

Determinação do volume mínimo de concreto em grelhas de edifícios

Moacir Kripka¹

Trabalho recebido em 15/09/2004 e aprovado para publicação em 09/11/2004.

Resumo

Apresenta-se neste trabalho uma formulação desenvolvida para a minimização do volume de concreto em grelhas de edifícios em concreto armado. Pela associação do método dos deslocamentos para análise de estruturas reticuladas com técnica de otimização, é permitida a obtenção das seções dos elementos que conduzem ao menor volume total de concreto, atendendo aos estados limites último e de serviço. As restrições impostas na formulação do problema relacionadas à limitação dos deslocamentos incluem os efeitos de longa duração, podendo-se optar tanto pela consideração da inércia no estágio II como pela adoção de uma inércia equivalente considerando a contribuição do concreto entre fissuras (Branson). A determinação da altura mínima da seção em função dos esforços de flexão pode ser efetuada tanto a partir da fixação da altura da linha neutra como pela manutenção da seção no domínio 3, ou seja, como subarmada. Devido tanto à relativa complexidade da formulação como à existência de mínimos locais, mesmo para um pequeno número de variáveis, optou-se pela utilização de um algoritmo de otimização global, sendo implementado o método do Recozimento Simulado (Simulated Annealing). Com o objetivo verificar a eficiência do procedimento proposto são apresentadas algumas das estruturas analisadas, bem como os resultados obtidos a partir da formulação desenvolvida, os quais indicam que o somatório dos mínimos locais, resultantes da análise de vigas isoladas, difere de forma significativa do mínimo obtido quando o procedimento é aplicado a todos os elementos de forma simultânea, como proposto.

¹ D.Sc., Professor do Programa de Pós-Graduação em Engenharia - Universidade de Passo Fundo - UPF, Passo Fundo - RS, Brasil. E-mail: mkripka@upf.br.

1. Introdução

Tanto a análise como o dimensionamento de estruturas, de modo geral, se constituem em procedimentos de grande complexidade. Ao envolverem um número significativo de variáveis, necessitam ser efetuados de maneira iterativa, ou seja, por meio de aproximações sucessivas. Em função deste caráter iterativo, os valores inicialmente arbitrados para as variáveis dependem de forma determinante tanto da sensibilidade como da experiência prévia do calculista. Ainda assim, o número de repetições exigido seria demasiadamente elevado caso se desejasse obter os valores ideais (ou “ótimos”), dentro do intervalo de resultados aceitáveis. Descrevendo, porém, o comportamento físico da estrutura através de funções matemáticas, busca-se valores extremos de tais funções com o emprego de técnicas de otimização.

De forma genérica, um problema de otimização (no caso, minimização) pode ser expresso da seguinte forma:

$$\text{minimizar} \quad f(x_i) \quad i = 1, n \quad (1)$$

$$\text{sujeito a} \quad g_j(x_i) \leq 0 \quad j = 1, m \quad (2)$$

$$h_k(x_i) = 0 \quad k = 1, l \quad (3)$$

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad (4)$$

onde f designa a função objetivo e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ consiste no vetor das variáveis de projeto. As demais funções são as chamadas restrições do problema (respectivamente, restrições de desigualdade, de igualdade e restrições laterais ou canalizadas). As funções envolvidas no problema podem conter as variáveis de projeto de forma explícita ou não, além de poderem ser desenvolvidas numérica ou analiticamente. Tanto a função objetivo como as funções de restrição podem ser lineares ou não lineares.

A utilização de técnicas de otimização aplicadas à análise e dimensionamento de estruturas remonta a várias décadas, tendo sido impulsionada, principalmente por um trabalho apresentado por Schmit (1960), no qual técnicas de programação não-linear foram utilizadas objetivando a minimização do peso de uma treliça. A partir de então, uma grande diversidade de métodos foi desenvolvida e adaptada à otimização estrutural. A aplicação destes métodos à resolução de problemas práticos, no entanto, não tem sido verificada na mesma proporção do desenvolvimento das técnicas. Neste sentido, destaca-se o trabalho de Cohn et al. (1994) o qual, com base em mais de 500 exemplos retirados de artigos e livros, enfatiza a grande preocupação com aspectos matemáticos. Em contrapartida, o número de exemplos apresentados é muito pequeno, sendo estes normalmente de interesse puramente acadêmico.

Uma das razões normalmente apontadas para a pouca aplicação das técnicas de otimização à problemas práticos de engenharia estrutural consiste na complexidade do modelo gerado, descrito por funções de comportamento não linear e gerando um espaço de soluções não convexo (vários pontos de ótimo), problemas para os quais a resolução por métodos tradicionais de programação matemática tem se mostrado pouco eficiente. Para a resolução destes tipos de problema os chamados métodos heurísticos vêm desempenhando importante papel, uma vez que envolvem apenas valores das funções no processo, não importando se existe unimodalidade ou mesmo continuidade em suas derivadas. Em contrapartida, apresentam como desvantagem a necessidade de um maior número de cálculos do valor da função.

Dentre os principais métodos heurísticos, destaca-se a aplicação crescente do Método do Recozimento Simulado, ou Simulated Annealing, o qual consiste em um método de otimização global desenvolvido em analogia ao processo mecânico de resfriamento dos metais. Ainda pouco empregado na otimização estrutural, o Método do Recozimento Simulado é de fácil implementação computacional, trabalhando com poucos parâmetros de controle em relação aos Algoritmos Genéticos.

Neste artigo é apresentada a aplicação do Método do Recozimento Simulado à otimização de seções transversais de estruturas de edifícios em concreto armado, analisadas segundo o modelo de grelha. Ainda que, devido a limitações tanto de ordem econômica com estética, se considere um número reduzido de distintas seções transversais para as vigas de um mesmo pavimento, o número possível de combinações é bastante elevado devido ao alto grau hiperestático do modelo. Tem-se desta forma, devido à alteração nas dimensões de um único elemento, a redistribuição dos esforços em todo o pavimento pela alteração na rigidez relativa dos elementos. Os resultados obtidos a partir do presente trabalho indicam que o somatório dos mínimos locais, resultantes da análise de vigas isoladas, difere de forma significativa do mínimo obtido quando o procedimento é aplicado a todos os elementos de forma simultânea.

Para o dimensionamento dos elementos foram considerados os critérios preconizados pela norma brasileira NBR6118 (1978). Estudos efetuados pelo autor indicam, no entanto, que a aplicação de versão mais recente da mesma norma (NBR6118 2003) não invalida as conclusões aqui apresentadas. Adicionalmente, verificou-se que, em função dos custos relativos dos materiais estruturais, otimizar volume (ou peso) em estruturas de concreto armado praticamente equivale à otimização de seu custo, com a vantagem da função volume apresentar comportamento linear (Kripka 2003).

2. Método do recozimento simulado (simulated annealing)

Os métodos de otimização geralmente empregados são baseados em estratégias descendentes. Nestas, a partir de uma solução inicial, uma nova solução é gerada e o valor da função obtido para esta solução comparado ao inicial. Caso uma redução no valor da função seja verificada, a mesma passa a ser adotada como solução corrente e o processo é repetido, até que nenhuma melhora seja verificada no valor da função, dentro da precisão desejada. O resultado obtido deste processo, dependendo das características das funções envolvidas, pode constituir-se na melhor solução nas vizinhanças da solução inicial, mas não necessariamente no ótimo global. A estratégia usual para melhorar a solução obtida consiste na análise do problema a partir de diversas soluções iniciais.

O Método do Recozimento Simulado, ou Simulated Annealing, utiliza uma estratégia diferente da convencional, tentando evitar a convergência para um mínimo local aceitando também, a partir de um determinado critério, soluções que incrementem o valor da função. O Método do Recozimento Simulado é reconhecido como um método para a obtenção de boas soluções para problemas de otimização de difícil resolução, desenvolvido em analogia ao processo de recozimento de um sólido, quando se pretende alcançar seu estado de mínima energia. A denominação recozimento (annealing) é dada ao processo de aquecimento de um sólido até seu ponto de fusão, seguido de um resfriamento lento, até que se obtenha novamente o enrijecimento. Neste processo, o resfriamento vagaroso é essencial para se manter um equilíbrio térmico no qual os átomos podem se reorganizar em uma estrutura com energia mínima. Caso o sólido seja resfriado bruscamente, seus átomos formarão uma estrutura irregular e fraca, com alta energia em consequência do esforço interno gasto.

Em termos computacionais, o recozimento pode ser visto como um processo estocástico de determinação da organização dos átomos com mínima energia. A altas temperaturas os átomos se movem livremente podendo, com grande probabilidade, alcançar posições que acarretarão em acréscimo na energia do sistema. Quando a temperatura é reduzida, os átomos se movem de forma gradual a uma estrutura regular, e a probabilidade de aumento de energia é reduzida.

Segundo Metrópolis et al. (1953), a probabilidade de mudança na energia do sistema é dada por

$$p(\Delta E) = \exp\left(\frac{-\Delta E.K}{T}\right) \quad (5)$$

onde T é a temperatura do corpo e K a constante de Boltzmann.

A simulação do processo de recozimento como uma técnica de otimização foi originalmente proposta por Kirkpatrick et al. (1985), na qual a função objetivo

corresponde à energia do sólido. À semelhança do método original de recozimento na termodinâmica, o processo inicia com um alto valor de T , para o qual uma nova solução é gerada. O aceite desta nova solução se dará automaticamente caso acarrete em redução no valor da função. Sendo o novo valor da função maior que o anterior, o aceite se dará por um critério probabilístico, sendo a função de aceite

$$p = \exp\left(\frac{-\Delta f}{T}\right) \quad (6)$$

e a nova solução aceita se p for maior que um número entre zero e um, gerado aleatoriamente. Enquanto T é alto, a maioria das soluções é aceita, sendo T reduzido gradativamente a cada série de tentativas de obtenção de uma melhor solução, nas vizinhanças da solução corrente.

3. Formulação para o problema de minimização do volume de concreto

O objetivo definido pela formulação desenvolvida consiste na minimização do volume de concreto dos elementos lineares de um pavimento de edifício, podendo a função ser escrito como:

$$f = (bw_i, h_i, l_i) \quad i=1,n \quad (7)$$

sendo n o número total de elementos e bw_i , h_i e l_i , respectivamente, a largura, a altura e o comprimento do i -ésimo elemento. Uma vez que o número de distintas seções transversais em um mesmo pavimento é bastante restrito por razões de ordem estética e econômica, o número de incógnitas, ou variáveis de projeto, é muito inferior ao número de elementos. Desta forma, enquanto o número de termos da função objetivo equivale ao número total de elementos do pavimento, cada uma das restrições é aplicada apenas m vezes, sendo m igual ao número de distintas seções no pavimento.

As primeiras restrições impostas ao problema relacionam-se ao estado limite de serviço, sendo considerado apenas o atendimento ao estado limite de deformações excessivas. Para a determinação da altura limite correspondente a δ_{adm} , ou flecha admissível, foram adotados no presente trabalho os valores preconizados pela NBR 6118 (1978). A flecha máxima δ_{max} é determinada com a consideração da deformação lenta, a qual é acrescida aos deslocamentos obtidos tanto no estágio II, correspondente à peça inteiramente fissurada, como pela consideração de uma inércia equivalente considerando a contribuição do concreto entre fissuras (Branson).

Com relação aos esforços solicitantes foram impostas restrições relacionadas à altura mínima da seção transversal para cada grupo de elementos. Com esta finalidade, define-se h_j como sendo a altura dos elementos do grupo e h_{min} a altura mínima da seção obtida a partir do dimensionamento à flexão. Esta última pode ser determinada para a manutenção da seção como subarmada ou, de forma alternativa, através da fixação da altura da linha neutra.

Em função das considerações efetuadas, o problema foi formulado como:

$$\min \quad f = \sum (b w_i h_i l_i) \quad i = 1, n \quad (7)$$

$$\text{s.a.} \quad g1 = \delta \max_j - \delta_{adm} \leq 0 \quad (8)$$

$$g2 = h_{min} - h_j \leq 0 \quad j = 1, m \quad (9)$$

Com relação ao processo de consideração das restrições na implementação da formulação, empregou-se a técnica de penalização dinâmica conhecida como penalidade annealing (Michalewicz 1996) na qual, à semelhança do método de otimização, parte-se de uma temperatura inicial relativamente alta, a qual vai sendo gradativamente reduzida. Desta forma, a função penalizada $F(x)$ pode ser escrita como:

$$F(x) = f(x) + P(X) \quad (10)$$

sendo

$$P(x) = \sum \left(\frac{1}{2T} \right) g(x)^2 \quad (11)$$

onde $P(X)$ é a função que representa o conjunto das restrições penalizadas (apenas restrições não atendidas). Desta forma, ainda que se parta de soluções não factíveis, pequenas violações das restrições são inicialmente aceitas, sendo o fator de penalização gradualmente incrementado com a redução da temperatura T .

4. Exemplos

A formulação descrita foi implementada computacionalmente tendo como base um programa desenvolvido para a análise de grelhas pelo método dos deslocamentos, no qual foi inserida rotina de otimização desenvolvida na forma proposta por Cornana et al. (1987). Desta forma, tanto a entrada de dados como a forma de apresentação dos resultados são familiares ao engenheiro habituado ao uso de softwares de análise estrutural, sendo gerado em separado um arquivo com a descrição da evolução do processo de otimização (detalhando, dentre outros, número de novas soluções aceitas para cada temperatura). As características de material (módulos de elasticidade longitudinal e transversal) são calculadas automaticamente a partir do fornecimento, pelo usuário, do valor da resistência característica do concreto. A altura inicial da seção transversal

pode tanto ser fornecida como estimada automaticamente, uma vez que este valor constitui a solução inicial do problema de otimização, pouco influenciando no resultado do processo. A partir destas alturas iniciais são calculados pelo programa os momentos de inércia flexionais e torsionais. Por último, as ações de caráter permanente e variável devem ser fornecidas separadamente, sendo o peso próprio computado de forma automática.

A partir dos dados fornecidos, o valor da função objetivo é determinado com o emprego da Eq. (7), segundo as dimensões iniciais atribuídas a cada um dos elementos. Para estas dimensões são determinados esforços e deslocamentos pelo método dos deslocamentos. Uma vez pesquisado o maior valor de momento fletor em cada grupo, este valor é empregado para a obtenção da altura mínima necessária aos elementos, a qual é comparada com a altura inicialmente atribuída (Eq. 9). Caso a restrição não seja atendida (altura atual insuficiente), a função correspondente é penalizada (Eqs. 10 e 11), incrementando artificialmente o peso da seção. Procedimento análogo segue-se para os deslocamentos (Eq. 8). Efetuadas as verificações para cada grupo de elementos, tem-se o valor da função objetivo correspondente à solução inicial.

A geração de um candidato a nova solução é efetuada atribuindo-se novas alturas para cada grupo de elementos, sendo computado o valor da função para estas. O aceite deste como solução corrente se dará segundo o critério específico do Método do Recozimento Simulado (Eq. 6).

Com a repetição do procedimento descrito para os novos candidatos gerados espera-se, se não a obtenção do ótimo global (o qual é teoricamente possível dentro de certas condições), ao menos uma boa redução nos valores inicialmente arbitrados.

Apresenta-se a seguir alguns dos exemplos analisados a partir da implementação da formulação proposta. O objetivo destas análises consistiu tanto no estudo do comportamento das estruturas selecionadas como na verificação da aplicabilidade do método de otimização empregado. Em todos os exemplos a altura da seção transversal foi limitada de forma a não conduzir a peças superarmadas, sendo a inércia flexional determinada a partir da expressão proposta por Branson.

A primeira estrutura analisada, ilustrada na Figura 1, consiste em uma grelha composta por duas vigas de oito metros de comprimento cada, que se interceptam em seus pontos médios. O carregamento, de caráter permanente, é de 24 kN/m uniformemente distribuído, sendo o peso próprio computado de forma automática. A base da seção transversal foi fixada em 20 centímetros, tomando-se as alturas como variáveis de projeto. Em relação aos materiais, foram empregados concreto C-20 e aço CA-50A. Não foi considerado engastamento elástico nos pilares, estando as vigas simplesmente apoiadas nestes.

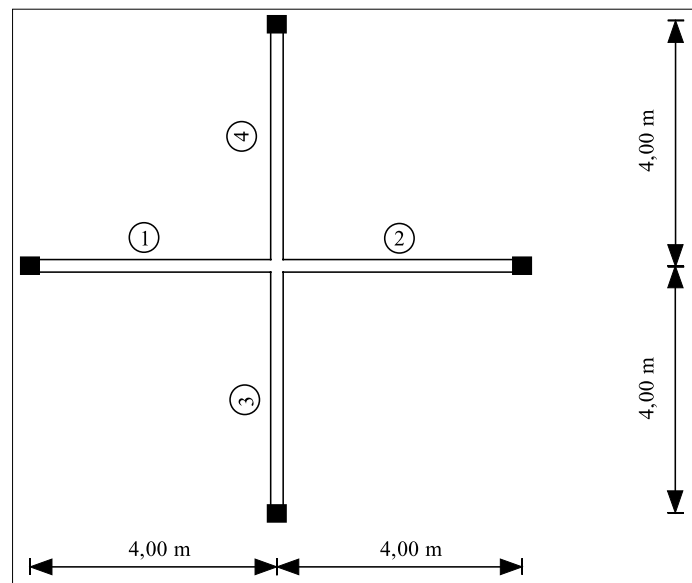


Figura 1: Croqui do Exemplo 1.

Partindo-se de uma altura inicial comum a todos os elementos, igual a 0,80 metros, e impondo a todos as mesmas dimensões finais, obteve-se uma redução de aproximadamente 24,3 por cento no volume total de concreto (V_c), conforme indicado na Tabela 1. Nesta mesma Tabela, observa-se os esforços e deslocamentos máximos obtidos (M_{max} e δ_{max} , respectivamente) sendo os momentos fletores no nó central determinantes para a limitação da altura da seção (os deslocamentos listados já consideram o efeito de longa duração).

Tabela 1: altura inicial e altura ótima (Exemplo 1)

	h (m)	V_c (m ³)	M_{max} (kN.m)	δ_{max} (cm)
Inicial	0,8000	2,560	224,00	1,003
Ótimo	0,6055	1,938	216,22	2,468

A mesma estrutura foi novamente analisada para duas variáveis, quais sejam, uma mesma altura de seção para os elementos 1 e 2 (altura h_1) e uma mesma altura para os elementos 3 e 4 (altura h_2). A partir da análise desta estrutura foram obtidos dois pontos de ótimo (devido à simetria), verificando-se que a situação anteriormente ilustrada, para a qual todas as vigas assumiram uma mesma altura, corresponde a um ponto que atende às restrições do problema, consistindo no entanto em um ponto de mínimo local. A situação descrita pode ser visualizada com o auxílio da Figura 2, na qual os segmentos

retos representam isovalores da função objetivo (volume total de concreto) e as curvas representam as restrições ativas g_m e g (alturas mínimas para momentos e flechas para cada uma das duas vigas). Desta forma, os valores da função que atendem simultaneamente a todas as restrições estão situados acima das curvas de maior valor para cada par de ordenadas (h_1, h_2). Para todos estes, os momentos fletores são limitadores da altura da seção (restrições ativas).

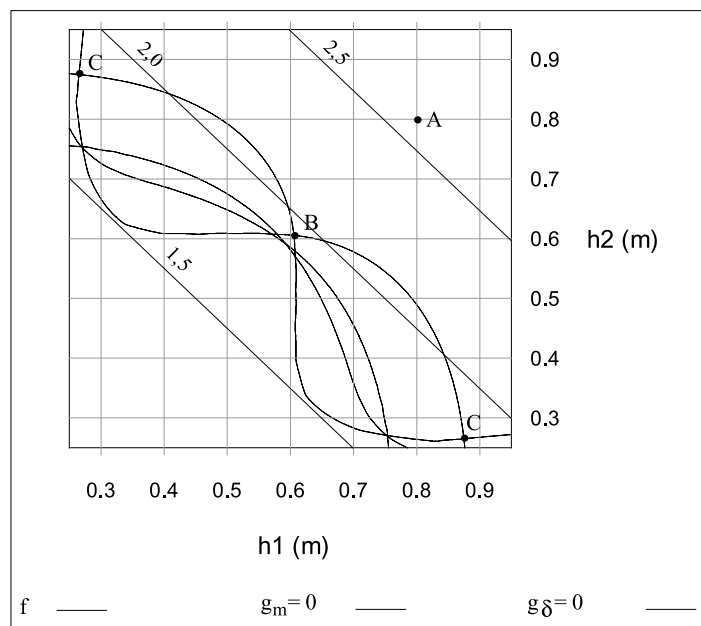


Figura 2: Duas variáveis (Exemplo 1).

Ainda com base na Figura 2 verifica-se que, apesar da função objetivo ser linear, as restrições do problema são não lineares, gerando uma região não convexa e, portanto, suscetível à existência de mínimos locais.

As ordenadas dos pontos designados na Figura pelas letras A (volume inicial), B (mínimo local) e C (mínimos globais), bem como os volumes absolutos e relativos correspondentes, são listados na Tabela 2.

Tabela 2: Altura inicial e alturas ótimas (Exemplo 1)

	h_1 (m)	h_2 (m)	V_c (m ³)	V_c / V_c ini
Inicial	0,8000	0,8000	2,560	1,000
Min local	0,6055	0,6055	1,938	0,757
Min globais	0,8746	0,2651	1,824	0,712
	0,2651	0,8746	1,824	0,712

Observa-se a partir dos dados da Tabela uma redução adicional de cerca de 5,9 por cento no volume para as seções correspondentes aos mínimos globais (alturas finais diferentes) em relação ao volume correspondente ao mínimo global (alturas finais iguais). Desta forma, ainda que a estrutura apresente simetria tanto de geometria como de carregamento, a situação que conduz ao menor volume de concreto não corresponde a uma mesma altura para a seção transversal das vigas. Ao contrário, verificou-se que seções transversais idênticas em todos os elementos da grelha corresponde à situação de menor rigidez possível ao conjunto. Esta constatação pode ser facilmente comprovada pela resolução de um problema de otimização que objetivasse minimizar a inércia de uma estrutura análoga à do presente exemplo, mantendo o peso total constante (ou o somatório das alturas H constante) e tendo como variáveis de projeto as alturas das seções transversais dos dois elementos que se interconectam. Ter-se-ia, desta forma, a seguinte formulação:

$$\text{Min} \quad f = \sum I_i \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

$$\text{S. a.} \quad \sum h_i = H \quad (13)$$

A resolução analítica deste problema, particularizada para seções retangulares e de mesma largura da base, conduz a:

$$f = \frac{b}{12} (h_1^3 + h_2^3) = \frac{b}{12} [h_1^3 + (H - h_1)^3] \quad (14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial h_1} = 0 \rightarrow h_1 = h_2 = \frac{H}{2} \quad (15)$$

Uma vez que b e H são sempre positivos, as segundas derivadas positivas indicam tratar-se de um ponto de mínimo. Verifica-se portanto que uma pequena redução nas dimensões de um elemento, acompanhada de igual acréscimo no outro, conduzirá invariavelmente a um ganho na rigidez do conjunto ou, de forma alternativa, reduzir o peso do conjunto sem perda de rigidez.

Na seqüência são apresentados os resultados obtidos a partir da análise de uma outra estrutura a qual, como a primeira, apresenta dois eixos de simetria, porém composta por dez vigas, ou quarenta elementos (Figura 3). Nesta estrutura, as ações são transferidas a partir das lajes analisadas isoladamente e submetidas a um carregamento total uniformemente distribuído de 4,5 kN/m² (sendo 1,5 kN/m² destes devidos às ações variáveis verticais), aplicando-se ainda um carregamento, também uniforme, igual a 3,6 kN/m ao longo de todas as vigas perimetrais (vigas V1, V5, V6 e V10). Novamente, o peso próprio das vigas foi computado de forma automática. Em todas as vigas a base da seção transversal foi fixada em 0,20 metros, sendo considerados ainda concreto C-20 e aço CA-50A. Não foi considerado engastamento elástico nos pilares.

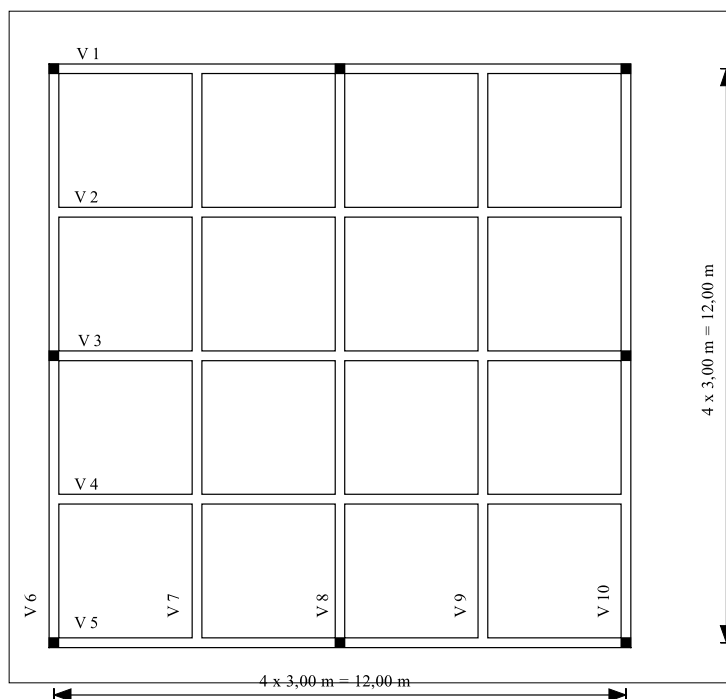


Figura 3: Croqui do Exemplo 2.

Inicialmente todas as vigas foram limitadas a uma mesma altura de seção transversal, constituindo portanto um problema com uma única variável e duas restrições. Partindo de uma altura inicial de 0,80 metros, obteve-se uma altura ótima de aproximadamente 0,6485 metros, correspondendo a uma redução no volume total de concreto da ordem de 18,9 por cento (Tabela 3). Conforme se verifica a partir dos valores da Tabela, a altura da seção foi limitada em função do deslocamento vertical, máximo no nó central.

Tabela 3: Uma variável (Exemplo 2)

	h (m)	Vc (m ³)	Mmax (kN.m)	δ max (cm)
Inicial	0,8000	19,200	227,06	2,180
ótimo	0,6485	15,565	211,16	4,000

Sabendo que a nova altura determinada consiste unicamente em um ponto de mínimo local, novas análises foram efetuadas, de modo a se verificar o ganho efetivo a partir desta situação (daqui por diante designada como caso A). Cabe observar que dificilmente um método convencional de programação matemática, baseado na busca de direções de descida, escaparia deste ponto. Já o método

empregado no presente trabalho, ao aceitar também direções que acarretem em aumento no valor da função, mostra-se pouco dependente da solução inicial.

As novas situações analisadas foram as seguintes:

- vigas externas com altura h_1 e vigas internas com altura h_2 . Designado como caso B, com duas variáveis de projeto;
- vigas externas com altura h_1 , vigas internas horizontais (V2 a V4) com altura h_2 e vigas internas verticais (V7 a V9) com altura h_3 (caso C, três variáveis);
- cada viga podendo assumir uma altura (caso D, dez variáveis);
- cada elemento podendo assumir uma altura (caso E, quarenta variáveis).

A Tabela 4 apresenta os resultados obtidos para os casos B e C, comparando a redução no volume de concreto obtida tanto a partir da altura ótima para o caso A como para a mesma fixada em 0,80 metros (designado por caso 0).

Tabela 4: Uma a três variáveis (Exemplo 2)

caso	h_1 (m)	h_2 (m)	h_3 (m)	V_c (m ³)	$V_c / V_c(0)$	$V_c / V_c(A)$
0	0,8000	0,8000	0,8000	19,200	1,000	1,234
A	0,6485	0,6485	0,6485	15,565	0,811	1,000
B	0,4168	0,6834	0,6834	13,842	0,721	0,889
C	0,5137	0,1659	0,7858	11,784	0,614	0,757

A partir dos resultados apresentados pode-se concluir que, uma vez que as vigas internas da estrutura não puderam sofrer redução maior que a obtida no caso A em função da limitação de suas deformações, é vantajoso que se desvincule as vigas perimetrais, uma vez que estas últimas possuem menor vão, bem como estão submetidas a um carregamento de menor intensidade. Adicionalmente, verifica-se que, apesar da simetria da estrutura, situação mais econômica é obtida ao permitir que as vigas internas, perpendiculares entre si, assumam diferentes alturas, resultando em aumento de rigidez do conjunto para um mesmo consumo de material ou, como foi o caso, manutenção da rigidez original com redução no consumo (cerca de 24,3 por cento em relação ao caso A, como indica a última coluna da Tabela). Lembra-se que o ótimo para o caso C é obtido igualmente invertendo-se os valores de h_2 e h_3 .

De forma geral, verificou-se na análise da estrutura do presente exemplo o aumento significativo do número de pontos de mínimo local em função do aumento no número de distintas seções permitidas à estrutura (por exemplo,

os ótimos obtidos nos casos A e B são mínimos locais do caso C, e assim por diante). Em função disto, bem como da limitação prática das seções a um número reduzido, apresentam-se a seguir, em separado, os resultados das análises efetuadas para maior número de variáveis.

Uma vez que o método do Recozimento Simulado consiste em um método baseado em probabilidades, e seus resultados são de certa forma função de números pseudo-randômicos, o sucesso do método na minimização global está diretamente relacionado tanto à complexidade do problema abordado como ao correto ajuste de parâmetros envolvidos. Desta forma, de modo a se verificar a constância dos resultados, foi efetuada 100 vezes a análise do mesmo problema contendo dez variáveis de projeto. Os resultados deste problema, designado como caso D, foram obtidos facultando-se às vigas do exemplo que assumissem alturas diferentes, e podem ser sintetizados da seguinte forma:

Volume inicial:	19,200 m ³
Pior resultado:	11,124 m ³
Média dos resultados:	9,001 m ³
Melhor resultado:	8,819 m ³
Número de ocorrências do melhor resultado:	70
Número médio de cálculos da função:	24.631
Redução no volume (relativa ao caso 0):	54,1 %
Redução no volume (relativa ao caso A):	43,3 %

As alturas finais, correspondentes ao menor volume obtido, são apresentadas na Tabela 5, lembrando que a dupla simetria da estrutura possibilitou que outra combinação conduzisse ao mesmo volume final. Pode-se observar a alternância na altura das vigas, não se obtendo a mesma altura em nenhum cruzamento de vigas. Observa-se ainda uma das vigas centrais assumindo dimensão bastante superior às demais (V8), com o conseqüente alívio das vigas imediatamente adjacentes (V7 e V9). Com relação ao número de ocorrências do melhor resultado, verificou-se que este número é aumentado de forma sensível com o incremento na temperatura inicial, acarretando no entanto em aumento também no número de cálculos da função necessários à convergência.

Tabela 5: Alturas ótimas para dez variáveis (Exemplo 2)

viga	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10
altura (m)	0,299	0,336	0,303	0,336	0,299	0,359	0,128	1,129	0,128	0,359

Procedimento análogo foi adotado para a análise da mesma estrutura para 40 variáveis (cada elemento podendo assumir uma altura distinta dos demais). Resumo dos resultados:

Volume inicial:	19,200 m ³
Pior resultado:	11,123 m ³
Média dos resultados:	8,795 m ³
Melhor resultado:	8,403 m ³
Numero médio de cálculos da função:	106.921
Redução no volume (relativa ao caso 0):	56,2 %
Redução no volume (relativa ao caso A):	46,0 %
Redução no volume (relativa ao caso D):	4,7 %

Com relação ao número de cálculos da função necessários para a solução do problema com o emprego do Simulated Annealing, observa-se que este número é bastante elevado quando comparado aos métodos de programação matemática, sendo portanto este método indicado em especial para problemas nos quais as técnicas usuais não são eficientes. Ainda assim, observou-se que o Simulated Annealing, quando aplicado aos exemplos do presente trabalho, caminha rapidamente às vizinhanças do ponto ótimo. A Figura 4 apresenta os resultados obtidos para o caso D, verificando-se que após 4400 cálculos da função o erro já é inferior a um por cento. Desta forma, a definição de um critério de parada menos rigoroso pode conduzir a uma redução significativa no número de cálculos necessários. Cabe observar que, para 10 variáveis, por exemplo, o número de valores investigados para a função, em média 24.631, corresponde apenas a aproximadamente um em cada 23,4 milhões dos valores possíveis, caso se desejasse obter apenas alturas múltiplas de 10 centímetros, permitindo-as variar de 0,1 a 1,5 metros.

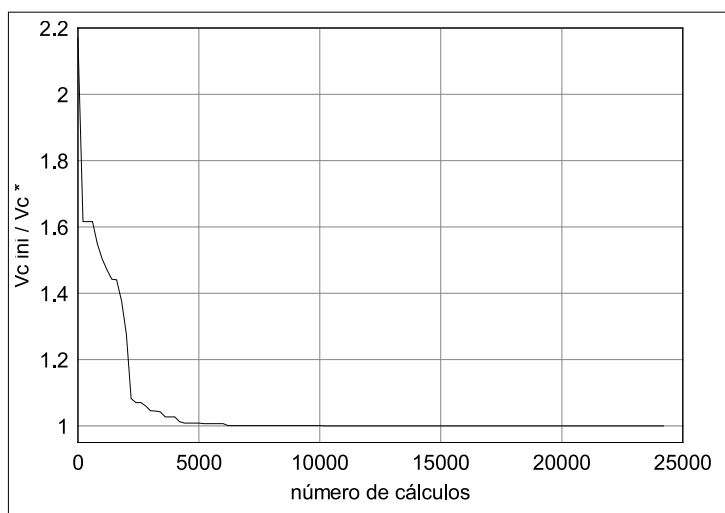


Figura 4: Evolução da otimização para dez variáveis (Exemplo 2).

A Figura 5 apresenta um gráfico no qual foi relacionado o número médio de cálculos da função com o número de variáveis de projeto. Observa-se uma relação aproximadamente linear, sugerindo que a eficiência relativa do método aumenta com a dimensão do problema, uma vez que o número de possíveis combinações cresce de forma exponencial.

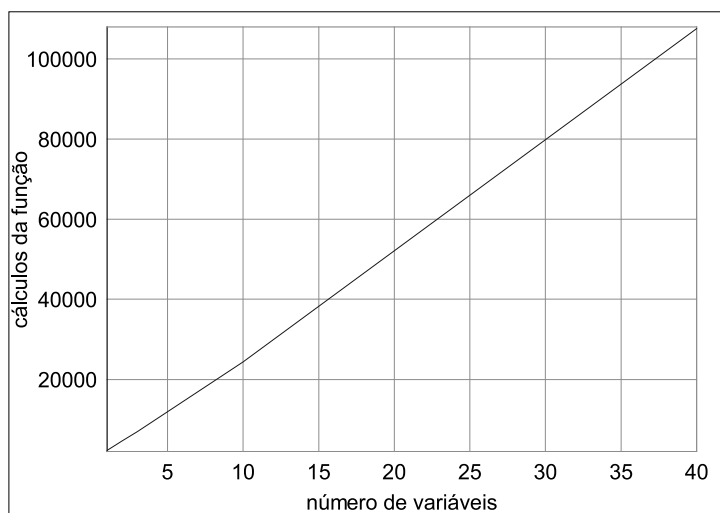


Figura 5: Relação entre número de cálculos e dimensão do problema (Exemplo 2).

5. Conclusões e considerações finais

Foi apresentada uma formulação para a determinação do volume mínimo de concreto em estruturas analisadas pelo modelo de grelha. Pelo fato da determinação das seções transversais dos elementos ser efetuada fundamentalmente com base na experiência do projetista, o programa desenvolvido a partir da formulação proposta pode constituir-se em valioso subsídio na etapa de pré-dimensionamento, permitindo identificar tanto os elementos mais solicitados como aqueles que eventualmente poderiam ser eliminados.

Considerando o caráter iterativo do dimensionamento estrutural, aliado ao alto grau hiperestático das grelhas de edifícios, entende-se como adequada a abordagem via técnicas de otimização. Neste sentido, verificou-se também a adequação do método empregado, especialmente devido à presença de mínimos locais mesmo para um pequeno número de variáveis.

No presente trabalho incluiu-se apenas exemplos simétricos, para os quais se supunha que a configuração final deveria conduzir a seções idênticas para os elementos igualmente carregados. Os resultados obtidos, no entanto, sugerem

que a alteração relativa nas dimensões dos elementos deve conduzir a uma redução no volume de concreto sem comprometimento da rigidez do conjunto. A formulação apresentada, apesar de desenvolvida visando sua aplicação ao conjunto das vigas de um pavimento, pode ser empregada sem maiores adaptações à análise de lajes nervuradas.

O presente estudo não leva em consideração implicações estéticas ou de outra ordem, como o custo de formas, por exemplo, cabendo ao projetista a devida compatibilização.

Referências

- Associação Brasileira de Normas Técnicas (1978). *NBR 6118: Projeto e execução de obras de concreto armado*. Rio de Janeiro, ABNT.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas (2003). *NBR 6118: Projeto e execução de obras de concreto armado*. Rio de Janeiro, ABNT.
- Belegundu, A. K. and Chandrupatla, T. R. (1999). *Optimization Concepts and Applications in Engineering*. Prentice Hall, New Jersey.
- Brandão, A. M. S. and Pinheiro, L. M. (1999). *Estados limites de utilização*. Apostila. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos.
- Cohn, M. Z.; Fellow and Dinovitzer, A. S. (1994). Application of structural optimization. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 120, n. 2, p. 617-50, Feb.
- Corana, A.; Marchesi, M.; Martini, M. and Ridella, S. (1987). Minimizing Multimodal Functions of Continuous Variables with Simulated Annealing Algorithm. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 13, 262-280.
- Kirkpatrick, S.; Gelatt, C. D. and Vecchi, M. P. (1983). *Optimization by Simulated Annealing*. Science 220, 4598, 671-680.
- Kripka, M. and Antunes, H. M. C. C. (2001). Optimum Support Positions in Building grillages. In. *VII International Conference on Computer Aided Optimum Design of Structures*, 2001, Bologna, Southampton, UK WIT Press, 2001, p. 117-126
- Kripka, M. (2003). Minimum Cost of Reinforced Concrete Building Grillages by Simulated Annealing. In: *WCSMO-5 – The Fifth World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2003, Lido di Jesolo, Veneza. Short papers of the fifth world congress on Structural and Multidisciplinary Optimization. Milão: Italian Polytechnic Press, 2003. p. 407-408.
- Metropolis, N.; Rosenbluth, A.; Rosenbluth, M.; Teller, A. and Teller, E. (1953). Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *J. Chem. Phys.* 21, 1087-1090.
- Michalewicz, Z. and Schoenauer, M. (1996). Evolutionary Algorithms for Constrained Parameter Optimization Problems. *Evolutionary Computation*, MIT Press, 4(1): 1-32.
- Powell, M. J. D. (1998). *Direct Search Algorithms for Optimization Calculations*. Numerical Analysis Report, DAMTP 1998/NA04, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Silver Street, Cambridge, England CB3 9EW, march.
- Schmit, L. A. (1960). Structural Design by Systematic Synthesis, Proceedings. *2nd Conference on Electronic Computation*, ASCE, New York, 105-122.

Minimum weight of concrete in building grillages

Abstract

This work presents a formulation developed to the minimization of the volume of concrete in reinforced concrete buildings grillages. An association of the displacement method with optimization techniques seeks to obtain the cross-sectional dimensions which lead to the smallest volume of concrete, attending to the ultimate loads (failure) and service loads (deflections). The constraints imposed in the formulation of the problem related to the limitation of the displacements include the effects of instantaneous and long-term deflections, considering an equivalent inertia with the contribution of concrete between cracking (Branson). The determination of the minimum height to each cross-section due to the flexural strength can be performed by fixing neutral axis position or by the maintenance of the section as underreinforced. Due to the relative complexity of the formulation as well as to the existence of local minimas, even for a small number of variables, it has been opted by the utilization of a stochastic method, being implemented the Simulated Annealing. In order to verify the efficiency of the proposed procedure some of analyzed structures are presented, as well as the results obtained from the implementation of the proposed formulation.

1. Introduction

The main reason normally aimed for the little application of the optimization techniques to the practical problems of structural engineering consists of the complexity of the model generated, described by non-linear functions and generating a non-convex space of solutions (several points of optimum), problems for which the resolution by traditional techniques of mathematical programming has shown little efficiency. For the resolution of these kinds of problem the heuristics methods have been performing an important role, since they involve only function values in the analysis, being not necessary the existence of unimodality or even continuity of their derivatives. Otherwise, they present as disadvantage the necessity of a big number of functions evaluations. The present work shows an application of Simulated Annealing to the optimization of cross-sections of structural elements of buildings in reinforced concrete, ana-

lyzed by the grillage model. Even if due to limitations of economic and aesthetic order only a reduced number of distinct cross-sections for the beams can be considered, the possible number of combinations is enough elevated. Because the model has a high degree of indeterminacy, the stresses are redistributed by altering the relative stiffness of the elements when a cross-section of a single beam is changed.

2. Formulation to the minimization of the volume of concrete

The goal defined by the developed formulation consists in the minimization of the volume of concrete of linear elements on a building floor, and can be written as in Eq.1, being n the total number of elements and bw_i , h_i and l_i , respectively, the width, the height and the length of i -ésim element. Since the number of different cross-sections on the same floor is restrict, the number of design variables is very low relatively to the number of elements. In this way, while the number of terms of the objective function is equal to the number of elements of the floor, each of the restraints is applied only m times, being m the number of distinct cross-sections.

The first constraints imposed to the problem are related to service limit state, being considered only the limitations of maximum deflections. The maximum deflection δ_{max} in each element is determined with the consideration of long term loads, to which are added the displacements obtained by the consideration of the cracking of concrete (Branson). This maximum deflection is limited by δ_{adm} , or admissible deflection.

Regarding the maximum bending moments, constraints were considered related to the minimum height for each group of elements. With this purpose h_j is defined as the height assigned to the group and h_{min} the minimum height needed for the maintenance of the cross-section as underreinforced. In function of the above considerations, the problem was formulated as listed in Eqs. (2) to (4). The consideration of the constraints in the computational implementation was made by using a dynamic penalty technique, known as annealing penalty (Michalewicz 1996). Similar to the optimization technique, a penalty factor has an initial value relatively low, which is gradually increased due to the temperature reduction. In this way, the penalized function $F(x)$ can be written as in Eqs. (5) and (6), where $P(X)$ is the function which represents the assembly of the penalized constraints. In this way, even if the problem starts from unfeasibles solutions, small violations of constraints are initially allowed.

3. Examples

The described formulation was implemented on a software developed for the analysis of grillages by the Displacement Method, in which was inserted a routine of optimization developed in the form proposed by Cornana et al. (1987). In this way, both the data input and the form of presentation of the results are familiar to the engineer accustomed to the use of structural analysis software, being generated separately file with the description from the evolution of the optimization process. Material properties (longitudinal and transversal modules of elasticity) are evaluated automatically from the input, by the user, of the value of the strength of the concrete. The initial height of the cross-section can be supplied by the user or estimated automatically, since that value constitutes the initial solution to the optimization problem., little influencing in the result. From these initial heights are calculated the flexural and torsional rigidity (these last reduced to consider cracking of the concrete). Finally, dead and live loads should be supplied separately, being the own weight computed automatically. The dimensioning of the elements was made according to Brazilian Code, NBR-6118 (1978).

In the sequence of this work some of the examples analyzed from the implementation of the proposed formulation are presented. The objective of these analyses consisted in the study of the behavior of the structures selected as well in the verification from the effectiveness of the technique employed. In all of the examples the height of the elements was limited to do not drive to overreinforced sections, being the flexional rigidity determined from the expression proposed by Branson.

The first structure analyzed, illustrated in the Figure 1, consists of a grillage composed by two simply-supported beams, both with a total length of eight meters. The total load, considered only as dead load, is of 24 kN/m uniformly distributed, being the own weight computed automatically. The width of all the elements was set to 20 centimeters, being the heights the design variables. Regarding to the material properties concrete C-20 and steel CA-50A were considered.

Starting from the same initial height for all elements, taken as 0,80 meters, and by imposing to all of them the same final dimensions, it was obtained a reduction of about 24,3 percent in the volume of concrete V_c , according to Table 1. In this same Table, it can be observed the bending moments and maximum displacements obtained (M_{max} and δ_{max} , respectively) being the bending moments in the central nodes determinant for the limitation of the height of the beams (the displacements listed already take into account long-term effects).

The same structure was analyzed considering two design variables, limiting elements 1 and 2 to same height h_1 and elements 3 and 4 to height h_2 . By the

analysis of this situation two points of global optimum were obtained, due to the symmetry. It can be verified that the situation previously illustrated, for which all the elements assumed the same final cross-sectional dimensions, corresponds to a point which satisfies the constraints of the problem, however consisting on a local minimum. The situation described can be visualized with the aid of the Figure 2, where the straight lines represent the objective function (total volume of concrete) and the curves represent the active constraints g_m and g_d (minimum heights for moments and deflections for each beam). In this way, the values from the function that attend simultaneously all constraints are situated above the curves of highest value for each pair of coordinates (h_1, h_2) . For all of them, bending moments limit the height of the elements (active constraints).

Still based on Figure 2 it can be observed that, despite of the objective function be linear, the constraints of the problem are non linear, generating a non convex region and, therefore, being susceptible to the existence of local minimums. The coordinates of points assigned in the Figures by the letter A (initial volume), B (local minimum) and C (global minimum), as well as the corresponding absolute and relative are listed in the Table 2. It can also be observed that, even if the structure presents symmetry, the situation that drives to the smallest volume of concrete does not correspond to the same height for the cross-sections of the elements.

With the objective of generalize the conclusions obtained for the example above, another structure was analyzed. As the first, it presents two axes of symmetry, and is composed by ten beams, or forty elements (Figure 3). In this structure, the actions are taken from slabs which were submitted to a uniformly distributed load of 4.5 kN/m² (being 1.5 kN/m² due to live loads), and from a uniformly distributed load of 3.6 kN/m applied along the external beams (V1, V5, V6 and V10). The weight of the beams was computed automatically. The width of all beams was fixed (0.20 meters). Again, concrete C-20 and CA-50A steel were considered.

Initially all beams were limited to the same height, therefore constituting a problem with an only variable and two constraints. Starting from an initial height of 0.80 meters, an optimum height of 0.6485 meters was obtained, corresponding to a reduction in the volume of concrete of about 18.9 percent (Table 3). As it can be verified from the Table, the height was limited in function of the vertical displacement on the central node.

Following the supposition that the new determined height consists only in a local minimum another analyses were performed, in order to verify the effective reduction on concrete consumption starting from this situation (assigned as case A). It can be stressed that, since the adopted method accepts movements which increase the value of the function, it is weakly dependent of the starting point.

New situations were analyzed as follows: external beams with height h_1 and internal beams with height h_2 . Assigned as case B, with two design variables; external beams with height h_1 , internal beams (horizontal, V2 to V4) with height h_2 and internal beams (vertical, V7 to V9) with height h_3 (case C, three design variables); each beam being able to assume a different height (case D, ten design variables); and finally, each element being able to assume a different height (case E, forty design variables).

Table 4 presents the results obtained for the cases B and C, comparing the reduction on the volume of concrete obtained relatively to case A and to fixed height of 0.80 meters (assigned by case 0).

From the previous results presented it can be concluded that, since the height of the internal beams can not be reduced more than in case A due to the deflection limitation, it can be advantageous to free the external beams to assume another height, since their lengths are smaller than the internal ones. In addition, it can be verified that, despite of the symmetry of the structure, a more economic situation is obtained by permitting the perpendicular internal beams to assume different heights, increasing the total stiffness without reducing the concrete consumption or, as the presented case, by the maintenance of the original stiffness with reduction in the consumption (about 24.3 percent regarding the case A, as indicated. It must be remembered that the optimum for case C is obtained equally by the inversion of h_2 and h_3 .

On general form, it was verified a significant increase on the number of local minimum points due to the increase in the number of distinct cross-sections allowed (e.g., the optimum obtained to cases A and B are local minimum of the case C, and so on). In function of this, as well as from the practice limitation of different cross-sections to a reduced amount, the results of the analyses performed to bigger number of variables are presented separately.

Since Simulated Annealing method is based on probabilities, and since its results are function of pseudo-random numbers, the success of this method is directly related both to the complexity of the problem and to the adjustment of the parameters. In this way, in order to verify the constancy of the results, the analysis of the problem containing 10 design variables was performed 100 times. The results of this problem, assigned as case D, were obtained by allowing all the beams to assume different heights. The final heights corresponding, to the smallest volume obtained are presented in Table 5, remembering that due to double symmetry of the structure another combination drove to the same final volume. It can be observed that the heights are alternated in a way that there are no beams with the same height in each crossing (node). It can also be verified the great height assumed by one of central beams (V8), with the consequent relief of the beams immediately adjacent (V7 and V9). Regarding the number of occurrences of the best result, this number can be highly increased

by increasing also the initial temperature. However, this will probably lead to a great number of function evaluations until the convergence be achieved. Analogous procedure was adopted to the analysis of the same structure considering 40 design variables (each element being allowed to assume a distinct height).

Regarding the number of function evaluations needed to the solution of the problem with Simulated Annealing, it can be clearly observed that this number is very high when compared to those obtained by mathematical of programming. Therefore, this approach is specially indicated to problems in the which the usual techniques are not efficient. Nevertheless, it was observed that Simulated Annealing, when applied to the examples of the present work, leads rapidly to the neighborhoods of the optimum solution. Figure 4 presents the results obtained to case D, being possible to observe that after 4400 function evaluations the error is lower than 1 percent. In this way, a definition of a stop criterion less rigorous can drive to a significant reduction in the number of calculations.

Figure 5 presents the obtained relation between the average number of function evaluations and the number of design variables. The relation almost linear suggests that the relative efficiency of Simulated Annealing is increased with the dimension of the problem, since the number of possible combinations grows in exponential form.

4. Concluding remarks

This work presented a formulation to the determination of minimum volume of concrete in structures analyzed by the grid model. Since the determination of the cross-section dimensions of the elements is performed mainly based on the former experience of the designer, the program developed from the proposed formulation can constitute a valuable tool in the phase of dimensioning, allowing to identify the elements more stressed as well as those that eventually could be deleted from the structure.

Considering the iterative character of the structural dimensioning, and also the high degree of indeterminacy of building grillages, the application of optimization techniques to the problem was found to be very adequate. In this sense, it was also the applicability of Simulated Annealing to this kind of problem, specially due to the existence of local minimums even for a small number of variables.

In the present work just symmetrical structures were analyzed, for which it was supposed that the final configuration should drive to cross-sections identical for equally loaded elements. The results obtained, however, suggest that the relative alteration in the dimensions of the elements can lead to a reduction in the volume of concrete without reduction in the global stiffness.