

Localización de deformaciones en estructuras geotécnicas utilizando el método del punto material

Francisco Zabala,¹ Rubén Rodari,² Luciano Oldecopi³

Trabalho recebido em 14/05/2004 e aprovado para publicação em 14/07/2004

Resumen

La formación de mecanismos de colapso en estructuras geotécnicas (taludes, presas de materiales sueltos, muros de sostenimiento, fundaciones superficiales o profundas, etc.), por lo general involucra el desarrollo de superficies de falla. Estas superficies son zonas en las que se genera una concentración o localización de deformaciones. Para modelar este tipo de problemas se han propuesto varios procedimientos de análisis numérico, generalmente basados en el método de los elementos finitos. El método del punto material, o MPM, se basa en una doble discretización del continuo analizado. Su implementación es sencilla, ya que utiliza tecnologías típicas del método de los elementos finitos. En el MPM, el continuo se representa como un conjunto inconexo de partículas que transportan todas las variables necesarias para definir el estado del continuo. La interacción entre las partículas se realiza en una malla de soporte, que puede ser fija e indeformable. En este trabajo se examina la capacidad del método del punto material para resolver problemas de localización de deformaciones en estructuras geotécnicas. Se exponen brevemente las hipótesis fundamentales del método, y se presentan ejemplos numéricos de casos típicos de mecanismos de colapso de estructuras geotécnicas obtenidas mediante la aplicación del MPM.

Palabras clave: localización de deformaciones, plasticidad, MPM, material-point method.

¹ Prof. Instituto de Investigaciones Antisísmicas "Ing. Aldo Bruschi", Universidad Nacional de San Juan. Avda. Libertador Oeste 1290 (5400), San Juan, Argentina. Tel: +54 264 4228123. E-mail: fzabala@unsj.edu.ar

² Prof. Instituto de Investigaciones Antisísmicas "Ing. Aldo Bruschi", Universidad Nacional de San Juan. Avda. Libertador Oeste 1290 (5400), San Juan, Argentina. Tel: +54 264 4228123. E-mail:

³ Prof. Instituto de Investigaciones Antisísmicas "Ing. Aldo Bruschi", Universidad Nacional de San Juan. Avda. Libertador Oeste 1290 (5400), San Juan, Argentina. Tel: +54 264 4228123. E-mail:

1. Introducción

Los mecanismos de falla en las estructuras geotécnicas suelen involucrar concentraciones de deformaciones y grandes desplazamientos en materiales cuyo comportamiento es marcadamente inelástico: deslizamientos de masas de suelo a lo largo de planos débiles, fallas de taludes, asentamientos de estructuras de fundación, etc. Todos estos mecanismos producen localización de deformaciones, y por lo tanto discontinuidades de desplazamientos y velocidades. El estudio y predicción de estos modos de falla es un tema de gran interés en la ingeniería estructural, particularmente en los análisis de la seguridad estructural, en los cuales se requiere conocer el comportamiento de las estructuras durante el colapso.

Aunque la predicción y la evaluación de los fenómenos de localización de deformaciones son fundamentales en el análisis del colapso de las estructuras geotécnicas, es raro encontrar métodos de cálculo precisos en la práctica habitual de la ingeniería (Arroyo, Diez and Huerta 1997). Habitualmente, los casos que involucran localización de deformaciones son evaluados mediante métodos de análisis del equilibrio límite, o aplicando los teoremas del colapso plástico de estructuras (Lancellotta 1995), que no son capaces de predecir la ubicación ni la forma de las superficies en las que se localizan las deformaciones. Además, estos métodos no proporcionan información sobre la deformación alcanzada en la falla. Por estas razones, los métodos numéricos surgen como la herramienta apropiada para estudiar con precisión el comienzo de la localización de deformaciones, y su evolución hasta la falla de una estructura.

Para modelar adecuadamente fenómenos en los que se manifieste localización de deformaciones plásticas, dos grandes dificultades deben ser superadas (Huang, Pastor and Zienkiewicz 1995). La primera de ellas atañe a los modelos constitutivos empleados. Estos modelos deben ser matemáticamente consistentes, lo que implica que deben ser capaces de describir el comportamiento del material de manera tal que no exista una dependencia patológica de la solución con el tamaño de la discretización adoptada. Esta dificultad se trata normalmente aplicando técnicas de regularización, que introducen un tamaño interno característico en las ecuaciones. La segunda dificultad es un problema de escalas: la región en la que se concentran las deformaciones es generalmente una banda angosta en comparación con el tamaño de la estructura modelada. La estrategia de análisis adoptada debe ser capaz de representar adecuadamente la zona en la que se concentran las deformaciones y aún así mantener la complejidad de la discretización en un nivel adecuado a la capacidad de cálculo disponible. Los modelos de elementos finitos utilizan varios procedimientos para analizar los problemas de localización de deformaciones sin introducir complejidades excesivas en las mallas empleadas. Estos procedimientos incluyen el uso de funciones de forma capaces de representar una discontinuidad en el campo de desplazamientos, y la generación automática de mallas adaptables, que capturan las discontinuidades mediante refinamiento de la discretización en la zona de localización de deformaciones. Las grandes deforma-

ciones que se producen en estas zonas introducen grandes distorsiones en los elementos de las mallas, que pueden provocar errores importantes en los análisis.

Los métodos de partículas no utilizan una malla de elementos para discretizar el continuo y por este motivo son apropiados para la modelación de problemas de grandes desplazamientos y deformaciones. Uno de los métodos de más fácil implementación es el método del punto material (material-point method, o MPM). En este trabajo se realiza una breve descripción del método, y se presentan ejemplos de análisis realizados que muestran las capacidades del MPM para representar adecuadamente fenómenos de localización de deformaciones utilizando discretizaciones sencillas y de bajo costo en términos de tiempo de cálculo.

2. El método del punto material

El MPM evolucionó desde un método “particle-in-cell” de análisis de problemas de dinámica de fluidos llamado Fluid Implicit Particle (Schreyer, Sulsky and Zhou 1995).

La gran facilidad de implementación del método del punto material se fundamenta en la similitud de varios de sus supuestos fundamentales y tecnologías matemáticas con aquellos que dan sustento al método de los elementos finitos. El método es apropiado para modelar fenómenos en los que intervienen grandes desplazamientos y ha sido exhaustivamente aplicado a problemas de impacto, penetración, y otros fenómenos de contacto entre cuerpos, transmisión de ondas de choque y análisis de vibraciones de alta frecuencia.

Aquí se examina su capacidad para representar problemas geotécnicos que involucran localización de deformaciones.

2.1 Ecuaciones diferenciales de gobierno

El movimiento de un continuo está regido por la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento. Una región de un cuerpo sólido o fluido ocupa un volumen Ω_0 en un instante inicial arbitrario t_0 , y un volumen Ω_t en cualquier instante posterior t . Sea $\rho(\mathbf{x}, t)$ la densidad de masa para la posición $\mathbf{x}$ y el instante t , $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)$ el desplazamiento, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ la velocidad para la misma posición y el mismo instante. Se define $\sigma(\mathbf{x}, t)$ como el tensor de tensiones de Cauchy en la posición $\mathbf{x}$ y el instante t . La conservación de la masa requiere que

$$\dot{\rho} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1)$$

donde el punto superpuesto indica derivación respecto del tiempo y el operador ∇ indica el cálculo de la divergencia de un vector.

La conservación de la cantidad de movimiento es descripta por

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (2)$$

donde $\mathbf{b}$ es el vector de fuerzas de cuerpo por unidad de masa, y $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{u}}$ es el vector de aceleraciones.

Para completar la descripción del continuo se requiere de leyes constitutivas que relacionen las tensiones de cada material con las deformaciones o las tasas de deformación, y de condiciones iniciales y de contorno.

La relación constitutiva puede escribirse en términos de tensiones y deformaciones utilizando el tensor tangente $\mathbf{C}$, que se relaciona con las tensiones y deformaciones a través de las expresiones

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}\quad (3)$$

Es conveniente definir la tensión específica, o por unidad de masa:

$$\mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} \quad (4)$$

Para problemas linealmente elásticos, $\mathbf{C}$ es el conocido tensor de elasticidad. Para problemas no lineales, $\mathbf{C}$ adopta una forma más compleja, y en general evoluciona con el tiempo.

Las condiciones en el contorno del continuo $\delta\Omega$ adoptan dos formas:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{g}(t) \text{ en } \delta\Omega_u \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} &= \boldsymbol{\tau}(t) \text{ en } \delta\Omega_\tau\end{aligned}\quad (5)$$

En las Eq. (5), $\mathbf{n}$ es la normal al contorno, y éste se ha dividido en dos partes: $\delta\Omega_u$, la parte sobre la que se prescriben desplazamientos, y $\delta\Omega_\tau$, la parte sobre la que se prescriben esfuerzos.

En el MPM el material contenido en la región Ω_0 se discretiza dividiéndolo en partículas. A cada partícula se le asigna una masa inicial, cuyo valor se mantiene fijo durante todo el proceso de cálculo, asegurando así la conservación de la masa. Otras propiedades iniciales del material, como velocidad, deformación y tensiones, son también asignadas a los puntos materiales.

Las ecuaciones de movimiento no se resuelven en los puntos materiales, sino que para ello se utiliza una malla de soporte, construida para cubrir el dominio del problema. Esta malla está compuesta por elementos del mismo tipo que los utilizados en el método de los elementos finitos (Fig. 1). Por simplicidad, es común utilizar elementos cuadriláteros regulares de cuatro nodos. La malla de elementos provee un medio para definir convenientemente las cantidades discretas necesarias para la obtención de una solución. Los datos requeridos para resolver las ecuaciones de movimiento en la malla, en cada paso del análisis, provienen de la ponderación, en el mismo sentido que todos los métodos de residuos ponderados, de las cantidades transportadas por los puntos materiales (Schreyer, Sulsky and York 2000). Estas cantidades se “mapean” a los nodos de la malla ponderándolas con funciones de forma típicas del método de elementos finitos. Las condiciones de contorno se imponen en los nodos de la malla y las ecuaciones de movimiento se resuelven en forma incremental en ésta. Luego se actualizan las cantidades de los puntos materiales mediante la interpolación de los resultados de la malla, utilizando para esto las mismas funciones de forma. La información asociada a la malla no es

necesaria para el siguiente paso del análisis por lo que puede ser descartada, con la sola precaución de conservar las condiciones de contorno que se hayan establecido.

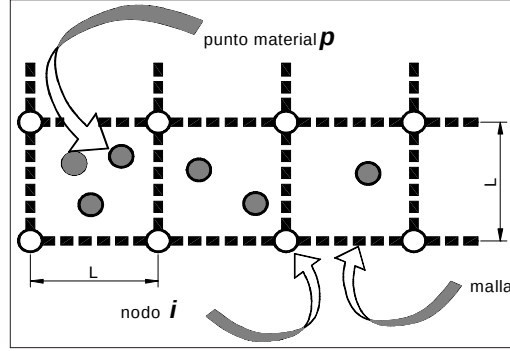


Figura 1: Componentes de una discretización mediante el MPM.

2.2 Forma discreta de las ecuaciones de gobierno

La descripción lagrangeana de las ecuaciones de la mecánica del continuo requiere que este sea dividido en porciones infinitesimales de masa. Cada porción o elemento contiene una cantidad fija de masa para cualquier tiempo. En el MPM, esta distribución continua de masa se representa con un conjunto de N_p puntos materiales o “partículas” de masa concentrada, a cada uno de los cuales se le asigna una cantidad de masa m_p con $p = 1, 2, \dots, N_p$. La posición de uno cualquiera de los puntos en el instante t se denota con $\mathbf{x}_p(t)$. La densidad de masa puede escribirse como una suma de masas puntuales:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=1}^{N_p} m_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t)) \quad (6)$$

donde $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t))$ es una función delta de Dirac en unidades de inversa de volumen (Brannon and Chen 2002).

Como m_p es una cantidad fija, la conservación de la masa (Eq. 1) se satisface automáticamente.

En una malla de elementos cuadriláteros isoparamétricos de cuatro nodos se definen las funciones de forma $N_i(\mathbf{x})$, asociadas a los nodos de la malla $\mathbf{x}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N_n$, donde N_n designa al número total de nodos de la malla. Las coordenadas de cualquier punto del dominio pueden interpolarse a partir de las coordenadas nodales, utilizando las funciones de forma:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{x}_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (7)$$

Partiendo de la forma integral débil de la Eq. (2), y utilizando la Eq. (6), es posible discretizar la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento mediante la aplicación del método de residuos ponderados de Galerkin (Schreyer, Sulsky and Zhou

1995; Schreyer and Sulsky 1996). En virtud de las propiedades de la función delta de Dirac (Eq. 6), las integrales de la forma débil de la Eq. (2) se convierten en sumatorias, con lo que se obtiene una ecuación para cada nodo de la malla, en cada intervalo de tiempo t^k del análisis:

$$\sum_{j=1}^{N_n} m_{ij}^k \mathbf{a}_j^k = \mathbf{f}_i^{\text{int},k} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k}, \quad i=1,\dots,N_n \quad (8)$$

En la Eq. (8), m_{ij} es la matriz de masa consistente, $\mathbf{a}_j$ es el vector de aceleraciones en el nodo j , y $\mathbf{f}_i^{\text{int}}$ y $\mathbf{f}_i^{\text{ext}}$ son los vectores de fuerzas internas y externas en el nodo i , respectivamente.

La matriz de masas consistente tiene la forma dada por la Eq. (9):

$$m_{ij}^k = \sum_{p=1}^{N_p} m_p N_i(\mathbf{x}_p^k) N_j(\mathbf{x}_p^k) \quad (9)$$

La matriz de masas varía en el tiempo, y debe ser calculada para cada paso del análisis. Para reducir el costo computacional del procedimiento, puede utilizarse una matriz de masas diagonal, que se obtiene simplemente sumando las filas de la matriz consistente (Taylor and Zienkiewicz 1994):

$$m_i^k = \sum_{p=1}^{N_p} m_p N_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (10)$$

Utilizando esta forma de la matriz de masa, las ecuaciones de movimiento se desacoplan, y puede escribirse para un nodo:

$$m_i^k \mathbf{a}_i^k = \mathbf{f}_i^{\text{int},k} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k} \quad (11)$$

o su equivalente en términos de cantidad de movimiento:

$$\frac{d\mathbf{p}_i^k}{dt} = \mathbf{f}_i^{\text{int},k} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k} \quad (12)$$

donde

$$\mathbf{p}_i^k = m_i^k \mathbf{v}_i^k \quad (13)$$

es la cantidad de movimiento correspondiente al i -ésimo nodo en el instante t^k .

Algoritmo de cálculo

Si se utiliza un algoritmo explícito de integración en el tiempo para la Eq. (12), es posible obtener el incremento de cantidad de movimiento del nodo i en el instante t^k (Schreyer, Sulsky and York 2000):

$$\Delta \mathbf{p}_i^k = \Delta t (\mathbf{f}_i^{\text{int},k} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k}) \quad (14)$$

En la Eq. (14), el vector de fuerzas externas se obtiene con los procedimientos usuales del método de los elementos finitos, y el vector de fuerzas internas se evalúa mediante el cálculo de la divergencia de las tensiones internas, con:

$$\mathbf{f}_i^{\text{int},k} = - \sum_{p=1}^{N_p} m_p \mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{s}_p^k \quad (15)$$

En la Eq. (15), el gradiente de las funciones de forma $\mathbf{G}_{ip}^k$ se calcula con

$$\mathbf{G}_{ip}^k = \nabla N_i(\mathbf{x})_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} \quad (16)$$

La cantidad de movimiento actualizada en un nodo será entonces:

$$\mathbf{p}_i^{k*} = \mathbf{p}_i^k + \Delta \mathbf{p}_i^k = \mathbf{p}_i^k + (\mathbf{f}_i^{\text{int},k} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k}) \Delta t \quad (17)$$

La cantidad de movimiento nodal inicial $\mathbf{p}_i^k$ puede determinarse con las cantidades de movimiento de los puntos materiales $\mathbf{p}_p^k = m_p \mathbf{v}_p^k$, donde $\mathbf{v}_p^k$ es la velocidad inicial de un punto material:

$$\mathbf{p}_i^k = \sum_{p=1}^{N_p} \mathbf{p}_p^k N_i(\mathbf{x}_p^k) = \sum_{p=1}^{N_p} m_p \mathbf{v}_p^k N_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (18)$$

Formalmente, la Eq. (18) implica una suma de las velocidades de los puntos materiales ponderada por las masas de los mismos.

Los incrementos de desplazamiento y velocidad nodales pueden ahora calcularse:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_i^k &= \frac{\Delta \mathbf{p}_i^k}{m_i^k} \\ \Delta \mathbf{u}_i^k &= \Delta t \mathbf{v}_i^{k*} = \Delta t \frac{\mathbf{p}_i^{k*}}{m_i^k} \end{aligned} \quad (19)$$

Las posiciones y velocidades de los puntos materiales se actualizan interpolando las correspondientes cantidades nodales con las funciones de forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p^{k+1} &= \mathbf{x}_p^k + \sum_{i=1}^{N_n} \Delta \mathbf{u}_i^k N_i(\mathbf{x}_p^k) = \mathbf{x}_p^k + \Delta t \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\mathbf{p}_i^{k*}}{m_i^k} N_i(\mathbf{x}_p^k) \\ \mathbf{v}_p^{k+1} &= \mathbf{v}_p^k + \sum_{i=1}^{N_n} \Delta \mathbf{v}_i^k N_i(\mathbf{x}_p^k) = \mathbf{v}_p^k + \Delta t \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\mathbf{p}_i^k}{m_i^k} N_i(\mathbf{x}_p^k) \end{aligned} \quad (20)$$

El incremento de deformación en los puntos materiales se calcula con los gradientes de velocidad nodal:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^k &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{N_n} \left[\mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_i^{k*} + (\mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_i^k)^T \right] \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_p^k + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^k \end{aligned} \quad (21)$$

El incremento de deformación se utiliza para calcular el incremento de tensión a través de las relaciones constitutivas que se hayan postulado:

$$\sigma_p^{k+1} = \sigma_p^k + \Delta\sigma_p^k \quad (22)$$

Aquí finaliza el paso de integración. Toda la información perteneciente a la malla (excepto la necesaria para definir las condiciones de contorno) puede descartarse, y se comienza un nuevo ciclo utilizando la información transportada por los puntos materiales para inicializar la nueva malla.

3. Ejemplos numéricos

En esta sección se presentan tres ejemplos que demuestran la capacidad del método para representar adecuadamente problemas de localización de deformaciones. Los primeros dos ejemplos poseen una solución teórica, y además han sido analizados en Huang, Pastor and Zienkiewicz (1995) utilizando elementos finitos con mallas adaptables. En los tres problemas se utiliza una ecuación constitutiva elastoplástica sin endurecimiento, aplicando una aproximación suavizada al criterio de fluencia de Mohr – Coulomb (Chan et al. 1999). Se impone la condición de deformación plana y se utiliza un módulo de Poisson $\nu = 0.49$ para simular incompresibilidad. Los ejemplos se modelaron con materiales puramente cohesivos. En todos los casos, el intervalo de integración se tomó igual al 25% del intervalo crítico. Este último se conoce como condición de Courant-Friedrichs-Levy, y es igual al tiempo que una onda de presión tarda en recorrer una distancia igual al tamaño de un elemento de la malla de soporte. No se adicionó amortiguación numérica a ninguno de los modelos.

Ejemplo 1: corte vertical

El problema consiste (Fig. 2) en un corte vertical en una masa de suelo puramente cohesivo e incompresible en deformación plana. Los parámetros mecánicos del suelo han sido elegidos de manera que $E/c = 2000$, donde E es el módulo de Young y c la cohesión del material. El peso propio de los materiales se desprecia. La zapata rígida se ha modelado con un material elástico en deformación plana, con un módulo de Young 100 veces mayor que el asignado al material del suelo.

En el ejemplo se ha controlado la velocidad de descenso de la zapata, y la reacción se obtuvo integrando las tensiones verticales a lo largo del contorno inferior del suelo.

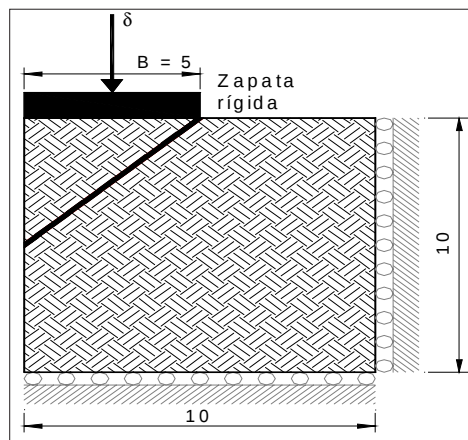


Figura 2: Corte vertical en suelo cohesivo. Geometría y condiciones de contorno.

El mecanismo de falla teórico, que se muestra en la Fig. 2, consiste en una línea inclinada a 45° con respecto a la superficie del suelo, que parte del borde de la zapata y se proyecta hasta el corte vertical. La reacción máxima teórica cumple la condición $F/(Bc) = 2$ para un material de tipo Mohr-Coulomb y de aproximadamente $F/(Bc) = 2.3$ para el criterio suavizado considerado. El problema se analizó utilizando tres discretizaciones diferentes: el modelo A estaba formado por una cuadrícula de 20 elementos por lado. Cada elemento se ocupó inicialmente con una partícula, para un total de 400 puntos materiales. El modelo B era una cuadrícula de 60 elementos por lado, con un punto material por elemento, totalizando 3600 partículas. El modelo C representó el suelo con 6400 partículas, con una malla de 80 elementos por lado.

La Fig. 3 permite apreciar que el modo teórico de falla fue bien representado por los tres modelos. En cada uno de estos, las deformaciones plásticas se concentraron en una banda estrecha ubicada en la misma posición que la superficie de falla teórica, y una cuña triangular de suelo se desplazó en forma solidaria con la zapata. Se observa que mientras más fina es la discretización empleada, el ancho de la zona de deformaciones plásticas a los lados de la superficie teórica de falla se reduce.

Al analizar las gráficas de reacción del suelo versus descenso de la zapata, mostradas en la Fig. 4, se aprecia que la carga límite para el modelo A alcanza aproximadamente el valor $F/(Bc) = 2.4$. Las discretizaciones más finas, correspondientes a los modelos B y C, muestran una convergencia de la carga límite al valor $F/(Bc) = 2.3$.

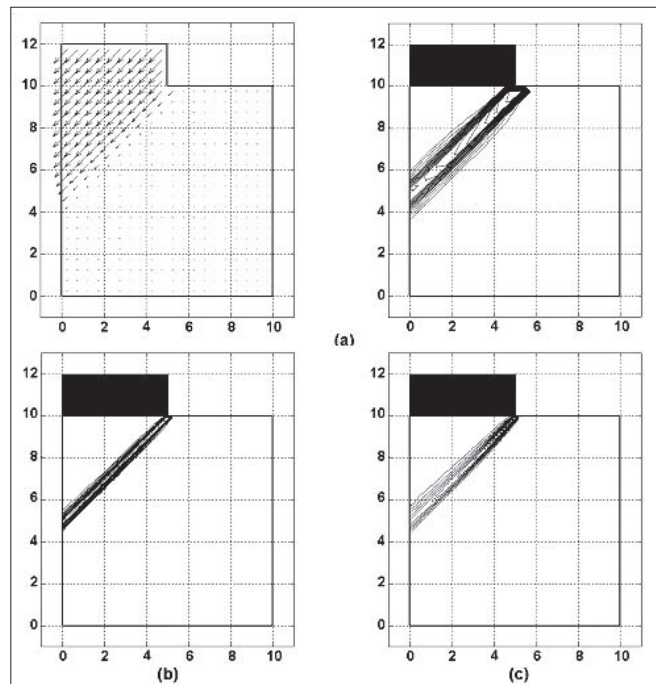


Figura 3: Corte vertical en suelo cohesivo – (a) Desplazamientos y deformación plástica equivalente para el modelo A. (b) Deformación plástica equivalente para el modelo B. (c) Deformación plástica equivalente para el modelo C.

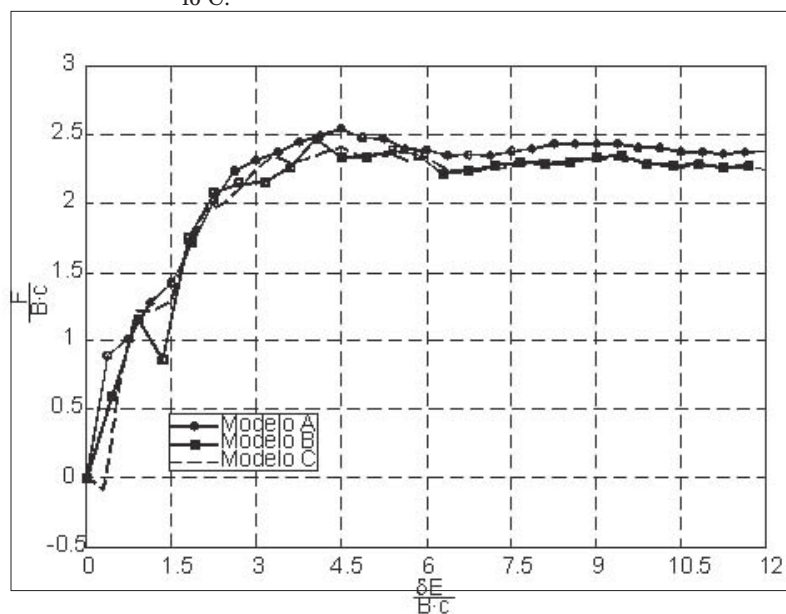


Figura 4: Corte vertical en suelo cohesivo. Reacción vs. descenso de la zapata.

Si el modelo utilizado para representar el material incluyera ablandamiento por deformación las soluciones serían dependientes del tamaño de la malla, salvo que se usen técnicas de regularización.

Ejemplo 2: zapata centrada

En este ejemplo se modela el comportamiento de una zapata de fundación colocada sobre un suelo puramente cohesivo e incompresible, y sometida a un descenso vertical sin giro, bajo la hipótesis de deformación plana. Los parámetros de los materiales son idénticos a los del ejemplo anterior, y la geometría y condiciones de contorno se muestran en la Figura 5.

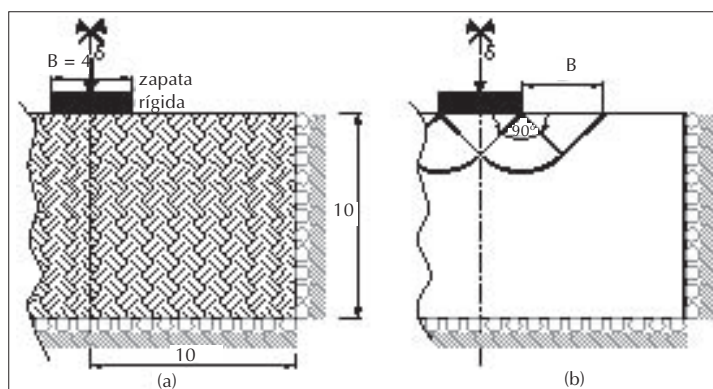


Figura 5: Zapata centrada en suelo cohesivo – (a) Geometría y condiciones de contorno. (b) Mecanismo teórico de colapso.

Aprovechando las condiciones de simetría presentes en el problema, se modeló la mitad del mismo, imponiendo las condiciones de contorno apropiadas (desplazamiento horizontal impedido) en el eje de simetría. El modelo se discretizó con una malla de 40 elementos por lado, y cada elemento contenía un punto material al comenzar el análisis. En las condiciones descritas, la carga límite teórica sobre la zapata cumple la condición $F/(Bc) = 5.14$ para el criterio de Mohr – Coulomb, y $F/(Bc) = 5.94$ para la aproximación suavizada. El mecanismo de colapso plástico asociado tiene la forma indicada en la Figura 5.

Los resultados del análisis del modelo muestran que el mecanismo de colapso obtenido aproxima muy bien al mecanismo teórico de falla (Figura 6). La carga máxima obtenida está muy cerca del límite teórico, como puede observarse en la Figura 7.

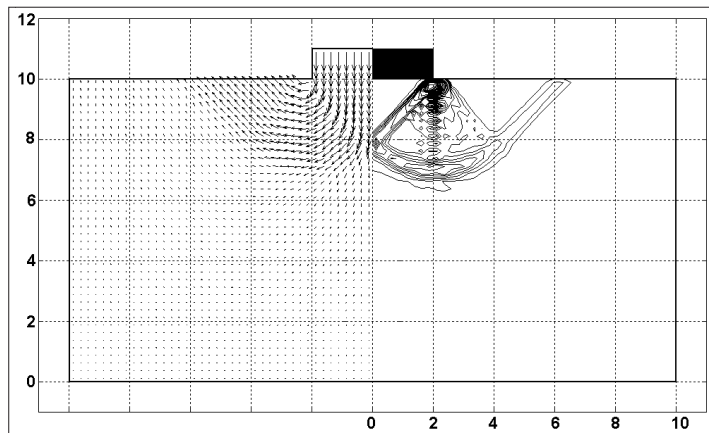


Figura 6: Zapata centrada en suelo cohesivo. Vectores de desplazamiento y contornos de deformación plástica equivalente.

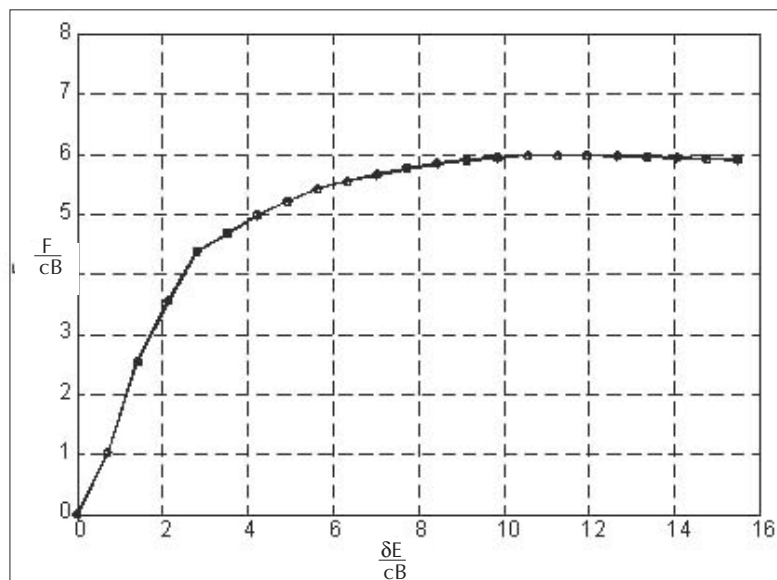


Figura 7: Zapata centrada en suelo cohesivo. Reacción vs. descenso de la zapata.

Ejemplo 3: aceleración lateral de falla en un talud

Es frecuente utilizar métodos de análisis de estabilidad de taludes sometidos a acciones sísmicas que requieren conocer el valor de la aceleración horizontal estática de falla. Esta es la aceleración que, al actuar pseudoestáticamente sobre un talud originalmente estable, genera una superficie de deslizamiento. Un ejemplo de los métodos de análisis que requieren conocer la aceleración de falla es el propuesto por Newmark

(Newmark and Rosenblueth 1976). Este método considera que la cuña de suelo generada por la superficie de falla tiene un comportamiento rígido-plástico y que solamente experimenta desplazamientos relativos al talud cuando la magnitud de la aceleración impuesta por un sismo supera el valor de la aceleración estática de falla. Bajo estas suposiciones, es posible estimar el desplazamiento relativo de la cuña con respecto al talud mediante la doble integración del acelerograma solamente para las aceleraciones cuyas magnitudes sean mayores que la aceleración de falla, y que actúen en un sentido tal que tiendan a separar la cuña de la masa del talud. El método es simple y expeditivo, y su mayor inconveniente se encuentra en la determinación de la aceleración estática de falla. Normalmente, se emplean técnicas de análisis de estabilidad de taludes basados en métodos de equilibrio límite (Lancellotta 1995). Estos métodos buscan el equilibrio de las fuerzas que componen el problema, pero no imponen ninguna restricción sobre la posibilidad cinemática del mecanismo de falla postulado, por lo que generalmente se obtienen valores conservadores cuando se los utiliza para evaluar la aceleración estática de falla.

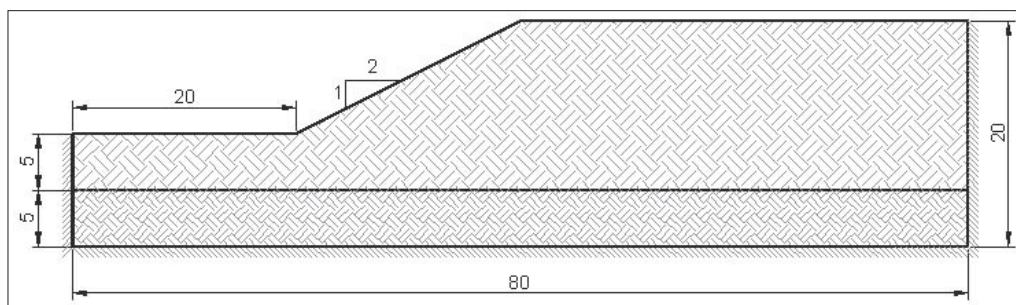


Figura 8: Aceleración de falla en un talud cohesivo. Geometría y condiciones de contorno.

En el caso presentado en esta sección, se busca determinar la aceleración estática de falla de un talud cohesivo mediante un modelo de puntos materiales. El modelo, cuya geometría y condiciones de contorno se muestran en la Figura 8, está formado por dos capas de materiales cohesivos. La cohesión del material que forma la capa superior es igual a 50 kN/m^2 mientras que la cohesión del material de la capa base es igual a 100 kN/m^2 . Ambos materiales poseen idéntico peso específico (20 kN/m^3) y módulo de Young ($2 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$).

La modelación de este problema requirió la ejecución un análisis en dos etapas. En la primera etapa se incrementó lentamente la aceleración vertical, hasta alcanzar el valor de la aceleración de la gravedad. Una vez alcanzado un estado estable bajo la carga de peso propio, en la segunda etapa se incrementó la aceleración horizontal hasta provocar la formación de un mecanismo de colapso.

El valor de aceleración de falla obtenido mediante el modelo de puntos materiales es $0.26g$. Las Figuras 9 y 10 permiten inferir el mecanismo de colapso que se muestra en la Figura 11. Este mecanismo se compone de dos bloques que sufren una rotación rígi-

da, un bloque que se desliza sobre la capa inferior de suelo y una cuña de empuje pasivo. Al aplicar el Teorema del Límite Superior del Colapso Plástico al mecanismo de la Figura 11, se obtuvo un valor de $0.31g$ para la aceleración de falla. Un análisis del talud utilizando el método de equilibrio de dovelas de Carter (Siegel 1975), arrojó un valor para la aceleración de falla de $0.14g$, sensiblemente menor que los obtenidos anteriormente.

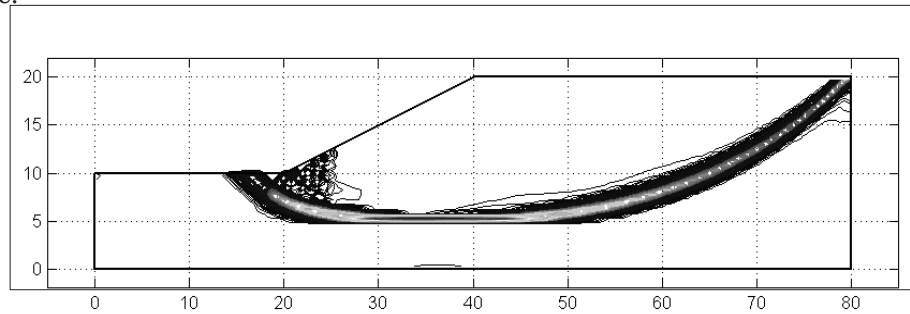


Figura 9: Aceleración de falla en un talud cohesivo. Contornos de deformación plástica equivalente.

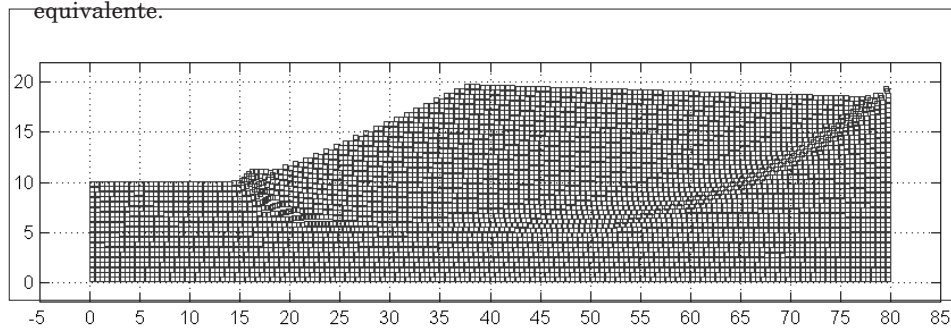


Figura 10: Aceleración de falla en un talud cohesivo. Configuración deformada.

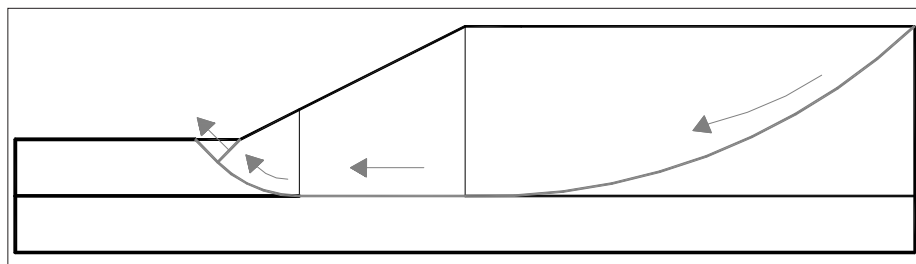


Figura 11: Aceleración de falla en un talud cohesivo. Mecanismo de colapso.

4. Conclusiones y comentarios finales

En este trabajo se han expuesto las ecuaciones necesarias y los pasos a seguir para analizar un problema mediante el método del punto material. Aunque el MPM ha sido utilizado principalmente para modelar fenómenos dinámicos en los que intervienen varios cuerpos y en los que se producen grandes desplazamientos, los ejemplos presentados muestran que también es posible aplicar el método a la modelación de problemas de localización de deformaciones en estructuras sometidas a acciones cuasi estáticas.

El trabajo muestra que mediante la aplicación del método del punto material es posible representar adecuadamente fenómenos de localización de deformaciones, aún con las discretizaciones sencillas utilizadas en los ejemplos numéricos. La posición de las zonas de localización no está influida por la malla, debido a la disposición regular de elementos utilizada. La construcción de los modelos es rápida, ya que se realiza con mallas muy simples y elementos de formas regulares.

Puesto que las ecuaciones del método no presentan acoplamiento de sus grados de libertad, no es necesario invertir matrices durante el análisis de un problema. Esto se traduce en un muy bajo tiempo de cálculo para cada paso de una solución, aunque el número de grados de libertad del modelo sea muy elevado. Sin embargo, el carácter explícito del algoritmo de integración empleado impone severas restricciones a la elección del intervalo de integración, lo cual crea la necesidad de ejecutar un gran número de pasos para analizar un problema.

Uno de los objetivos de la investigación que originó este trabajo es el desarrollo de herramientas que permitan evaluar la seguridad de presas de materiales sueltos. La complejidad de estas estructuras y de los materiales que las componen no puede ser representada adecuadamente con una formulación bidimensional del MPM, ni con las relaciones constitutivas utilizadas en este trabajo. Durante el desarrollo de la investigación, se prevé extender el método para permitir la generación y el análisis de modelos tridimensionales. También se incorporarán modelos constitutivos basados en la teoría de la plasticidad generalizada, más apropiados para representar el comportamiento de los materiales granulares.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Agencia Nacional de Promoción de la Ciencia y Tecnología (ANPCyT) por el financiamiento otorgado para el desarrollo del proyecto PICT 13-09912 "Evaluación de la seguridad de presas de materiales sueltos bajo la acción de cargas de servicio y de terremotos destructivos".

Referencias

- Arroyo, M.; Díez, P. and Huerta, A. (1997). *Error Estimation and Adaptivity in Strain Localisation Problems with Softening Materials*. Monograph CIMNE N° 22, CIMNE, Barcelona.
- Brannon, R. and Chen, Z. (2002). *An evaluation of the material point method*. SAND Report SAND2002-0482, Sandia Laboratories, USA.
- Chan, A. H. C.; Pastor, M.; Schrefler, B. A.; Shiomi, T. and Zienkiewicz, O. C. (1999). *Computational Geomechanics with Special Reference to Earthquake Engineering*. John Wiley & Sons, Chichester.
- Huang, M.; Pastor, M. and Zienkiewicz, O. C. (1995). Localization problems in plasticity using finite elements with adaptive remeshing. *Int. J. Numer. Analyt. Geomec.*, v. 19, p. 127-148.
- Lancellota, R. (1995). *Geotechnical Engineering*. A. A. Balkema, Rotterdam.
- Newmark, N. and Rosenblueth, E. (1976). *Fundamentos de Ingeniería Sísmica*. Diana, México, D F.
- Schreyer, H. L. and Sulsky, D. (1996). Axisymmetric form of the MPM with applications to upsetting and Taylor impact problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 139, p. 409-429.
- Schreyer, H. L.; Sulsky, D. and York, A. R. (2000). Fluid-membrane interaction based on the material point method. *Int J. Numer. Methods Eng.*, v. 48, p. 901-924.
- Schreyer, H. L.; Sulsky, D. and Zhou, S.J. (1995). Application of a particle-in-cell method to solid mechanics. *Comput. Phys. Commun.*, v. 87, p. 236-252.
- Siegel, R. A. (1975). *Computer Analysis of General Slope Stability Problems*. Purdue University, Indiana.
- Taylor, R. and Zienkiewicz, O. C. (1994). *El Método de los Elementos Finitos*. McGraw-Hill, Madrid.

Strain localization in geotechnical structures using the material point method

Abstract

The Material Point Method, or MPM, is a numerical simulation technique that combines principles used in particle methods and in the finite element method. With MPM, a body is modeled as a set of “particles”, which carry the variable values needed to define the body’s state. Interaction between particles takes place in a background mesh similar to those used in the finite element method. In this paper, MPM is used to model typical geotechnical problems. Solutions obtained for various problems are presented, showing the ability of the method to accurately model plastic strain localization phenomena with development of sliding surfaces.

Key words: strain localization, plasticity, MPM, material-point method.

1. Introduction

Collapse of geotechnical structures often involves the development of strain localization. The study and prediction of these failure modes has great significance for structural security assessment.

Problems involving strain localization are often analyzed by means of limit equilibrium methods, or applying plastic collapse theorems. These methods cannot predict the shape or the position of failure surfaces, where plastic deformation concentrates. Moreover, they are not able to give quantitative information about the strain level reached at failure. For these reasons, numerical methods, suitable to accurately model strain localization phenomena, are of great interest for the analysis of geotechnical structures.

The large strains developed in localized areas induce large distortion in the finite element meshes, leading to errors in the analyses. Particle methods do not use a mesh to model the continuum, thus being suitable to model large deformation problems.

This paper presents a brief description of the material point method. Results of performed analyses are also presented. These results show the ability of MPM to model strain localization problems.

2. The material point method

The MPM evolved from a particle-in-cell method called FLIP. It has been used to model impact, penetration, shock waves transmission and high frequency vibrations.

Here, the ability of MPM to model strain localization phenomena in geotechnical problems is explored.

2.1 Governing Differential equations

Motion of a continuum is governed by conservation of mass and momentum. Mass conservation requires Eq. (1) to be satisfied; conservation of momentum is given by Eq. (2). The complete description of the continuum also requires constitutive laws that relate strains with stresses (Eq. 3), and boundary conditions, described by Eqs. (5). In MPM the continuum is discretized as a set of particles. Each of these has an initial mass, which is kept fixed through the calculations, this way ensuring Eq. (1). The particles also carry velocity, acceleration, stress, strain, and any other variable needed to describe the continuum at any time. These quantities are transferred to a background mesh, where the equations of motion are solved at every step of the simulation (Fig. 1).

2.2 Discrete form of the governing equations

The density of the collection of particles is approximated using a Dirac delta function (Eq. 6). When Eq. (6) is replaced in the weak form of Eq. (2), a discrete form of the equations of motion is obtained (Eq. 8). The consistent mass matrix (Eq. 9) is time-dependent, and therefore has to be inverted at every step of the simulation. If a diagonal mass matrix, given by Eq. (10), is used, inversion of the mass matrix becomes trivial. The momentum form of the discrete equations of motion is given by Eq. (12).

2.3 Numerical algorithm

The explicit time integration algorithm is described by Eqs. (14-22).

3. Numerical examples

Example 1: vertical cut

Figura 2 describes the layout of this test case. The problem was analyzed using three different discretizations. The failure mechanism obtained was consistent with the theoretical results, as seen from plastic strain plots in Fig. 3. Load – displacement curves (Fig. 4) show convergence towards the theoretical limit load.

Example 2: foundation

Figura 5 describes the layout of this test case. Plastic strain contours (Fig. 6) and the load – displacement curve (Fig. 7) show that the obtained results are close to the theoretical values.

Example 3: lateral failure acceleration in a slope

Permanent deformations in a slope after a seismic event can be evaluated by Newmark method. This method requires the evaluation of the lateral pseudostatic acceleration that trigs collapse. Figura 8 describes the layout of a slope for which lateral failure acceleration is to be determined. In the MPM analysis, collapse is predicted for 0.26g lateral acceleration. On the basis of the model results presented in Figs. 9 and 10, the collapse mechanism depicted in Fig. 11 was derived. The analysis of this sliding mechanism by means of the upper bound theorem of plastic collapse yields 0.31g failure acceleration. This is comparable to the acceleration obtained with the numerical analysis.

4. Conclusions and final remarks

The examples presented here shows that the MPM can be used to model strain localization problems in structures. Localization phenomena are captured, even with the simple discretizations used here. The position and shape of the localized areas are not conditioned by the mesh, due to the regular element layout used.

Since there is no need to perform any matrix inversion, the computational cost of every step in a solution is low. However, the explicit algorithm requires a large number of integration steps.

On a future stage of this investigation, it is expected to extend the method to allow for 3D analyses, and to add more complex constitutive models, suitable to represent soil behavior.

Acknowledgements

Authors wish to thank National Agency for Promotion of Science and Technology (ANPCyT) for financing the development of project PICT 13-09912 “Assessment of safety of earth dams subjected to service loadings and to destructive earthquakes”.