

# Instabilidade das armaduras longitudinais em pilares de concreto armado

Salete Souza de Oliveira Buffoni<sup>1</sup>

Raul Rosas e Silva<sup>2</sup>

Trabalho recebido em 27/10/2004 e aprovado para publicação em 23/02/2005.

## Resumo

O presente trabalho apresenta um estudo sobre a instabilidade das armaduras longitudinais em pilares de concreto armado submetidos a carregamento axial levando em conta o espaçamento entre estribos, o diâmetro e arranjo dos estribos na seção transversal e o diâmetro das armaduras longitudinais. Para este propósito um método analítico para a avaliação da flambagem da armadura longitudinal é proposto, considerando-se as barras longitudinais restringidas pela rigidez axial ou à flexão dos estribos. Admite-se que a armadura longitudinal funciona como uma coluna esbelta. Consideram-se duas formas de modelagem da atuação dos estribos: como apoios elásticos discretos e como base elástica contínua. São fornecidos as cargas críticas e caminhos pós-críticos para tais casos. Como resultado deste estudo, apresenta-se uma proposta para dimensionamento racional dos estribos que permite estudar diferentes alternativas em um ábaco de utilização simples para projeto.

*Palavras-chave:* flambagem; armaduras longitudinais e transversais; pilares; concreto armado.

<sup>1</sup> D.Sc. Professora Adjunta do Departamento de Ciências dos Materiais. Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica - EEIMVR - Universidade Federal Fluminense - UFF - Av. dos Trabalhadores, 420, Vila Santa Cecília, Volta Redonda, RJ - Brasil - 27225-125. E-mail: salete@vm.uff.br.

<sup>2</sup> Ph.D. Professor Associado do Departamento de Engenharia Civil - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-RJ. Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea - Rio de Janeiro, RJ - Brasil - 22453-900. E-mail: raul@civ.puc-rio.br.

## 1. Introdução

Um dos primeiros estudos analíticos sobre a instabilidade das armaduras longitudinais em estruturas de concreto armado foi efetuado por Bresler and Gilbert (1961), que empregaram critérios de análise elástica para encontrar relações entre a flambagem da armadura e parâmetros como espaçamento e rigidez dos estribos. Um estudo semelhante ao de Bresler and Gilbert (1961) foi realizado por Vallenás et al. (1977) e Scribner (1986), onde o espaçamento máximo da armadura transversal é determinado pelo cálculo da carga crítica da coluna limitada nas extremidades tendo um comprimento igual ao espaçamento entre os estribos. Esta interpretação do fenômeno se mostra muito restritiva, visto que a flambagem pode envolver vários espaçamentos entre estribos.

O estudo experimental de pilares de concreto armado, com a finalidade de se visualizar o comportamento das armaduras longitudinais tem atraído atenção de vários pesquisadores nos últimos quarenta anos dentre os quais citam-se os trabalhos de Pfister (1964), Vallenás et al. (1977), Kaar and Corley (1977), Sheikh and Uzumeri (1980), Scott et al. (1982) e Moehle and Cavanagh (1985) que apresentam a flambagem das barras longitudinais em pilares de concreto armado fortemente confinados envolvendo os próprios estribos.

Em face do exposto, o presente trabalho tem como ponto de partida os resultados da pesquisa desenvolvida por Buffoni (2004) que estuda a flambagem das armaduras longitudinais em pilares de concreto armado submetidos a carregamento axial levando em conta o espaçamento entre os estribos, o diâmetro e arranjo dos estribos na seção transversal e o diâmetro das armaduras longitudinais.

Para tal propósito um método analítico para a avaliação da flambagem da armadura longitudinal foi descrito, considerando-se as barras longitudinais restringidas pela rigidez axial ou à flexão dos estribos. Estudaram-se particularmente dois casos. No primeiro caso, considerou-se a armadura longitudinal como uma coluna e os estribos como apoios discretos. No segundo caso, considerou-se a armadura longitudinal como uma coluna sobre base elástica, onde a base elástica é composta pelos estribos.

A dedução da formulação dos modelos matemáticos que serão abordados está fora do escopo deste artigo, procurando-se mostrar diretamente a aplicabilidade prática de tais modelos, por meio de comparações com resultados experimentais da literatura. Estimula-se o leitor a consultar Buffoni (2004), que contempla de forma minuciosa as hipóteses e formulações inerentes a cada modelo.

## 2. Formulação

### 2.1 Introdução

O modelo matemático das armaduras longitudinais e transversais para a determinação da carga crítica apresenta-se na Figura 1, onde os estribos são representados esquematicamente como apoios elásticos intermediários unilaterais, cuja rigidez  $K$  depende das características mecânicas e geométricas do aço.

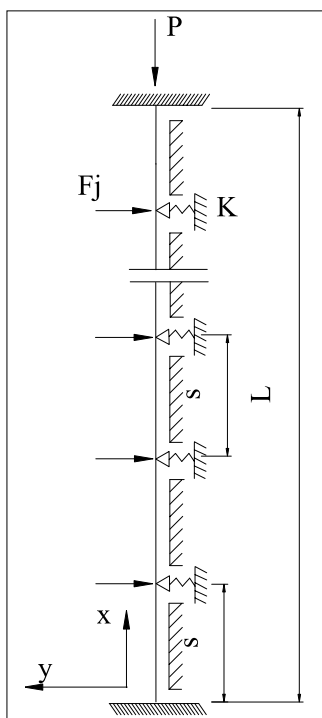


Figura 1: Modelo matemático da armadura longitudinal e transversal.

O comprimento da coluna é designado por  $L$ ,  $s$  é o espaçamento entre estribos e  $F_j$  são as forças correspondentes aos apoios elásticos  $j$  e podem ser escritas como:

$$F_j = Kw_j \Rightarrow w_j = \frac{F_j}{K} \quad (1)$$

onde  $w_j$  é o deslocamento do apoio genérico. Neste trabalho, adotam-se as hipóteses usuais no campo da resistência dos materiais considerando-se que a coluna e o carregamento estão num plano de simetria e que a seção permanece plana e perpendicular ao eixo, antes e após as deformações.

## 2.2 Variáveis adimensionais

- Caso discreto

Quando se quer realizar uma análise paramétrica, é importante que a mesma seja realizada com eficiência, para isto foram feitas as seguintes mudanças de variáveis e escolhidos os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad w_d = \frac{w}{L} \quad \Gamma = \frac{PL^2}{EI} \quad \eta = \frac{KL^3}{EI} \quad (2)$$

onde  $\xi$  é o parâmetro adimensional do deslocamento axial,  $w_d$  é o parâmetro adimensional do deslocamento lateral da coluna,  $G$  é o parâmetro adimensional do carregamento axial e  $h$  é o parâmetro adimensional da rigidez dos estribos.

- Coluna sobre base elástica

As variáveis adimensionais são as mesmas consideradas na expressão (2), com exceção do parâmetro adimensional da rigidez dos estribos que é dado por:

$$\eta = \frac{kL^4}{EI} \quad (3)$$

## 2.3 Campo de deslocamentos

Observações experimentais mostram que a forma flambada da armadura longitudinal se parece muitas vezes com uma função senoidal, que pode envolver vários espaçamentos entre estribos. Considerou-se a seguinte função para descrever o campo de deslocamentos da coluna:

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left( -\frac{m\pi x}{L} + \frac{m\pi x^2}{L^2} \left( 2 + (-1)^m \right) - \frac{m\pi x^3}{L^3} \left( 1 + (-1)^m \right) + \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right) \quad (4)$$

Esse campo de deslocamentos combina funções que descrevem um comportamento simétrico com funções antissimétricas. A consideração de deformações apenas do tipo simétrico, pode se tornar um pouco distante do que acontece na realidade, pois se verifica em muitos casos que a flambagem pode envolver modos não simétricos como mostra a Figura 2 do trabalho de Sheikh and Uzumeri (1980). Na forma adimensional o campo de deslocamentos torna-se:

$$w_d(\xi) = \sum_{m=1}^j a_m \left( -m\pi\xi + m\pi\xi^2 \left( 2 + (-1)^m \right) - m\pi\xi^3 \left( 1 + (-1)^m \right) + \sin(m\pi\xi) \right) \quad (5)$$

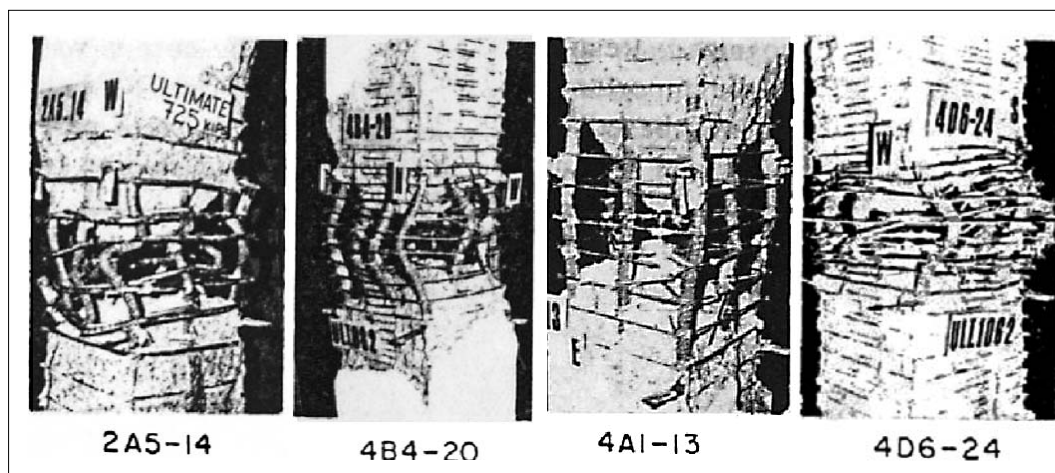


Figura 2: Aparência dos corpos de prova após os ensaios. (Sheikh and Usumeri 1980).

## 2.4 Integração ao longo da barra para obtenção das matrizes de rigidez elástica ( $K_f$ ) e rigidez geométrica ( $K_g$ )

A matriz de rigidez elástica representada por  $K_f$  é obtida da energia de deformação, a matriz de rigidez que leva em consideração os apoios laterais,  $K_m$ , é obtida da energia de deformação dos apoios laterais e a matriz de rigidez geométrica,  $K_g$  é obtida a partir da energia da carga axial. O estudo detalhado dessas expressões está detalhado em Buffoni (2004) Dessa forma, as expressões das matrizes de rigidez citadas considerando-se o campo de deslocamentos  $w_i$  e  $w_j$  para uma determinada condição de contorno são dadas a seguir.

- Da energia de deformação:

$$K_{fi,j} = \int_0^l \left( w_{d,\xi\xi_i} w_{d,\xi\xi_j} + w_{d,\xi\xi_i} w_{d,\xi\xi_j} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} + \frac{1}{2} w_{d,\xi\xi_i} w_{d,\xi\xi_j} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} \right) d\xi \quad (6)$$

- Da energia de deformação da mola:
  - Apoios distribuídos de forma discreta

$$K_{mi,j} = \eta \sum_{\xi=0}^{\xi=l} w_{di} w_{dj} \quad (7)$$

- Apoios distribuídos de forma contínua

$$K_{mi,j} = \eta \int_0^l w_{di} w_{dj} d\xi \quad (8)$$

- Da energia da carga axial:

$$K_{gi,j} = \int_0^l \left( w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} + \frac{1}{4} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} \right) d\xi \quad (9)$$

## 2.5 Solução do problema de autovalores

Considerando-se apenas a parcela quadrática nas expressões (6) a (9) tem-se o problema de autovalor, dado na seguinte expressão:

$$K_f + K_m - \Gamma K_g = 0 \quad (10)$$

Resolvendo-se a Equação (10) chega-se aos valores da carga crítica como a seguir:

$$\Gamma = K_g^{-1}(K_f + K_m) \quad (11)$$

### 2.5.1 Parâmetros de carga crítica

A partir da solução do problema de autovalores, foi possível encontrar os parâmetros de carga crítica para os casos discreto e contínuo.

No caso discreto, considerou-se que o comprimento da armadura envolvida na flambagem varia de um a dezesseis espaçamentos entre estribos. Dessa forma, substitui-se o campo de deslocamentos com um ou mais graus de liberdade descrito em (5) nas expressões para a obtenção das matrizes de rigidez e resolve-se o problema de autovalores expresso em (11) obtendo-se os valores adimensionais para a carga de flambagem. Os valores para estes casos encontram-se no trabalho de Buffoni (2004).

No caso contínuo, considerando-se a armadura longitudinal como uma coluna sobre base elástica, onde a base elástica é composta pelos estribos e substituindo-se o campo de deslocamentos descrito em (5) com um ou mais graus de liberdade apenas na parcela quadrática das expressões (6), (8) e (9) para obtenção das matrizes de rigidez e resolvendo-se o problema de autovalores expresso em (11) obtém-se os valores adimensionais para a carga crítica que se encontram em Buffoni (2004). A expressão (12) apresenta o parâmetro de carga crítica considerando-se apenas um termo na expansão modal.

$$\Gamma = \frac{15\pi^6 - 120\pi^4 + 15\pi^2\eta + \pi^4\eta - 240\eta}{5(5\pi^2 - 48)\pi^2} \quad (12)$$

## 2.6 Consideração das emendas das barras da armadura

Para se considerar o caso de emendas das barras na presente formulação, considerou-se um modelo onde a armadura é engastada em uma das extremidades e livre na outra como o modelo apresentado na Figura 3. Dessa forma, todos os passos realizados para a coluna engastada nas extremidades foram feitos para o caso da presença de emendas com a finalidade de se conhecer o comportamento das armaduras quando uma das extremidades está livre.

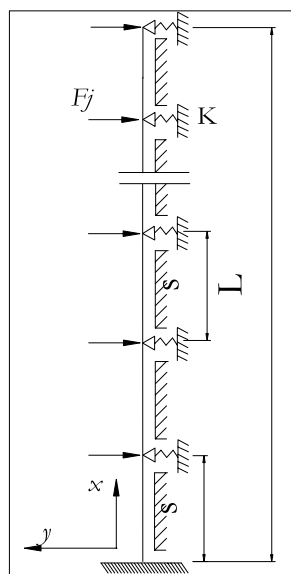


Figura 3: Modelo para consideração das emendas das barras da armadura.

## 2.7 Cálculo do parâmetro adimensional de rigidez, $\eta$

O valor numérico do parâmetro adimensional de rigidez depende da rigidez dos estribos,  $K$ , do módulo de elasticidade da armadura longitudinal,  $E$ , do momento de inércia da armadura longitudinal,  $I$  e do espaçamento entre estribos,  $s$  quando os estribos são considerados distribuídos continuamente ao longo da armadura.

## 2.8 Cálculo da rigidez dos estribos, $K$

O valor de  $K$  é função das características mecânicas e da geometria do estribo. Considera-se nesta formulação vários arranjos. A Figura 4 apresenta alguns casos. Neste trabalho considera-se a carga axial concêntrica existindo condições de perfeita simetria.

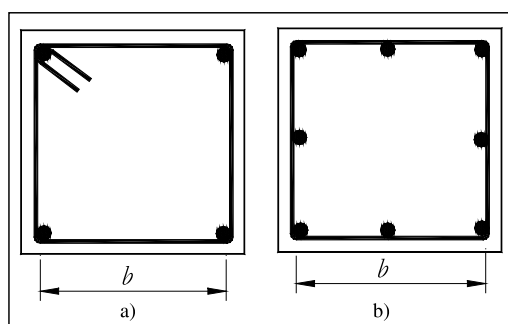


Figura 4: Arranjos da armadura na seção transversal.

Para o modelo da Figura 4.b, a armadura longitudinal pode ser considerada como impondo uma carga concentrada no meio do vão de uma viga fixa nas extremidades e a expressão para a rigidez do estribo é dada por:

$$K = \frac{192EI_t}{b^3} \quad (13)$$

Para o modelo da Figura 4.a, a expressão para a rigidez do estribo fica:

$$K = \frac{EA_t}{b} \quad (14)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade da armadura longitudinal,  $I_t$  é o momento de inércia do estribo e  $A_t$  é a área do estribo.

Nota-se que a armadura transversal pode oferecer diferentes contribuições para a resistência a flambagem das barras longitudinais. As barras longitudinais localizadas no canto dos estribos são restringidas por uma rigidez extensiva e as barras localizadas ao longo da perna de um estribo são restringidas apenas pela rigidez a flexão. O módulo de elasticidade longitudinal a ser considerado é o módulo de elasticidade instantâneo, porém pode-se utilizar o módulo de elasticidade reduzido quando o mesmo é conhecido.

### 3. Curvas para o cálculo do espaçamento e diâmetro dos estribos

A Figura 5 apresenta a curva que relaciona o parâmetro de carga crítica da coluna,  $\Gamma$  e o parâmetro de rigidez dos estribos,  $\eta$  com as contribuições de vários modos para a carga de flambagem. Nota-se que este gráfico apresenta uma curva onde a armadura está fixa nas extremidades e outra curva onde uma das extremidades está livre para simular a presença de emendas das barras da armadura.

Verifica-se que a partir de um alto nível de rigidez, a carga de flambagem cresce quase que linearmente com o aumento da rigidez dos estribos. A partir deste gráfico será apresentado um método para o cálculo do espaçamento e rigidez dos estribos em um pilar de concreto armado.

A curva da Figura 5 é válida para qualquer tipo de arranjo das armaduras. Conforme o objetivo do projeto, basta introduzir os respectivos valores de  $\Gamma$  ou  $\eta$  para cada caso em particular. Por exemplo, para a seção da Figura 4.b, substituindo-se o valor da rigidez dos estribos,  $K$ , da Equação (13) no valor do parâmetro adimensional de rigidez,  $\eta$ , expresso em (3) obtém-se o seguinte valor:

$$\eta = \frac{192\phi_t^4 L^4}{b^3 s\phi_t^4} \quad (15)$$



Por outro lado, substituindo-se o momento de inércia da armadura longitudinal na expressão de  $\Gamma$  tem-se:

$$\Gamma = \frac{64PL^2}{E\pi\phi_l^4} \quad (16)$$

Dessa forma é possível alterar os valores de  $\Gamma$  e  $\eta$  das expressões (15) e (16) e criar novos parâmetros com a finalidade de facilitar os cálculos dos exemplos que serão apresentados. As variáveis adimensionais  $\Gamma$  e  $\eta$  foram modificadas da seguinte forma:

$$\eta_l = \frac{\eta}{192} = \frac{\phi_l^4 L^4}{b^3 s \phi_l^4} \quad (17)$$

$$\Gamma_l = \frac{\Gamma\pi}{64} = \frac{PL^2}{E\phi_l^4} \quad (18)$$

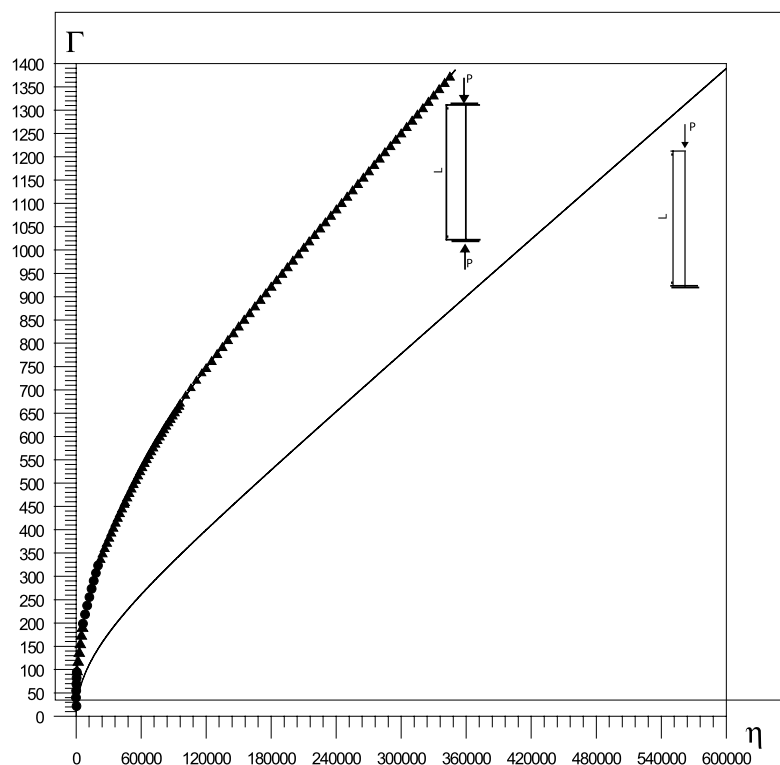


Figura 5: Parâmetro de carga vs. parâmetro de rigidez da coluna com seis graus de liberdade.

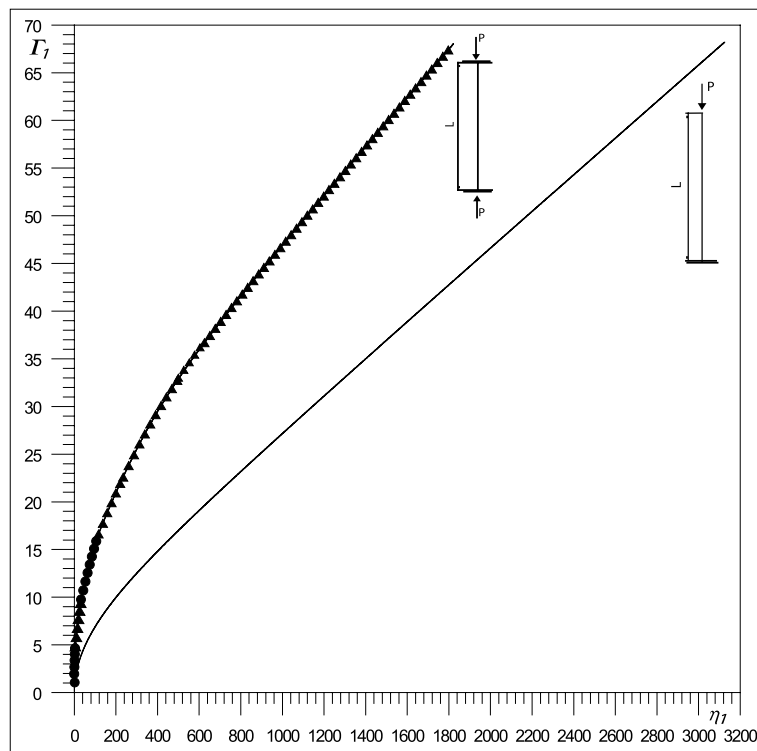


Figura 6: Parâmetro de carga vs. parâmetro de rigidez da coluna com seis graus de liberdade.

Portanto a ordenada e abscissa dos gráficos da Figura 5 são alteradas multiplicando-se as mesmas pelos fatores,  $\frac{\pi}{64}$  e  $\frac{l}{192}$ , respectivamente. Dessa forma, obtém-se o gráfico da Figura 6 com os parâmetros de carga e rigidez menores. Dependendo do arranjo dos estribos na seção transversal, obtém-se um valor diferente para a rigidez,  $K$  e para o parâmetro adimensional da rigidez dos apoios laterais,  $\eta$ .

### 3.1. Considerações sobre a carga de flambagem para dimensionamento

A carga de flambagem deve ser sempre maior que a carga de escoamento em compressão por um fator  $\gamma > 1$ , isto para garantir o uso de  $P_y = f_y A_s$  no dimensionamento inicial, como é feito usualmente. No dimensionamento usual, busca-se otimizar o projeto tomando  $\gamma = 1$ , entretanto, é pouco recomendável do ponto de vista de segurança em regime pós-crítico. Adotou-se no presente trabalho os valores de  $\gamma = 1,2$ .

#### 4. Seqüência de projeto com a utilização das curvas $\Gamma_1 \times \eta_1$

Uma seqüência possível de projeto com o uso dos gráficos  $\Gamma_1 \times \eta_1$ , seria como se mostra a seguir:

- 1 O valor de  $b$  vem da geometria da peça;
- 2 O diâmetro da armadura longitudinal,  $\phi_l$  é usualmente determinado pelo projetista;
- 3 Busca-se uma carga de flambagem,  $P_{cr} = \gamma \cdot P_y$  e assim obtém-se  $\Gamma_1$ ;
- 4 Com o valor de  $\Gamma_1$  entra-se na ordenada do gráfico  $\Gamma_1 \times \eta_1$  e descobre-se o  $\eta_1$  necessário na abscissa. Como já se dispõe dos valores de  $b$  e  $\phi_l$ , as variáveis de projeto serão o espaçamento entre os estribos,  $s$  e o diâmetro dos estribos,  $\phi_t$ , os quais serão calculados e adotados de forma compatível com os limites das normas de projeto existentes. Caso o espaçamento resulte muito pequeno, ou o diâmetro muito grande, é necessário reduzir  $b$  ou usar estribos suplementares.

O trabalho de Buffoni (2004) apresenta vários exemplos detalhados para seções de pequenas e grandes dimensões, apresentando comentários sobre os valores adotados em normas de projeto, principalmente na NBR 6118/2003.

##### 4.1 Aplicações a seções de grandes dimensões

Aplica-se o critério proposto a um pilar de concreto armado com seção transversal retangular  $25 \text{ cm} \times 110 \text{ cm}$ , altura livre de  $350 \text{ cm}$ , com resistência à compressão do concreto  $20 \text{ MPa}$  e do aço de  $500 \text{ MPa}$ . A armadura longitudinal consiste de 22 barras de  $16 \text{ mm}$  de diâmetro, e o cobrimento é de  $3 \text{ cm}$ . Nomeou-se este pilar de P1 e se apresenta a seguir alguns casos de variações nos arranjos das armaduras na seção transversal.

###### • Caso 1

Considera-se o arranjo das armaduras na seção transversal apresentado na Figura 7. Para o cálculo da rigidez  $K$  dos estribos, adotou-se o modelo da Figura 8, onde a perna do estribo é considerada como uma viga fixa nas extremidades.

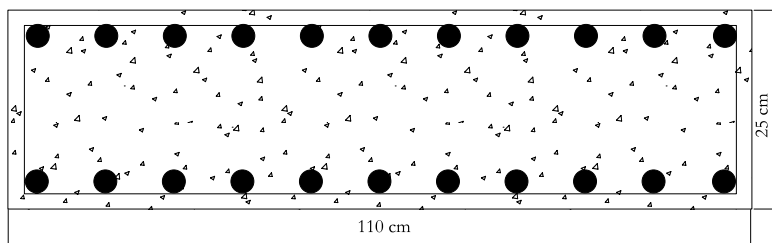


Figura 7: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P1 (Caso 1).

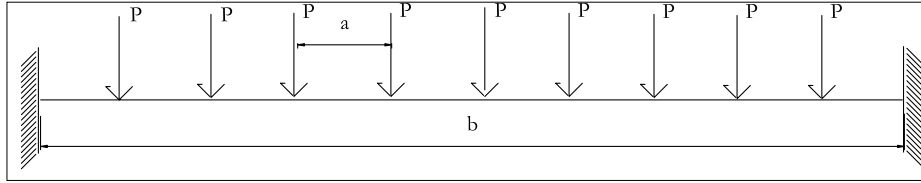


Figura 8: Modelo simplificado para cálculo da rigidez  $K$  referente ao caso 1.

A flexibilidade do estribo associada a cada barra pode ser obtida aplicando-se uma carga transversal concentrada unitária isoladamente em cada ponto central da barra. Nota-se que isto corresponde a admitir-se que o início da flambagem se dá na barra menos restringida. Assim, avalia-se o ponto crítico como correspondente a uma barra que contribui com a menor rigidez do estribo. Para o modelo da Figura 8 isto ocorre no centro da viga, e neste caso a rigidez fica sendo:

$$K = \frac{38,4EI_t}{b^3} \quad (19)$$

onde o vão livre de flexão é  $b = 1100 - 2(30 + 5) - 16 = 1014 \text{ mm}$  supondo inicialmente o diâmetro do estribo igual a  $5 \text{ mm}$ . Considerando-se os estribos como base elástica e substituindo-se  $k = K/s$  no parâmetro  $\eta$  chega-se a:

$$\eta = \frac{kL^4}{EI} = \frac{38,4EI_tL^4}{b^3sEI} = \frac{38,4\phi_t^4L^4}{b^3s\phi_l^4} \Rightarrow \frac{\phi_t^4}{s} = \frac{\eta b^3\phi_l^4}{38,4L^4} = \frac{192\eta_l b^3\phi_l^4}{38,4L^4} \quad (20)$$

Pretende-se calcular o diâmetro e espaçamento entre estribos para  $\gamma = 1,2$  considerando-se a armadura sem emendas. Dessa forma, busca-se uma carga de flambagem,  $P_{cr} = \gamma P_y$  e obtém-se  $\Gamma_l$  e  $h_l$ .

$$P_{cr} = \gamma P_y = 104,4 \text{ kN} \Rightarrow \Gamma_l = \frac{P_{cr}L^2}{E\phi_l^4} \Rightarrow \Gamma_l = 92,93 \Rightarrow \eta_l = 2802,08 \quad (21)$$

A partir da expressão (17) tem-se:

$$\frac{\phi_t^4}{s} = 6,38 \times 10^3 \quad (22)$$

Estipularam-se alguns valores para o espaçamento entre estribos de acordo com os limites impostos pela NBR 6118/2003.

Para que a base elástica possa impedir a flambagem da armadura longitudinal os diâmetros encontrados apresentam-se na Tabela 1. Os valores encontrados para o diâmetro do estribo foram altos, visto que este modelo é bastante flexível.

Tabela 1: Dimensionamento dos estribos para o caso 1.

|           |       |       |       |
|-----------|-------|-------|-------|
| s (mm)    | 190   | 150   | 50    |
| $f_t(mm)$ | 33,18 | 31,28 | 23,77 |

• *Caso 2*

O modelo considerado apresenta-se na Figura 9 onde há um estribo suplementar (admitido como rígido) no meio de uma perna de estribo. O modelo simplificado para o cálculo da rigidez se encontra na Figura 10.

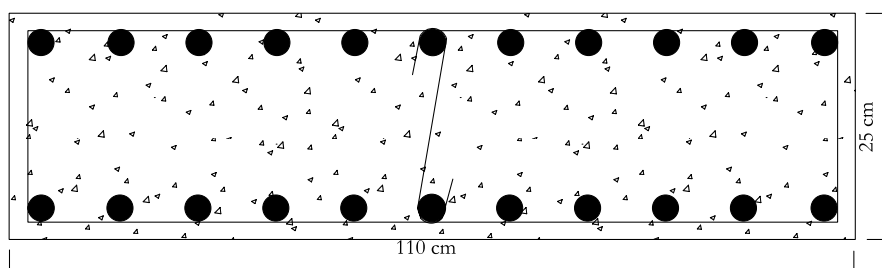


Figura 9: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P1 (Caso 2).

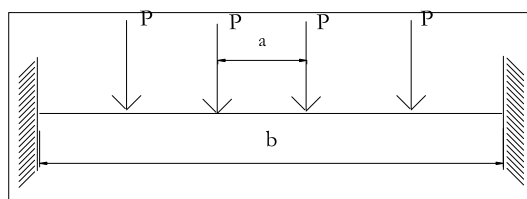


Figura 10: Posições de cargas para cálculo da rigidez  $K$  referente ao caso 2.

As cargas localizadas na distância  $2a$  ou  $3a$  do apoio esquerdo na Figura 10 contribuem com a menor rigidez do estribo, e neste caso a rigidez torna-se:

$$K = \frac{250EI_t}{3b^3} \quad (23)$$

onde o vão livre de flexão é  $b = 507 \text{ mm}$ .

Substituindo-se a expressão (23) no valor de  $\eta$  chega-se a:

$$\eta = \frac{kL^4}{EI} = \frac{83,33EI_tL^4}{b^3sEI} = \frac{83,33\phi_t^4L^4}{b^3s\phi_l^4} \quad (24)$$

Da expressão (24) tem-se:

$$\frac{\phi_t^4}{s} = \frac{\eta b^3\phi_l^4}{83,33L^4} = \frac{192\eta b^3\phi_l^4}{83,33L^4} = 367,46 \quad (25)$$

A partir da expressão (25) obtém-se os valores apresentados na Tabela 2. Em relação ao caso 1, este modelo é mais rígido, porém ainda bastante flexível e de acordo com os resultados apresentados na Tabela 2, os valores encontrados para o diâmetro do estribo ainda são altos. Dessa forma busca-se um modelo que seja rígido a fim de que se possa obter valores razoáveis para o diâmetro e espaçamento dos estribos.

Tabela 2: Dimensionamento dos estribos para o caso 2.

|            |       |       |       |
|------------|-------|-------|-------|
| $s$ (mm)   | 190   | 150   | 50    |
| $f_t$ (mm) | 16,26 | 15,32 | 11,64 |

• *Caso 4*

O arranjo das armaduras na seção transversal se apresenta na Figura 11. Os modelos simplificados para o cálculo da rigidez  $K$  dos estribos apresentam-se na Figura 12, onde a Figura 12.a representa o primeiro ou último trecho da seção e a Figura 12.b representa a parte entre estribos suplementares.

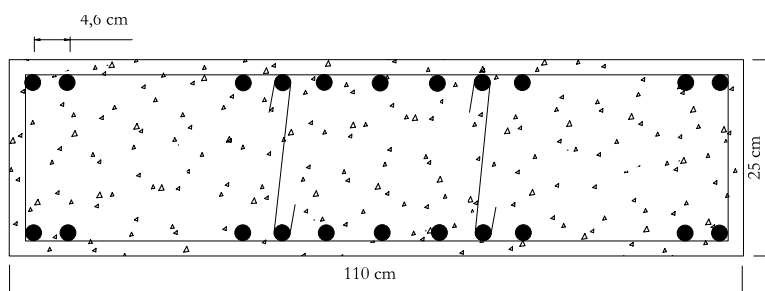


Figura 11: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P1 (Caso 4).

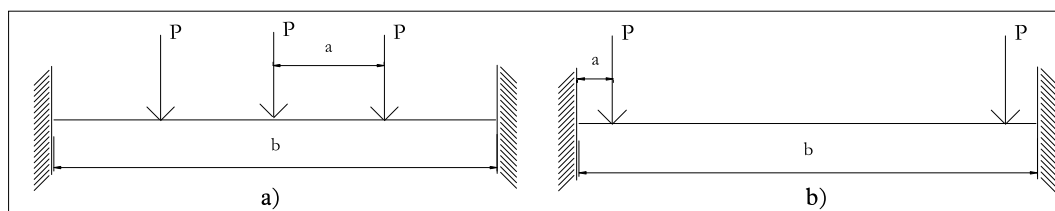


Figura 12: Posições de cargas para cálculo da rigidez  $K$  referente ao caso 4.

Verificou-se que a maior flexibilidade encontrada foi para a barra do centro, e o valor da rigidez  $K$  para este caso é:

$$K = \frac{96EI_t}{b^3} \quad (26)$$

onde  $b = 184 \text{ mm}$ . A expressão para o cálculo do dimensionamento dos estribos obtida a partir das expressões de  $\eta$  e  $K$  apresentadas nas expressões (3) e (26), respectivamente é dada por:

$$\frac{\phi_t^4}{s} = \frac{2\eta\phi_l^4 b^3}{L^4} \quad (27)$$

Os resultados encontram-se nas Tabelas 3 e 4. Como o dimensionamento usual admite o valor de  $\gamma = 1,0$ , os cálculos foram repetidos com tal valor e os resultados encontrados também apresentam-se na Tabela 4.

Tabela 3: Dimensionamento dos estribos para o caso 4.

| $s \text{ (mm)}$ | $\phi_t \text{ (mm)}$ |                |
|------------------|-----------------------|----------------|
|                  | $\gamma = 1,0$        | $\gamma = 1,2$ |
| 190              | 6,90                  | 7,34           |
| 150              | 6,50                  | 6,92           |
| 50               | 4,94                  | 5,25           |

Tabela 4: Dimensionamento dos estribos para o caso 4.

| $\phi_t \text{ (mm)}$ | $S \text{ (mm)}$ |                |
|-----------------------|------------------|----------------|
|                       | $\gamma = 1,0$   | $\gamma = 1,2$ |
| 5                     | 53               | 41             |
| 6,3                   | 132              | 103            |

• *Caso 5*

O modelo da Figura 13 se apresentou o mais favorável e econômico em termos de dimensionamento dos estribos. O modelo simplificado para o cálculo de  $K$  apresenta-se na Figura 14, onde o valor de  $b = 338 \text{ mm}$ , sendo  $K$  dada por:

$$K = \frac{6bEI_t}{a^3(2b - 3a)} \quad (28)$$

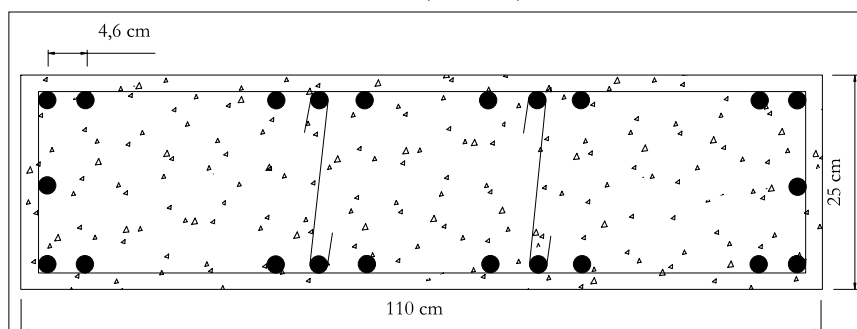


Figura 13: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P1 (Caso 5).

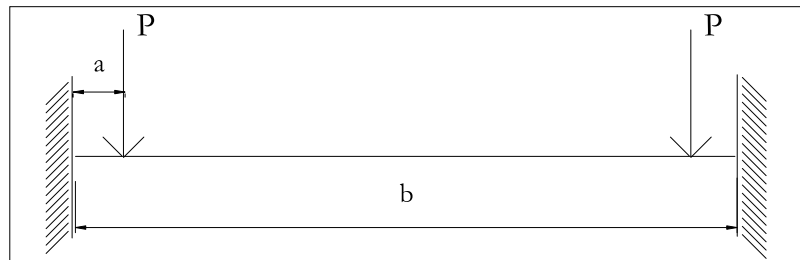


Figura 14: Modelo simplificado para cálculo da rigidez  $K$  referente ao caso 5.

A expressão para o cálculo do dimensionamento dos estribos obtida a partir das expressões de  $\eta$  e  $K$  apresentadas em (3) e (28), respectivamente, é dada por:

$$\frac{\phi_t^4}{s} = \frac{32\eta\phi_t^4 a^3 (2b - 3a)}{bL^4} \quad (29)$$

Os resultados apresentam-se na Tabela 5 para os valores de  $\gamma = 1,0$  e  $\gamma = 1,2$ .

Tabela 5: Dimensionamento dos estribos para o caso 5.

a) Cálculo do Diâmetro dos estribos.

| $s \text{ (mm)}$ | $\phi_t \text{ (mm)}$ |                |
|------------------|-----------------------|----------------|
|                  | $\gamma = 1,0$        | $\gamma = 1,2$ |
| 190              | 5,48                  | 5,83           |
| 150              | 5,16                  | 5,49           |
| 50               | 3,92                  | 4,17           |

b) Cálculo do espaçamento.

| $\phi_t \text{ (mm)}$ | $S \text{ (mm)}$ |                |
|-----------------------|------------------|----------------|
|                       | $\gamma = 1,0$   | $\gamma = 1,2$ |
| 5                     | 131              | 103            |
| 6,3                   | 331              | 259            |

Verificou-se através dos cálculos que ao se definir o diâmetro do estribo como  $\phi_t = 6,3 \text{ mm}$ , o espaçamento entre estribos fica bem maior do que o limite superior registrado na NBR 6118/2003. A partir deste modelo realizou-se um estudo para verificar a possibilidade de executá-lo com espaçamento duplo.

Calculou-se a rigidez média efetiva da base elástica como sendo a média dos valores da rigidez  $K$  calculada com estribos suplementares utilizando-se o modelo simplificado da Figura 14, que se apresenta na expressão (28), e a rigidez do modelo da Figura 13 sem estribos suplementares, como apresenta o modelo simplificado da Figura 15.



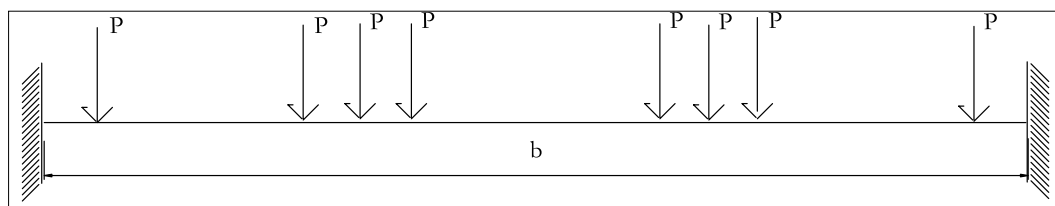


Figura 15: Modelo simplificado para cálculo da rigidez  $K$  referente ao caso 5 sem estribos suplementares.

O valor da rigidez,  $K$ , para o modelo da Figura 15, correspondente a uma das cargas mais próximas do centro é dado por:

$$K = \frac{54bEI_t}{(b^4 + 3b^3a - 9a^2b^2 + 18a^3b - 81a^4)} \quad (30)$$

O valor de  $b = 1014 \text{ mm}$  e os resultados considerando-se a rigidez média da base elástica para a consideração de espaçamento duplo, com os valores de  $\gamma = 1,0$  e  $\gamma = 1,2$  apresentam-se na Tabela 6.

Tabela 6: Dimensionamento dos estribos considerando-se espaçamento duplo para o caso 5.

a) Cálculo do diâmetro dos Estribos

| $s \text{ (mm)}$ | $\phi_t \text{ (mm)}$ |                |
|------------------|-----------------------|----------------|
|                  | $\gamma = 1,0$        | $\gamma = 1,2$ |
| 190              | 6,51                  | 6,93           |
| 150              | 6,14                  | 6,53           |
| 50               | 4,96                  | 4,96           |

b) Cálculo do Espaçamento

| $\phi_t \text{ (mm)}$ | $s \text{ (mm)}$ |         |
|-----------------------|------------------|---------|
|                       | $\gamma = 1,0$   | $= 1,2$ |
| 5                     | 66               | 51      |
| 6,3                   | 166              | 129     |

## 5. Conclusões

O presente trabalho teve como objetivo analisar a flambagem das armaduras longitudinais em pilares de concreto armado submetidos a carregamento axial levando em conta o espaçamento entre os estribos, o diâmetro e arranjo dos estribos na seção transversal e o diâmetro das armaduras longitudinais.

Foram obtidos gráficos que relacionam o parâmetro de carga crítica da armadura longitudinal com o parâmetro de rigidez dos estribos, e verificou-se que o valor do parâmetro de carga, para altos valores do parâmetro de rigidez

dos estribos, cresce quase que linearmente. Isto sugere a adoção de expressões simplificadas para projeto. Entretanto, o procedimento adotado neste trabalho parece suficientemente simples para uso rotineiro.

A partir da obtenção dos gráficos que relacionam o parâmetro de carga da armadura longitudinal com o parâmetro de rigidez dos estribos, mostrou-se interessante propor uma sequência de projeto, caracterizando o dimensionamento racional dos estribos em pilares de concreto armado.

Os exemplos mostram que o resultado de tal procedimento pode se tornar compatível com os resultados existentes em normas de projeto atuais, por uma calibragem adequada dos parâmetros envolvidos.

Os valores calculados para o espaçamento e diâmetro dos estribos foram obtidos a partir da consideração de um modo de flambagem geral que poderia inclusive envolver vários estribos.

Foi mostrado, através de exemplos, que o procedimento adotado neste trabalho permite que se atinja a rigidez necessária (isto é, uma carga crítica superior à carga limite de compressão simples da barra longitudinal), com diversas variáveis: espaçamento entre os estribos, diâmetro dos estribos, diâmetro da armadura longitudinal, uso de estribos suplementares (em cada seção ou alternadamente), e reposicionamento das barras da armadura longitudinal. Estas duas últimas variáveis correspondem a variações no vão de flexão dos estribos. Foram discutidos ainda diversos arranjos da armadura transversal que fornecem maior rigidez e confinamento; tais arranjos são mais usuais em projetos buscando maior ductilidade sob ações sísmicas.

O caso apresentado na Figura 13 mostrou que a concentração das barras longitudinais próximas dos cantos causa um aumento do parâmetro de rigidez dos estribos, já que há uma redução do vão de flexão dos estribos ao se aproximar as barras do canto. Assim, pode-se reduzir o número de estribos suplementares de forma racionalmente justificada.

Pode ainda ser considerada uma rigidez efetiva para o estribo como a média entre a rigidez calculada quando se consideram estribos suplementares e a rigidez calculada sem a consideração dos mesmos. Assim, dimensiona-se o estribo utilizando um espaçamento duplo, ou seja, a cada dois espaçamentos colocam-se estribos suplementares, o que pode ser benéfico no momento da concretagem.

Em resumo, propõe-se um projeto racional de armadura transversal, com uso de considerações relacionadas à flambagem da armadura longitudinal. Um eventual maior consumo de armadura pode ser compensado por melhores condições de execução de pilares, devido à redução de armaduras suplementares.

## Referências

- Associação Brasileira de Normas Técnicas (2003). *NBR 6118: Projeto e execução de obras de concreto armado*. Rio de Janeiro, ABNT.
- Bazant, Z. P. and Cedolin, L. (1991). *Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage theories*. Oxford University Press, New York.
- Bresler, B. and Gilbert, P. H. (1961). Tie Requirements for Reinforced Concrete Columns. *ACI Journal*, v. 58, n. 5, p. 555-570.
- Buffoni, S. S. O. (2004). *Estudo da Flambagem de Armaduras Longitudinais em Pilares de Concreto Armado*. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, 249 p. Rio de Janeiro.
- Dym, C. L. and Shames, I. H. (1973). *Solid Mechanics - A Variational Approach*. McGraw-Hill-Kogakusha. Ltd, Tokyo.
- Kaar, P. H. and Corley, W. G. (1977). Properties of Confined Concrete for design of Earthquake Resistant Structures. *Proceeding of 6th World Conf. on Earthquake Engrg. Indian Society of Earthquake*.
- Moehle, J. P. and Cavanagh, T. (1985). Confinement Effectiveness of Crossties in RC. *Journal of Structural Engineering*, v. 111, n. 10, p. 2105-2120.
- Pfister, J. F. (1964). Influence of Ties on the Behavior of Reinforced Concrete Columns. *Journal of the American Concrete Institute*, v. 61, n. 5, p. 521-536.
- Queiroga, M. V. M. (1999). *Análise Experimental de Pilares de Concreto de Alto Desempenho Submetidos à Compressão Simples*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, EESC-USP. São Carlos, SP.
- Queiroga, M. V. M. and Giongo, J. S. (2000). Resistência e Ductilidade de Modelos de Pilares de Concreto de Alta Resistência Submetidas à Compressão Simples. *IV Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto*, São Paulo.
- Sheikh, S. A. and Uzumeri, S. M. (1980). Strength and Ductility of Tied Concrete Columns. *Journal of Structural Division*, v. 106, n. ST5, ASCE, p. 1079-1102.
- Scott, B. D.; Park, R. and Priestley, J. N. (1982). Stress-Strain Behavior of Concrete Confined by Overlapping Hoops at Low and High Strain Rates. *ACI Journal*, v. 79, n. 2, p. 13-27.
- Scribner, C. F. (1986). Reinforcement Buckling in Reinforced Concrete Flexural Members. *ACI Journal*, v. 83, n. 6, p. 966-973.
- Vallenas, J.; Bertero, V. V. and Popov, E. P. (1977). *Concrete Confined by Rectangular Hoops and Subjected to Axial Loads*. Report No. UCB/EERC-77/13, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley – CA.

# Buckling analysis of longitudinal reinforcement in reinforced concrete columns

## Abstract

Buckling of longitudinal reinforcement in reinforced concrete columns may occur in the region between two consecutive ties, or may involve a number of ties. The existing design code specifications do not provide an appropriate methodology for the design of the transversal reinforcement in different situations. The main objective of the present work is to develop a formulation to allow to analyze the buckling of longitudinal bars in reinforced concrete columns taking into account the tie spacing, the diameter and arrangement of the ties in the cross section and the longitudinal bar diameter. For this purpose an analytical method for the evaluation of the buckling load of longitudinal bars is described, as a function of the constraint imposed by the axial or flexural stiffness of the stirrups. The longitudinal bar is considered as a column deforming according to thin beam theory. The tie action is described either by a set discrete elastic supports or by a continuous elastic foundation. The theoretical analysis considers the column with one or more deformation modes, with some degree of nonlinearity, including the analysis of post-critical equilibrium paths. As a result of this study, rational criteria for spacing and sizing of transversal reinforcement are derived, allowing to study different alternatives in an abacus of simple use for design. Several comparisons with the results obtained experimentally by other authors in reinforced concrete columns are presented, allowing for an evaluation of the validity of the theoretical developments and the rational design methodology proposed herein.

**Keywords:** Buckling; longitudinal and transverse reinforcement; reinforced concrete columns, columns; reinforced concrete.

## 2 Conclusions

The present work had as objective analyzes the buckling of the longitudinal reinforcement in concrete columns under axial compressive loading taking into account the tie spacing, the diameter and arrangement of the ties in the cross section and the longitudinal bar diameter.

It was found graphs that relate the parameter of critical load of the longitudinal reinforcement with the parameter of rigidity of the stirrups, and it was verified that the value of the load parameter, for high values of the parameter of rigidity of the ties, almost grows that lineally. This suggests the adoption of expressions simplified for project. However, the procedure adopted in this work seems sufficiently simple for routine use.

Starting from the obtaining of the graphs that relate the parameter of load of the longitudinal reinforcement with the parameter of rigidity of the ties, it was shown interesting to propose a project sequence, characterizing the rational design of the ties in reinforced concrete columns .

The examples show that the result of such a procedure can become compatible with the existent results in current project norms.

It was shown, through examples, that the procedure adopted in this work it allows the necessary rigidity to be reached (that is, a superior critical load to the load limit of simple compression of the longitudinal bar), with several variables: tie spacing, tie diameter, diameter of the longitudinal reinforcement, use of supplemental stirrups (in each section or alternately) that correspond to variations in the space of flexing of the stirrups. They were still discussed several arrangements of the ties that supply larger rigidity and confinement; such arrangements are more usual in projects looking for larger ductility under seismic actions.

The case presented in the Illustration 13 showed that the concentration of the close longitudinal bars of the songs cause an increase of the parameter of rigidity of the ties, since there is a reduction of the flexing space of the stirrups when approaching the bars of the song. Like this, it can be reduced the number of supplemental stirrups in way rationally justified.

Still an effective rigidity can be considered for the stirrup as the average among the calculated rigidity when they are considered supplemental stirrups and the rigidity made calculations without the consideration of the same ones. To each two tie spacing supplemental stirrups are put, what can be beneficial.

From results, presented a rational project of the transversal reinforcement, with use of considerations related to the buckling of the longitudinal reinforcement. A larger eventual reinforcement consumption can be compensated by better conditions of execution of concrete columns, due to the reduction of supplemental armors.