobar o maior número de pontos possível, ou seja, deve-se tomar valores grandes de N . Assim, a função $X(\omega)$ estará mais próxima de uma função impulso unitário, e menor influência ela terá na convolução do processo de truncamento. A relação que existe entre as funções discretizadas da Figura 1 (g) é análoga à relação que existe entre as funções contínuas da Figura 1 (a). Enquanto que as últimas se relacionam pelas transformadas de Fourier, as primeiras se relacionam pelas transformadas discretas de Fourier, dadas pelas Eqs. (3) e (4).

Análise dinâmica de sistemas com um grau de liberdade

Para sistemas com um grau de liberdade, o procedimento adotado é o de supor toda a sua massa m concentrada em um único ponto, que pode se deslocar no mesmo sentido do grau de liberdade permitido pelo sistema. Como esse deslocamento acontece em uma única direção, pode-se expressá-lo por uma função escalar $v(t)$, que pode assumir valores positivos ou negativos, significando deslocamentos no mesmo sentido ou contrários a um dado referencial. A variável t representa o tempo, e as derivadas $\dot{v}(t)$ e $\ddot{v}(t)$ da resposta são, respectivamente, a *velocidade* e a *aceleração* do sistema.

A *rigidez* é representada pela constante elástica k , expressa em unidade de força por unidade de distância. Assume-se que essa rigidez obedece à lei de Hooke, ou seja, exerce seu efeito por uma força de intensidade diretamente proporcional, com mesma direção e sentido oposto ao *deslocamento* do sistema. Matematicamente, temos $f_S = -kv(t)$.

O *amortecimento* do sistema é representado pela constante de amortecimento viscoso c , expressa em unidade de força por unidade de velocidade. Este é uma aproximação do arraste com o meio em que o sistema está imerso (na grande maioria das vezes, o ar), juntamente com o atrito generalizado de suas partes internas. Assim, é expressa por uma força de intensidade diretamente proporcional, com mesma direção e sentido oposto à *velocidade* do sistema, ou seja, $f_D = -c\dot{v}(t)$.

A carga dinâmica que atua no sistema é expressa por uma função escalar $p(t)$, atuante na massa m e na mesma direção do deslocamento a ela permitido.

A Figura 2 mostra um diagrama de corpo livre da massa do sistema. As forças que nela atuam são o carregamento $p(t)$, a força elástica $f_s(t)$ e a força de amortecimento $f_D(t)$. Aplicando a segunda lei de Newton à massa m e rearrumando, fica:

$$\begin{aligned}\sum F &= m\ddot{v}(t) \\ p(t) - kv(t) - c\dot{v}(t) &= m\ddot{v}(t) \\ m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) &= p(t)\end{aligned}\tag{6}$$

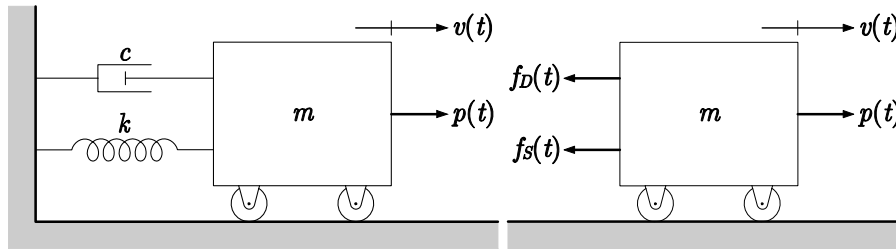


Figura 2: Modelo para sistema SDOF e diagrama de corpo livre da massa m .

A Eq. (6) é uma equação diferencial de segunda ordem em $v(t)$ que *rege* o deslocamento do sistema em função do tempo. É a equação fundamental dos sistemas de um grau de liberdade (1GL), e por isso é chamada *equação do movimento*. Sua solução $v(t)$ é a resposta do sistema e é a incógnita a ser encontrada, por qualquer método que se queira.

Solução da equação do movimento

O modo clássico de se resolver a equação do movimento é com o uso da transformada de Fourier. Simbolizando o operador da transformada por \mathcal{F} , pode-se aplicá-la a ambos os membros da Eq. (6) e fazer as seguintes arrumações:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t)\} &= \mathcal{F}\{p(t)\} \\ m\mathcal{F}\{\ddot{v}(t)\} + c\mathcal{F}\{\dot{v}(t)\} + k\mathcal{F}\{v(t)\} &= P(\bar{\omega}) \\ -\bar{\omega}^2 m\mathcal{F}\{v(t)\} + i\bar{\omega}c\mathcal{F}\{v(t)\} + k\mathcal{F}\{v(t)\} &= P(\bar{\omega}) \\ -\bar{\omega}^2 mV(\bar{\omega}) + i\bar{\omega}cV(\bar{\omega}) + kV(\bar{\omega}) &= P(\bar{\omega}) \\ (-\bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega}c + k)V(\bar{\omega}) &= P(\bar{\omega}) \\ V(\bar{\omega}) &= \frac{1}{-\bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega}c + k} P(\bar{\omega}) \\ V(\bar{\omega}) &= H(\bar{\omega})P(\bar{\omega})\end{aligned}\tag{7}$$

Na Eq. (7), as transformadas fazem a mudança de domínio e, conseqüentemente, de variável independente. Foi escolhida a variável $\bar{\omega}$ (em vez de simplesmente ω) para representar o domínio da frequência, para diferenciá-la da frequência natural do sistema $\omega = \sqrt{k/m}$. Foi definida ainda a *função complexa de resposta na frequência*, representada por $H(\bar{\omega})$ e dada por:

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{-\bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega}c + k} \quad (8)$$

Agora notemos que a Eq. (7) já é a resposta do sistema ao carregamento $p(t)$, só que expressa no domínio da frequência. Para encontrar a resposta no domínio do tempo, deve-se aplicar a transformada inversa de Fourier, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \\ v(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\bar{\omega}) P(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \end{aligned} \quad (9)$$

Em resumo, o procedimento para encontrar a resposta com o uso da transformada de Fourier é, inicialmente, encontrar a transformada de Fourier do carregamento $p(t)$, multiplicá-lo pela função complexa de resposta na frequência $H(\bar{\omega})$ e encontrar a transformada inversa de Fourier desse produto.

A verdadeira vantagem no uso da transformada de Fourier para resolver a equação do movimento está no uso de sua forma discreta, a DFT. Com $p(t)$ expresso na forma de pontos discretos, as formas equivalentes às Eqs. (7) e (9) com o uso da DFT são, respectivamente:

$$P(\bar{\omega}_m) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} p(t_n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}, m = 0, \dots, N-1 \quad (10)$$

$$v(t_n) = \frac{\Delta \bar{\omega}}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} H(\bar{\omega}_m) P(\bar{\omega}_m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}}, n = 0, \dots, N-1 \quad (11)$$

Como já foi visto, uma consequência inerente ao processo de discretização de $p(t)$ e $v(t)$ é a periodização de ambas. Por isso, deve-se escolher um período T_p para o truncamento destas, que será chamado tempo estendido. Naturalmente, N é o número de pontos em que o tempo estendido será dividido, $\Delta t = T_p/N$ é o intervalo de separação entre os pontos discretos no tempo e $\Delta \omega = 2\pi/T_p$ é o intervalo de separação entre os pontos discretos na frequência.

Um método para correção da resposta permanente

A escolha de um tempo estendido adequado é essencial para garantir uma boa precisão na resposta permanente final. Porém, dependendo dos parâmetros do sistema e da precisão que se busca alcançar, um valor adequado pode ser relativamente grande, e isso pode significar um esforço computacional muito alto, requerendo um tempo maior de cálculo.

Além disso, o aumento do tempo estendido apenas permite um livre retorno do sistema ao repouso e, grande parte das vezes, o ponto de interesse que se pretende analisar está nos momentos iniciais da aplicação do carregamento. Nessas situações, a maior parte da resposta é calculada mas não é útil para análise, constituindo um esforço de cálculo “inútil”.

Utilizar um tempo estendido menor, no entanto, fará a resposta permanente encontrada diferir excessivamente da resposta transiente. Veletsos e Ventura (1984, 1985) apresentam um método para corrigir uma resposta permanente calculada por DFT com um tempo estendido qualquer, e aproximá-la da resposta transiente.

O método se baseia no fato de que, uma vez que o carregamento é o mesmo tanto para a resposta transiente quanto para a permanente, então a diferença entre elas deve se originar de diferenças entre os estados iniciais das duas respostas. Da mesma forma, se uma resposta for conhecida, a outra pode ser determinada pela superposição de uma resposta (em vibração livre) chamada *corretiva*, que assegura que o estado inicial da resposta permanente se conformará ao da transiente.

Se chamarmos $v_s(t)$ a resposta permanente obtida pela DFT então a resposta transiente $v_t(t)$ pode ser determinada por:

$$v_t(t) = v_s(t) + \zeta(t)$$

Onde $\zeta(t)$ é a resposta corretiva que representa o efeito das condições iniciais não satisfeitas.

Ainda segundo Veletsos e Ventura (1984, 1985), dois métodos podem ser utilizados para calcular $\zeta(t)$. No primeiro, esta é expressa em termos das funções unitárias transientes de resposta, enquanto que, no segundo, esta é expressa em termos das funções unitárias permanentes de resposta. Essas funções serão explicadas a seguir:

Resposta corretiva em termos das funções transientes de resposta

As *funções unitárias de resposta* são funções que representam a resposta exata de um sistema em vibração livre a um deslocamento inicial unitário (representada por $g(t)$) e a uma velocidade inicial unitária (representada por $h(t)$), respectivamente. Dependendo do amortecimento, são determinadas pela substituição, nas expressões da solução geral analítica², de $v(0) = 1$ e $\dot{v}(0) = 0$ para encontrar $g(t)$ ou de $v(0) = 0$ e $\dot{v}(0) = 1$ para encontrar $h(t)$.

Fazendo as substituições na expressão da solução geral para o caso mais comum de amortecimento, que é o subcrítico, o resultado é: (lembrando que $\omega = \sqrt{k/m}$ é a frequência natural de vibração do sistema, $\xi = \frac{c}{2m\omega}$ é a taxa de amortecimento do sistema e $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ é a frequência natural do sistema amortecido.)

$$g(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\cos \omega_D t + \frac{\xi\omega}{\omega_D} \sin \omega_D t \right]$$

$$h(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{1}{\omega_D} \sin \omega_D t \right]$$

Os gráficos de $g(t)$ e $h(t)$ estão mostrados na Figura 3.

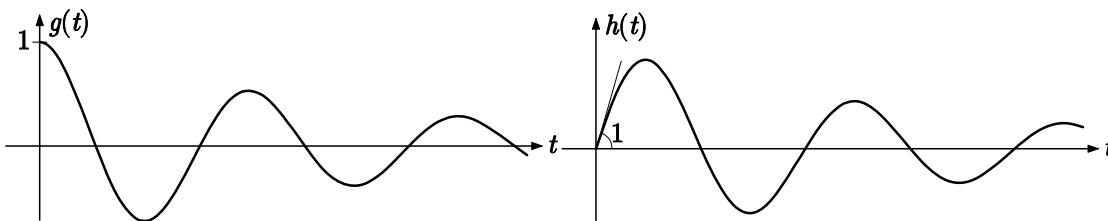


Figura 3: Funções unitárias transientes de resposta $g(t)$ e $h(t)$.

A função corretiva seria, portanto, uma combinação linear de $g(t)$ e $h(t)$, ou seja:

$$\zeta(t) = ag(t) + bh(t)$$

As constantes a e b devem ser determinadas a partir das condições iniciais obtidas em $v_s(t)$ e das condições iniciais pretendidas para a resposta transiente $v_t(t)$ (geralmente nulas), ou seja:

² Ver, por exemplo, as eqs. (3.29), (3.23), (3.24) e (3.25) apresentadas por Camargo (2008).

$$v_t(0) = v_s(0) + \zeta(0) \quad \text{e} \quad \dot{v}_t(0) = \dot{v}_s(0) + \dot{\zeta}(0)$$

Substituindo os valores de $\zeta(t)$ e $\dot{\zeta}(t) = a\dot{g}(t) + b\dot{h}(t)$, temos o sistema:

$$\begin{cases} v_t(0) = v_s(0) + ag(0) + bh(0) \\ \dot{v}_t(0) = \dot{v}_s(0) + a\dot{g}(0) + b\dot{h}(0) \end{cases}$$

Cuja solução, sabendo-se que $g(0) = \dot{h}(0) = 1$ e $\dot{g}(0) = h(0) = 0$, é:

$$a = v_t(0) - v_s(0) \quad \text{e} \quad b = \dot{v}_t(0) - \dot{v}_s(0)$$

Finalmente, no caso em que as condições iniciais pretendidas para $v_t(t)$ são nulas, fica:

$$a = -v_s(0) \quad \text{e} \quad b = -\dot{v}_s(0)$$

Resposta corretiva em termos das funções permanentes de resposta

As funções $g(t)$ e $h(t)$ são chamadas funções unitárias *transientes* de resposta porque descrevem a resposta *transiente* de um sistema a condições iniciais unitárias. De modo semelhante, as funções unitárias *permanentes* de resposta descrevem a resposta de um sistema em vibração livre a uma série periódica de variações unitárias de deslocamento e a uma série periódica de variações unitárias de velocidade. Essas funções são representadas por $\bar{g}(t)$ e $\bar{h}(t)$, respectivamente.

Além disso, o período entre as variações unitárias de deslocamento e velocidade é igual ao período utilizado no cálculo de $v_s(t)$ pela DFT. É importante notar que embora $\bar{g}(t)$ sofra variações unitárias de deslocamento, ela não necessariamente terá condição inicial de deslocamento $\bar{g}(0) = 1$. Da mesma maneira, embora $\bar{h}(t)$ sofra variações unitárias de velocidade, ela não necessariamente terá condição inicial de velocidade $\bar{h}(0) = 1$.

A função $\bar{g}(t)$ pode ser encontrada substituindo-se, nas expressões da solução geral analítica, as seguintes condições iniciais:

$$v_c(0) - v_c(T_p) = 1 \quad \text{e} \quad \dot{v}_c(0) - \dot{v}_c(T_p) = 0$$

Já $\bar{h}(t)$ pode ser encontrada da mesma maneira, porém com as seguintes condições iniciais:

$$v_c(0) - v_c(T_p) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{v}_c(0) - \dot{v}_c(T_p) = 1$$

Em seguida, troca-se $v_c(t)$ por $\bar{g}(t)$ ou $\bar{h}(t)$, conforme o caso. Veletsos e Ventura (1984) apresentam $\bar{g}(t)$ e $\bar{h}(t)$ apenas para amortecimento subcrítico. As respostas são:

$$\begin{aligned}\bar{g}(t) &= \frac{e^{-\xi\omega t}}{\Delta} \left[1 - e^{-\xi\omega T_p} \left(\cos \omega_D T_p - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D T_p \right) \right] \cos \omega_D t + \\ &+ \frac{e^{-\xi\omega t}}{\Delta} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - e^{-\xi\omega T_p} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos \omega_D T_p + \sin \omega_D T_p \right) \right] \sin \omega_D t \\ \bar{h}(t) &= \frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega_D \Delta} \left[(e^{-\xi\omega T_p} \sin \omega_D T_p) \cos \omega_D t + (1 - e^{-\xi\omega T_p} \cos \omega_D T_p) \sin \omega_D t \right]\end{aligned}$$

Para as quais:

$$\Delta = 1 + e^{-2\xi\omega T_p} - 2e^{-2\xi\omega T_p} \cos \omega_D T_p$$

Os gráficos de $\bar{g}(t)$ e $\bar{h}(t)$ estão mostrados na Figura 4.

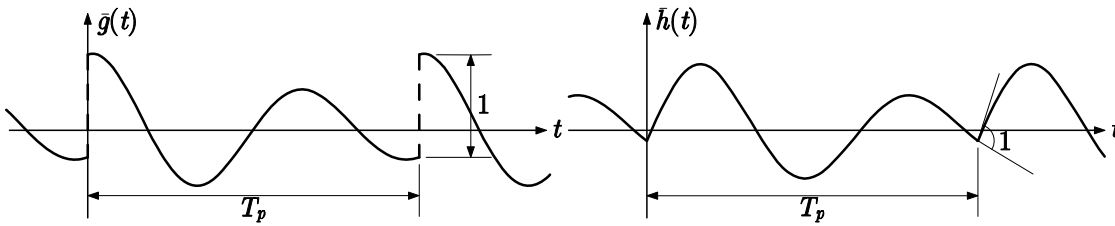


Figura 4: Funções unitárias estacionárias de resposta $\bar{g}(t)$ e $\bar{h}(t)$.

Neste segundo método, a resposta corretiva $\zeta(t)$ é expressa como uma combinação linear de $\bar{g}(t)$ e $\bar{h}(t)$, ou seja:

$$\zeta(t) = \bar{a}\bar{g}(t) + \bar{b}\bar{h}(t)$$

E, similarmente ao primeiro método, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} v_t(0) = v_s(0) + \bar{a}\bar{g}(0) + \bar{b}\bar{h}(0) \\ \dot{v}_t(0) = \dot{v}_s(0) + \bar{a}\dot{\bar{g}}(0) + \bar{b}\dot{\bar{h}}(0) \end{cases}$$

Porém, agora não se pode simplificar $\bar{g}(0)$, $\bar{h}(0)$, $\dot{\bar{g}}(0)$ e $\dot{\bar{h}}(0)$, e a solução do sistema virá da solução da equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{g}(0) & \bar{h}(0) \\ \dot{\bar{g}}(0) & \dot{\bar{h}}(0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_t(0) - v_s(0) \\ \dot{v}_t(0) - \dot{v}_s(0) \end{Bmatrix}$$

Caso o amortecimento do sistema seja crítico, as funções $\bar{g}(t)e\bar{h}(t)$ serão dadas por:

$$\bar{g}(t) = \frac{e^{-\omega(t+T_p)}}{\Delta} [(e^{\omega T_p} - 1)(1 + \omega t) + \omega T_p]$$

$$\bar{h}(t) = \frac{e^{-\omega(t+T_p)}}{\Delta} [T_p + t(e^{\omega T_p} - 1)]$$

Onde:

$$\Delta = 1 + e^{-2\omega t} - 2e^{-\omega t}$$

Exemplos numéricos

Reservatório sob rajada de vento

A Figura 5 mostra um desenho esquemático de um reservatório elevado. A forma da estrutura é tal que permite apenas deslocamentos horizontais na direção indicada por $v(t)$ na figura. Logo, a estrutura pode ser representada por um sistema com um grau de liberdade.

A massa do reservatório é $m = 10 \text{ t} = 10000 \text{ kg}$. A rigidez lateral total dos pilares de sustentação é $k = 40000 \text{ kN/m}$ e o coeficiente de amortecimento viscoso da estrutura é $c = 120 \text{ kNs/m}$. Para simular o efeito de uma rajada de vento lateral na estrutura, será considerada a aplicação do carregamento transiente mostrado na Figura 5, que atua durante 0,05 s, com um pico de 400 kN.

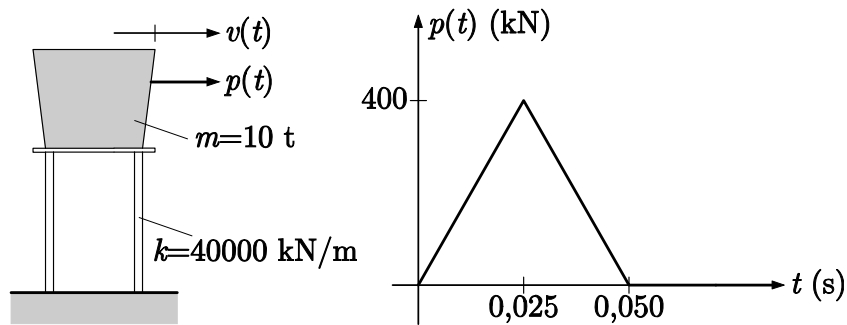


Figura 5: Representação do reservatório e carregamento atuante.

Inicialmente, foi feita uma comparação entre as respostas obtidas no domínio do tempo (integral de Duhamel) e no domínio da frequência, usando a DFT e a ImFT³. Em todos os procedimentos, o intervalo de tempo utilizado foi $\Delta t = 0,0025$ s. O tempo estendido adotado foi $T_p = 1,28$ s, e, portanto, o número de pontos discretos no tempo é $N = 512$. No procedimento ImFT, foi usado $S = 160$, de modo que somente o primeiro 0,4 segundo fosse calculado, pois é nesse intervalo de tempo que se espera encontrar os maiores deslocamentos. Nos demais procedimentos, a resposta foi calculada em todos os pontos, mas somente os 160 primeiros são mostrados na resposta, para comparação.

As respostas são mostradas na Figura 6. Como se pode ver, as respostas são praticamente coincidentes.

Nota-se pelas respostas que as condições iniciais nulas foram bem representadas pelas três formulações. Particularmente no uso da DFT, isso se deveu ao fato de que o tempo estendido $T_p = 1,28$ s é suficiente para o retorno quase total do sistema ao repouso, ou seja, T_p foi escolhido adequadamente.

Agora vejamos como seria a resposta obtida por DFT caso o tempo estendido fosse dividido em $N = 105$ pontos, ao invés de $N = 512$ pontos. Mantendo-se o mesmo intervalo de tempo $\Delta t = 0,0025$ s, o período estendido seria $T_p = 0,2625$ s. A resposta estacionária obtida é mostrada em linha preta na Figura 7. Nota-se que a periodização induzida pela DFT faz com que o sistema apresente um substancial desvio das condições iniciais nulas, e, por causa disso, toda a resposta difere da resposta mostrada na Figura 6, obtida com a escolha de um tempo estendido adequado.

Pode-se utilizar, assim, o método proposto por Veletsos e Ventura para correção desta resposta estacionária e obter a resposta transiente correspondente. Utilizando a resposta corretiva em termos das funções transientes de resposta, é obtida a resposta mostrada em linha cinza (marcada com X) na Figura 7. Como se pode ver, a resposta corrigida é muito mais próxima à resposta correta mostrada na Figura 6.

³ Do inglês *implicit Fourier transform*, ou *transformada implícita de Fourier*. Uma breve explanação é apresentada por Camargo (2008).

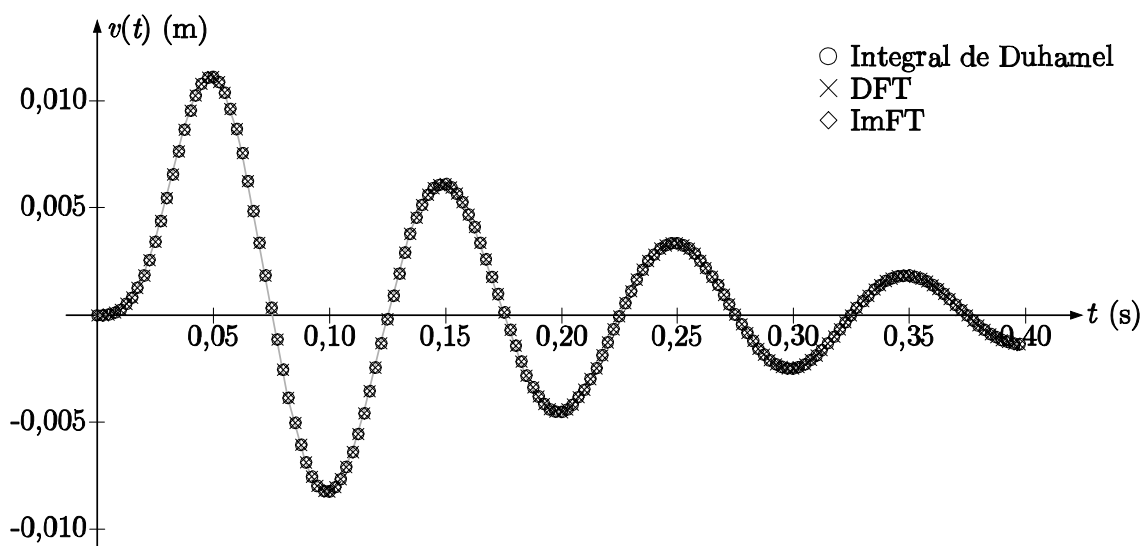


Figura 6: Comparação entre respostas obtidas pelo método da integral de Duhamel, DFT e ImFT.

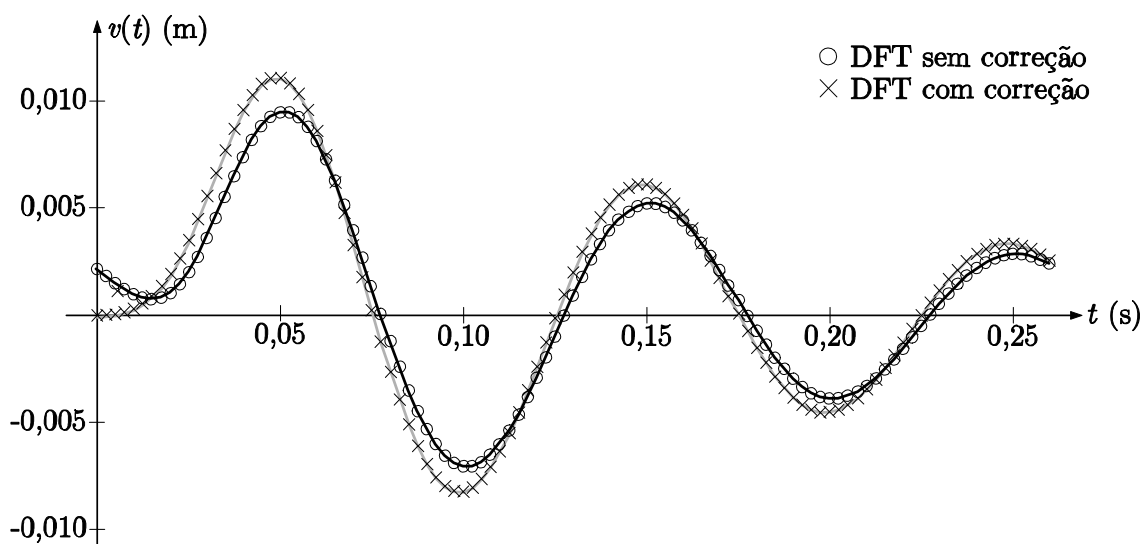


Figura 7: Comparação entre respostas obtidas pela DFT com e sem a correção proposta por Veletsos e Ventura.

Pórtico discretizado por elementos finitos

Analisemos agora o pórtico mostrado na Figura 9. Trata-se de um pórtico com 6 m de largura e 3 m de altura, com duas cargas pontuais atuando. Faz-se a discretização deste em elementos finitos, como mostra a Figura 9. Suas propriedades físicas são mostradas na Tabela 2.

Tabela2: Propriedades físicas do pórtico da Figura 9.

$\bar{m} = 238 \text{ kg/m}$	massa por unidade de comprimento dos elementos.
$A = 0,0303 \text{ m}^2$	área da seção transversal dos elementos.
$I_z = 0,000592 \text{ m}^4$	momento de inércia da seção transversal dos elementos, para um eixo perpendicular ao plano do pórtico, passando pelo centro de gravidade da seção transversal dos elementos.
$E = 205 \text{ GPa}$	módulo de elasticidade longitudinal do material dos elementos.
$N = 69$	número de graus de liberdade do sistema.

A matriz de rigidez do pórtico foi montada e foi criada uma matriz de massa do tipo concentrada. Utilizou-se uma matriz de amortecimento proporcional, com amortecimento de 10% para o 1º e 48º modos.

A fim de explorar o método da superposição modal para carregamentos transientes, o sistema foi resolvido para a combinação de carregamentos $p_1(t)$ e $p_2(t)$, mostrada na Figura 10. Inicialmente, foi obtida a resposta no domínio do tempo, pelo método da integral de Duhamel.

Foi utilizado um intervalo de tempo $\Delta t = 0,002 \text{ s}$, e os deslocamentos horizontal e vertical do nó central do pórtico (nó A da Figura 9), calculados para o primeiro 0,4 s (ou seja, para os primeiros 200 pontos) são mostrados na Figura 11.

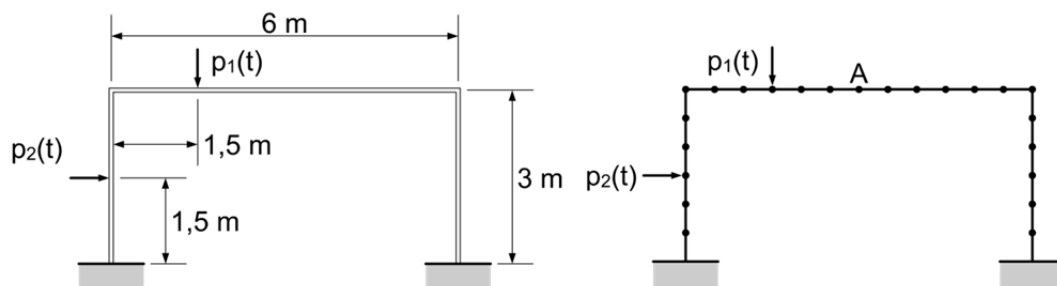


Figura 9: Representação do pórtico com carregamento e sua discretização em elementos finitos.

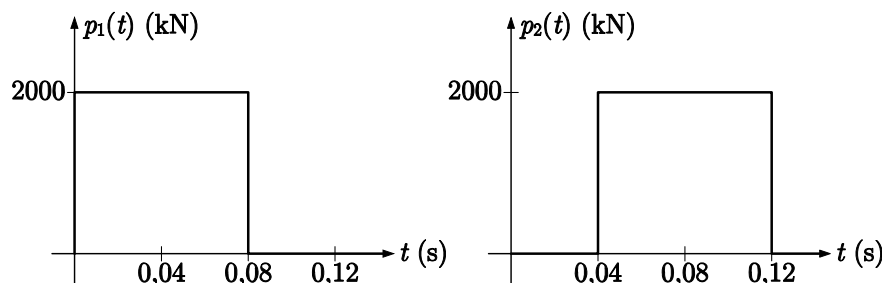


Figura 10: Combinação de carregamentos analisada.

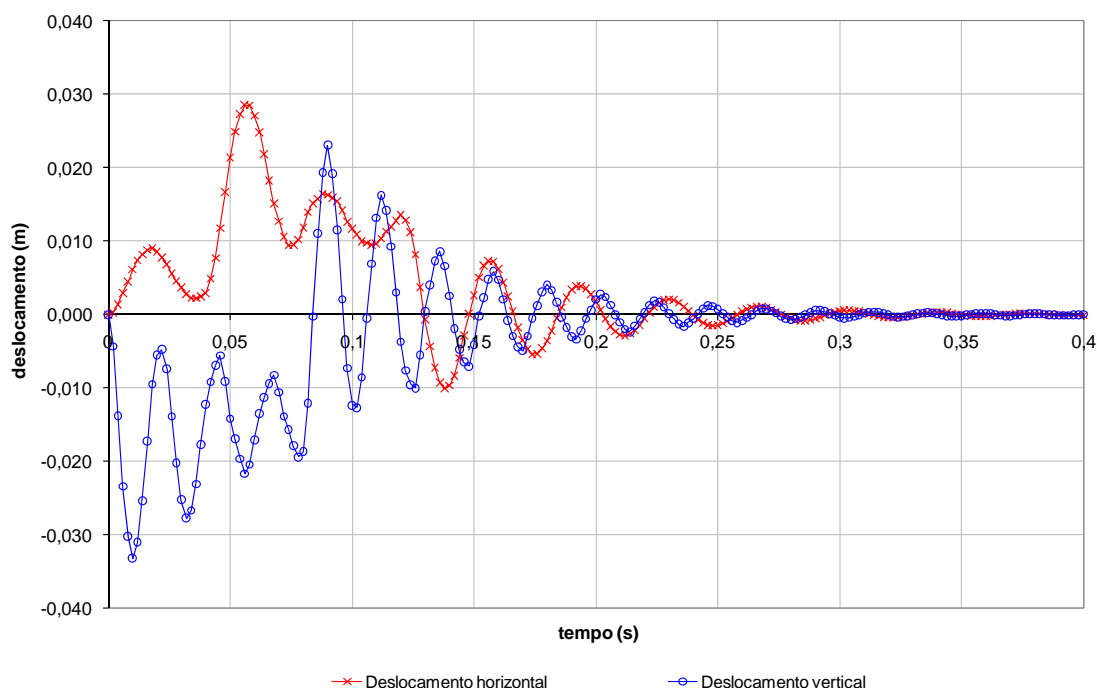


Figura 11: Resposta do nó central do pórtico aos carregamentos da Figura 10.

Nota-se que, assim como no exemplo anterior, o tempo estendido utilizado é suficiente para o retorno do sistema às condições iniciais nulas, o que o tornaria adequado também para uma análise no domínio do tempo pela DFT.

Entretanto, para demonstrar a aplicação da correção proposta por Veletsos e Ventura, o sistema é resolvido também pela DFT com um tempo estendido menor $T_p = 0,136$ s. Mantendo o intervalo de tempo $\Delta t = 0,002$ s, o número de pontos é agora $N = 68$. Os deslocamentos obtidos para o nó A são mostrados na Figura 12.

Pode-se ver que, nesse exemplo com múltiplos graus de liberdade, o tempo estendido demasiadamente pequeno também induz as condições iniciais nulas a não serem atendidas. Isso faz as respostas obtidas diferirem substancialmente das respostas mostradas na Figura 11. Essa diferença é bastante evidenciada nos valores dos pontos de deslocamentos máximos e mínimos das oscilações.

Como o sistema de múltiplos graus de liberdade é reduzido a vários sistemas de um grau de liberdade, a correção proposta por Veletsos e Ventura pode ser feita sobre as respostas obtidas desses sistemas, da forma mostrada no exemplo anterior, que tem um grau de liberdade.

Por fim, o sistema é resolvido utilizando a correção e os deslocamentos horizontal e vertical são mostrados na Figura 12, sobrepostos às respostas obtidas sem correção. Como se pode ver, a resposta corrigida é muito mais próxima à resposta correta mostrada na Figura 11.

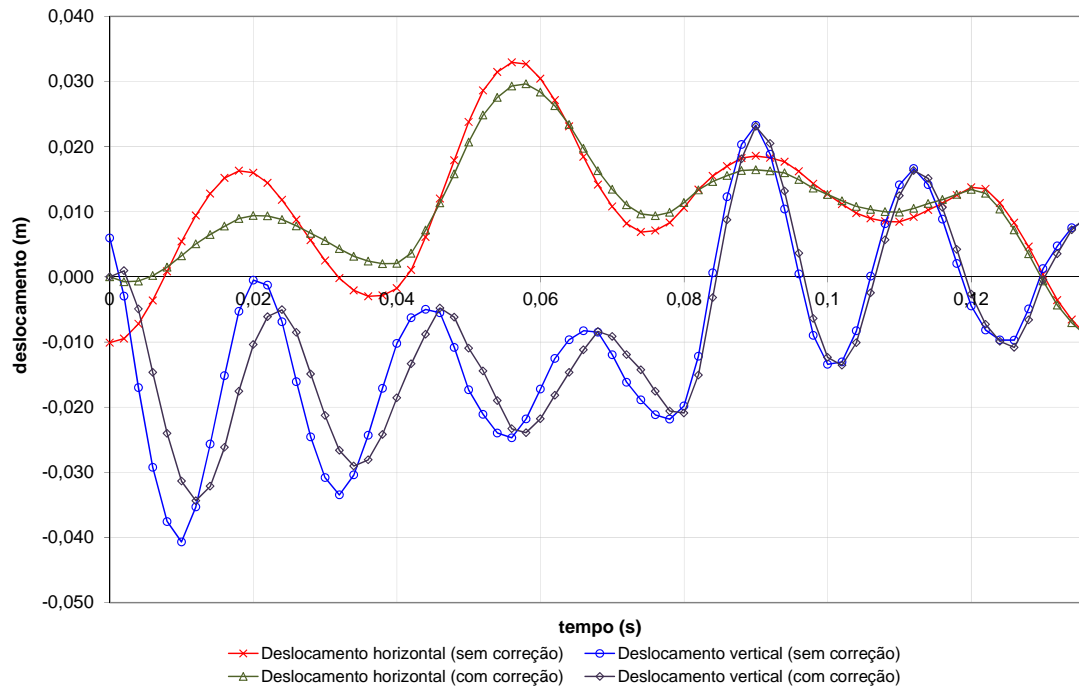


Figura 12: Respostas obtidas para o nó central, com e sem a correção proposta por Veletsos e Ventura.

Conclusões

Este trabalho apresentou dois algoritmos eficientes para correção de erro das soluções da análise no domínio da frequência de sistemas estruturais com um ou múltiplos graus de liberdade.

Após uma exposição da formulação matemática para análise dinâmica de sistemas com um grau de liberdade, foi apresentado o método descrito por Veletsos e Ventura (1984, 1985) para correção da resposta estacionária obtida pela DFT. Foi demonstrado como, dependendo de fatores como o intervalo de discretização ou a escolha do tempo estendido, esta resposta pode diferir da resposta exata. Foi mostrado como a correção desta resposta pode ser feita em termos das funções unitárias transientes de resposta ou das funções unitárias estacionárias de resposta.

A alta eficiência deste algoritmo foi demonstrada através de exemplos numéricos, nos quais a resposta obtida por DFT com um tempo estendido pequeno demais é corrigida e comparada à

resposta obtida com um tempo estendido adequado, além de comparada também às respostas obtidas por outros métodos, como através da integral de Duhamel.

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES, CNPq e FAPES pelo apoio recebido durante o desenvolvimento dessa pesquisa.

Referências

BRIGHAM, E. O., 1974. The fast Fourier transform. Prentice-Hall.

CALENZANI, A. F. G., 2002. Análise dinâmica no domínio da frequência de sistemas com amortecimento não clássico. Dissertação (mestrado). Universidade Federal do Espírito Santo.

CAMARGO, R. S., 2008. Técnicas Eficientes de Correção de Erros na Análise Dinâmica de Estruturas no Domínio da Frequência. Dissertação (mestrado). Universidade Federal do Espírito Santo.

VELETSOS, A. S.; VENTURA, C. E., 1984. Efficient analysis of dynamic response of linear systems. Earthquake engineering and structural dynamics, v. 12, n. 4, p. 521-536.

VELETSOS, A. S.; VENTURA, C. E., 1985. Dynamic analysis of structures by the DFT method. Journal of structural engineering, v. 111, n. 12, p. 2625-2642.

Efficient algorithms for error correction in frequency domain dynamic analysis of structural systems

Abstract

This work presents efficient algorithm available in literature to evaluate the response of structural systems subjected to dynamic loads by means of a method which uses a corrective function to find the transient response based on the stationary response given by the discrete Fourier transform (DFT). Because the DFT involves a discretization, it induces errors in the initial conditions, and this procedure aims to correct these errors. Two formulations are presented. The first is in terms of the system responses to initial displacement and speed, and the second is in terms of the responses to a transient displacement and to a transient speed changes. This formulation was generalized to multiple degree of freedom systems, using modal superposition, in which a system with N degrees of freedom is decoupled into N single degree of freedom systems. Numerical applications were solved both in single and multiple degrees of freedom, involving some dynamic loadings.

Keywords: Frequency domain analysis. Fourier transform. Convolution theorem. Efficient algorithms.

Introduction

The response of a structural system (such as a tower or a building) to a given load depends on several factors, and mainly on the loading itself. For periodic (cyclic) loadings, the calculation of the discrete Fourier transform (DFT) using the fast Fourier transform (FFT) algorithm is extremely powerful, both in precision and speed. A periodic loading implies a periodic (stationary) response and, because of that, both can be easily analyzed in terms of their Fourier transforms, which, expressed in discrete form, can be efficiently calculated using the FFT.

In the case of a non-periodic (transient) loading, the response of a system will be also non-periodic, which makes it difficult to be analyzed in terms of its Fourier transforms. Using the FFT will generate, because of that, a periodization in both, with an arbitrary period. In other words, this means that, when the FFT is used to find the response to a transient loading, it will not return the response to the original loading, but to a periodized version of it instead. The original loading should be truncated at some point, beyond which it will repeat indefinitely. Of course the response obtained to this induced loading is not equal to the real system response to the original loading. It can be seen also that the response to the induced loading is also going to be periodic, while the response to the original loading is going to be transient. Even though, at least inside the interval of a truncated period,

it is possible to make the obtained response as near as possible to the real response, as long as specific care is taken.

In engineering, normally transient loadings may occur in a form similar to pulses, i.e. applied during a given time and then cease. After that, the structure is in free vibration and damps until rest. Besides that, it is common for the structure to have null initial conditions (null displacement and speed). One of the ways to minimize errors between the calculated and real responses is to use an extended time. It means defining to the induced period of the loading a sufficiently large value so that, after the loading vanishes, the structure has literally “enough time” to be damped until reaching again null initial conditions, before the next induced period comes. The value of the extended time clearly depends on factors such as the rigidity and damping factor of the system or the loading effective duration, and there are several recommended possible values.

However, it may be required to use an excessively large extended time to ensure the return of the system to null initial condition until the next loading period. The discretization of the period given by the extended time might be not very refined, with few points, or adequately refined but with a large number of points. Besides that, the variable of interest is commonly the maximum displacement, which occurs not much later than the end of the loading and frequently a lot before the system reaches rest again. So, taking the response considerably after the end of the loading can be a waste of computational storage.

The problem is then to discuss an efficient way to find a sufficiently precise approximation of the transient response of a system to a given load, based on its corresponding stationary response, in a given period.

So, the objectives of the present paper are: review the procedures to find a transient response of linear systems using the classic DFT; examine the nature and magnitudes of the errors that might arise from its usage; present an efficient procedure, proposed by Veletsos and Ventura (1984, 1985), to calculate the transient response of a linear structure, based on its stationary response to a periodic extension of the original loading, using the superposition of a corrective function to the stationary response, effectively transforming it in the desired transient response; apply the proposed procedure also in the solution of the decoupled equations of movement in the formulation of the modal superposition method, in the solution of multiplexed degree of freedom systems; show the superiority of the presented procedure with numerical examples.

Conclusions

This work presented two efficient algorithms to correct errors in the solution of frequency domain analysis of structural systems with one or multiple degrees of freedom.

After describing the mathematical formulation for dynamic analysis of single degree of freedom systems, the method described by Veletsos and Ventura to correct the stationary response obtained by the DFT was presented. It was demonstrated how this response may differ from the exact response, depending on factors such as the discretization interval or the choice of the extended time. It was shown how the correction of this response can be made in terms of the transient unit response function or the stationary unit response functions.

The high efficiency of this algorithm was demonstrated by numerical examples, in which the response obtained by DFT with a short extended time is corrected and compared to that obtained with an adequate extended time. It is compared also to the responses obtained by other methods, including the Duhamel integral.