

Análise numérica de elementos estruturais de aço enformados a frio: desenvolvimentos recentes e perspectivas futuras

Dinar Camotim¹, Nuno Silvestre², Pedro Borges Dinis³

Trabalho recebido em 29/08/2006 e aprovado para publicação em 26/09/2006.

Resumo

O objectivo deste trabalho consiste em apresentar e discutir os desenvolvimentos mais recentes no domínio da formulação e aplicação de métodos e técnicas numéricos para analisar o comportamento geométrica e fisicamente não linear de elementos estruturais (colunas, vigas e colunas-viga) de aço enformados a frio, os quais são formados por perfis com secções de parede fina muito esbeltas. Em particular, abordam-se (i) o método dos elementos finitos (perfis discretizados em malhas refinadas de elementos de casca), (ii) o método das faixas finitas, semi-analítico e com funções “B3-Spline”, e (iii) implementações numéricas (elementos finitos de barra) de várias formulações recentes da Teoria Generalizada de Vigas (GBT – “Generalised Beam Theory” em língua inglesa). Consideram-se aspectos relacionados com a execução de (i) análises lineares de estabilidade, em regime elástico, e (ii) análises de pós-encurvadura, em regime elástico ou elasto-plástico. Estas últimas análises (i) incidem sobre elementos estruturais que bifurcam em modos locais, distorcionais e globais (por flexão ou flexão-torção), (ii) contabilizam a influência da presença de inevitáveis imperfeições iniciais de natureza geométrica ou material (tensões residuais), e (iii) permitem tomar em consideração a presença de eventuais fenómenos de interacção e acoplamento entre modos de instabilidade distintos. O trabalho inclui ainda (i) resultados numéricos relativos a colunas com secção em C (sobretudo) e em “Rack” e (ii) observações sobre a eficiência computacional das análises baseadas na GBT e a utilidade das simulações numéricas para o desenvolvimento, calibração e validação de metodologias de dimensionamento para elementos estruturais de aço enformados a frio – refere-se em especial o “método da resistência directa”, recentemente incorporado nas regulamentações australiana e norte americana. Finalmente, o artigo termina com uma breve abordagem de alguns problemas que estão presentemente a ser investigados, a qual fornece uma perspectiva dos próximos desenvolvimentos no domínio da aplicação de métodos numéricos à análise e dimensionamento de elementos estruturais de aço enformados a frio.

Palavras-chave: Elementos estruturais de aço enformados a frio, Análise numérica, Método das faixas finitas; Método dos elementos finitos (de casca), Teoria Generalizada de Vigas (GBT), Elementos finitos baseados na GBT, Método da resistência directa.

¹ Prof. Dr., Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura, ICIST/IST, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa. Av. Rovisco Pais, 1049-001, Lisboa, Portugal. E-mail: dcamotim@civil.ist.utl.pt

² Prof. Dr., Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura, ICIST/IST, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa. Av. Rovisco Pais, 1049-001, Lisboa, Portugal. E-mail: nunos@civil.ist.utl.pt

³ Prof. Dr., Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura, ICIST/IST, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa. Av. Rovisco Pais, 1049-001, Lisboa, Portugal. E-mail: dinis@civil.ist.utl.pt

1 Introdução

Os elementos estruturais de aço enformados a frio são invariavelmente constituídos por perfis com secções de parede fina de elevada esbelteza, característica que os torna altamente susceptíveis aos efeitos geometricamente não lineares, nomeadamente aqueles que estão associados à ocorrência de fenómenos de instabilidade local, distorcional ou global (por flexão ou flexão-torção) – as Figuras 1(a)-(c) mostram as configurações dos modos de instabilidade que, tipicamente, ilustram os aspectos mais relevantes destes fenómenos de instabilidade. Para que seja possível avaliar devidamente a eficiência estrutural de um dado elemento estrutural (perfil) de aço enformado a frio, é absolutamente indispensável adquirir um conhecimento aprofundado sobre os seus comportamentos de estabilidade e pós-encurvadura, uma tarefa que envolve (i) a identificação dos modos de instabilidade relevantes, (ii) o cálculo das tensões de bifurcação que os provocam e (iii) a determinação das correspondentes trajectórias de pós-encurvadura e resistências últimas, tomando em consideração a presença de inevitáveis imperfeições iniciais (essencialmente geométricas) e, eventualmente, também a ocorrência de fenómenos de interacção modal. Para além da óbvia contribuição para a melhoria do conhecimento relativo ao comportamento mecânico/estrutural dos perfis de aço enformados a frio, toda esta informação desempenha também um papel crucial no desenvolvimento, validação e calibração de regras ou metodologias de dimensionamento. Na realidade, parece lícito afirmar que fórmulas e/ou procedimentos racionais, eficientes e de fácil utilização, por parte dos projectistas de estruturas metálicas, só podem ser estabelecidos a partir de modelos de comportamento fiáveis e mecanicamente bem fundamentados.

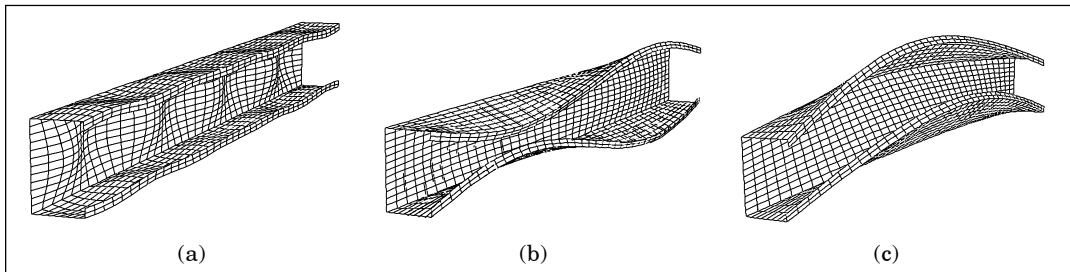


Figura 1: Configurações dos modos de instabilidade (a) local, (b) distorcional e (c) global (por flexão-torção) de uma coluna simplesmente apoiada com secção em C.

Os extraordinários progressos que as últimas décadas trouxeram à área da mecânica computacional e das técnicas de análise numérica de estruturas, em conjunto com os contínuos e quase impensáveis avanços a nível da sofisticação e disseminação das ferramentas de cálculo (“hardware” e “software”) conduziram a uma utilização generalizada e corrente de métodos numéricos de análise (mais ou menos “avançados”) em engenharia de estruturas. De entre os vários métodos adoptados, o Método dos Elementos Finitos (MEF – e.g., Crisfield 1991, 1997; Bathe 1998 ou Zienkiewicz e Taylor

2000) é, de muito longe, o mais popular. Este inegável facto deve-se, por um lado, (i) às suas versatilidade e sólida fundamentação matemática e, por outro lado, (ii) à existência e à disseminação praticamente universal, no seio das comunidades estruturalistas científica e técnica, de programas de cálculo comerciais de elevada potência. No caso particular dos elementos estruturais de aço enformados a frio, a necessidade de modelar adequadamente os vários fenómenos de instabilidade faz com que a realização de uma análise por elementos finitos (AEF) rigorosa implique sempre (i) a utilização de malhas refinadas de elementos de casca geometricamente não lineares e, no que respeita às análises de pós-encurvadura, (ii) a adopção de técnicas incrementais-iterativas para resolver sistemas de equações de equilíbrio não lineares que envolvem um enorme esforço computacional (e.g., Rasmussen 1996 ou Dinis e Camotim 2004a). Obviamente, estes dois aspectos fazem com que a utilização corrente do MEF para dimensionar estruturas formadas por perfis de aço enformados a frio seja ainda hoje quase proibitiva (apesar dos notáveis avanços em termos de capacidade de cálculo e, sobretudo, de pré e pós-processamento de resultados).

Com o objectivo bem definido de superar (ou, pelo menos, limitar) os inconvenientes impostos pelos factos referidos no parágrafo anterior e tirando partido de os elementos estruturais constituídos por perfis de aço enformados a frio serem prismáticos, tornou-se prática corrente recorrer ao Método das Faixas Finitas semi-analítico (MFF – e.g., Cheung 1976 ou Cheung et al. 1996) – na sequência de estudos efectuados por vários investigadores (e.g., Hancock 1998), é hoje universalmente reconhecido que, em muitos problemas, o MFF constitui uma alternativa extremamente vantajosa (em termos de clareza e eficiência computacional) às AEF (elementos de casca). Neste contexto, é ainda importante referir o Método das Faixas Finitas com Funções Spline (MFFS – e.g., Cheung et al. 1996), o qual permite alargar o domínio de aplicação do MFF e, de algum modo, o “combina” com o MEF: a variação longitudinal das componentes dos deslocamentos é aproximada por meio de funções “B3-Spline”, as quais substituem as funções analíticas (trigonómicas) adoptadas pelo MFF.

Nos últimos dez a quinze anos, a Teoria Generalizada de Vigas (GBT – “Generalised Beam Theory”, em língua inglesa – Schardt 1989, 1994) adquiriu progressivamente o estatuto de uma nova e competitiva metodologia para analisar o comportamento geometricamente não linear de barras prismáticas com secção de parede fina aberta – foi intensamente utilizada por Davies e seus colaboradores (Davies 1998, 2000) para efectuar análises lineares de estabilidade de perfis de aço enformados a frio com várias secções transversais. Muito embora existam semelhanças consideráveis entre o MFF e a GBT, pode afirmar-se, sem qualquer receio, que esta última é conceptualmente diferente dos restantes dois métodos abordados neste trabalho: de facto, trata-se de uma teoria de barras que (i) contabiliza tanto os efeitos globais (relativos à deformação do eixo da barra) como os efeitos locais (associados às deformações das secções transversais da barra nos seus próprios planos), (ii) aproxima a configuração deformada de uma secção transversal da barra através de uma combinação linear de “modos de deformação” com significados

mecânico-estruturais bem definidos, (iii) proporciona uma metodologia geral, elegante e clarificadora para obter soluções rigorosas de diversos problemas não lineares envolvendo perfis com secção de parede fina aberta e, devido à sua natureza modal, (iv) oferece ao utilizador possibilidades a que este não pode aceder quando efectua análises estruturais baseadas no MEF, MFF ou MFFS (Camotim et al. 2004, 2006).

O objectivo deste trabalho consiste em proporcionar ao leitor uma visão geral sobre o “estado-da-arte” relativo à utilização dos métodos numéricos mencionados nos parágrafos anteriores para analisar o comportamento geométrica e fisicamente não linear de elementos estruturais (colunas, vigas e colunas-viga) de aço enformados a frio. Devido ao seu carácter profundamente inovador, dedica-se uma atenção especial à implementação computacional e à aplicação de formulações da GBT desenvolvidas recentemente. Após efectuar uma breve descrição dos vários (i) tipos de análise estrutural, (ii) métodos de análise numérica e (iii) condições de apoio das barras, abordam-se, separadamente, problemas relacionados com a execução e a interpretação dos resultados das seguintes análises numéricas geometricamente não lineares: análises de bifurcação, em regime elástico, e análises de pós-encurvadura, em regime elástico e elasto-plástico. Em particular, discutem-se aspectos relativos (i) à obtenção dos comportamentos de estabilidade, pós-encurvadura e resistência última de elementos estruturais que bifurcam em modos de instabilidade locais, distorcionais e globais, (ii) à incorporação de imperfeições geométricas iniciais e/ou tensões residuais e (iii) à avaliação dos efeitos provocados pela interacção modal. O trabalho inclui também (i) um conjunto de resultados numéricos, relativos a colunas com secção em C (sobretudo) e em “Rack”, que permitem ilustrar os conceitos apresentados e (ii) observações sobre (ii1) a eficiência computacional das análises baseadas na GBT e (ii2) a utilidade que as simulações numéricas têm no desenvolvimento, calibração e validação de métodos de dimensionamento eficazes (económicos e seguros) para elementos estruturais de aço enformados a frio – nomeadamente, faz-se uma referência especial ao conhecido “método da resistência directa”, o qual foi muito recentemente incorporado nas regulamentações australiana e norte americana. Finalmente, o artigo termina com algumas notas breves em que se abordam problemas que os autores estão presentemente a investigar (ou prevêem vir a fazê-lo num futuro mais ou menos próximo), os quais fornecem uma perspectiva (inevitavelmente pessoal) dos próximos desenvolvimentos no domínio da aplicação de métodos numéricos à análise e ao dimensionamento de sistemas estruturais constituídos por perfis de aço enformados a frio.

1.1 Tipos de análise estrutural

A avaliação do comportamento geometricamente não linear, em regime elástico ou elasto-plástico, dos perfis de aço enformados a frio é habitualmente feita através de um dos dois tipos de análises estruturais que se descrevem em seguida:

- (i) *Análise de Estabilidade*. A mais simples das análises geometricamente não lineares, também designada por “análise linear de estabilidade” ou “análise de bifurca-

ção”¹. Aplica-se unicamente a barras “ideais” (i.e., sem imperfeições geométricas iniciais) e pressupõe normalmente que o comportamento material do aço é elástico, o que torna possível a aplicação do critério do equilíbrio adjacente: procuram-se configurações de equilíbrio da barra na vizinhança muito próxima da sua trajectória fundamental (de pré-encurvadura)². Em termos matemáticos, é necessário resolver um problema de valores e funções próprios (vectores próprios, no caso das barras discretizadas que resultam da aplicação dos métodos numéricos), no qual (i1) as tensões (ou os esforços) de bifurcação são os valores próprios e (i2) os correspondentes modos de instabilidade são as funções (sistemas contínuos) ou os vectores (sistemas discretos) próprios. A menor das tensões de bifurcação e o correspondente modo de instabilidade são habitualmente designados por “tensão crítica de bifurcação” e “modo de instabilidade crítico”.

- (ii) *Análise de Pós-Encurvadura*. Uma análise muito mais complexa, também designada por “análise não linear (de estabilidade)”. O comportamento material do aço pode ser modelado através de leis constitutivas elásticas ou elasto-plásticas e este tipo de análises (ii1) aplicam-se a barras “reais” (i.e., com imperfeições iniciais e/ou tensões residuais³) e (ii2) envolve a determinação de trajectórias de equilíbrio não lineares (trajectórias de pós-encurvadura) – curvas que relacionam o carregamento aplicado (o qual se admite habitualmente dependente de um único “parâmetro de carga” λ) com componentes de deslocamentos criteriosamente escolhidas – e a evolução das tensões e/ou deformações ao longo dessas mesmas trajectórias de equilíbrio. Em termo matemáticos, é necessário resolver o sistema de equações de equilíbrio não lineares que rege o comportamento do elemento estrutural (discretizado), uma tarefa que obriga à utilização de procedimentos incrementais-iterativos – adoptam-se frequentemente o método de Newton-Raphson e a técnica do controle do comprimento de arco (e.g., Crisfield 1991, 1997). O colapso do elemento estrutural (i.e., a sua perda de estabilidade) ocorre num ponto limite situado sobre a sua trajectória de equilíbrio – os correspondentes valores do parâmetro de carga e configuração deformada fornecem a resistência última e o modo de colapso da barra⁴. Finalmente, é ainda importante referir que as análises de pós-encurvadura de barras que possuem dois

1 Ao adoptar esta designação, admite-se implicitamente que o elemento estrutural exibe um comportamento de pré-encurvadura linear. Se esta hipótese (de utilização corrente e aplicável a um elevado número de sistemas estruturais) não for válida, é necessário efectuar uma “análise não linear de estabilidade (bifurcação)”, a qual é bastante mais complexa e não pode executar-se na grande maioria dos programas de elementos finitos comerciais.

2 No caso de a bifurcação ocorrer em regime elasto-plástico (i.e., quando algumas das fibras da barra se encontram já plastificadas), o critério do equilíbrio adjacente deixa de ser válido e a análise torna-se consideravelmente mais complexa (e.g., ver Gonçalves and Camotim 2004, 2005). Uma vez mais, praticamente a totalidade dos programas de elementos finitos comerciais não permite efectuar este tipo de análises de bifurcação (apesar de esse facto nunca ser explicitamente mencionado nos respectivos manuais de utilização).

3 Como é óbvio, é também possível analisar o comportamento de pós-encurvadura de barras “ideais”. No entanto, não se abordam aqui essas análises, em virtude de estas (i) terem pouco interesse prático e (ii) a sua execução envolver o recurso a técnicas numéricas muito sofisticadas (e.g., Teh e Clarke 1999; Magnusson 2000).

4 No contexto das análises de pós-encurvadura consideradas neste trabalho (actualização da geometria da barra limitada e deslocamentos “moderados”), a maioria das trajectórias de equilíbrio elásticas não exibem pontos limite.

ou mais modos de instabilidade associados a tensões de bifurcação muito próximas (ii1) são frequentemente designadas por “análises de interação modal” e (ii2) a sua execução constitui, ainda hoje, um desafio de monta para a comunidade científica ligada à investigação no domínio das estruturas de aço enformadas a frio.

As curvas apresentadas na Figura 2 ilustram as trajectórias de equilíbrio obtidas através de (i) uma análise de estabilidade elástica, (ii) uma análise de pós-encurvadura elástica e (iii) uma análise de pós-encurvadura elasto-plástica – λ_u fornece o valor da resistência última (ou capacidade resistente) do elemento estrutural associada a um dado carregamento. Note-se que a trajectória horizontal fornecida pela análise de estabilidade reflecte a linearização da equação de equilíbrio adjacente utilizada para efectuar essa análise.

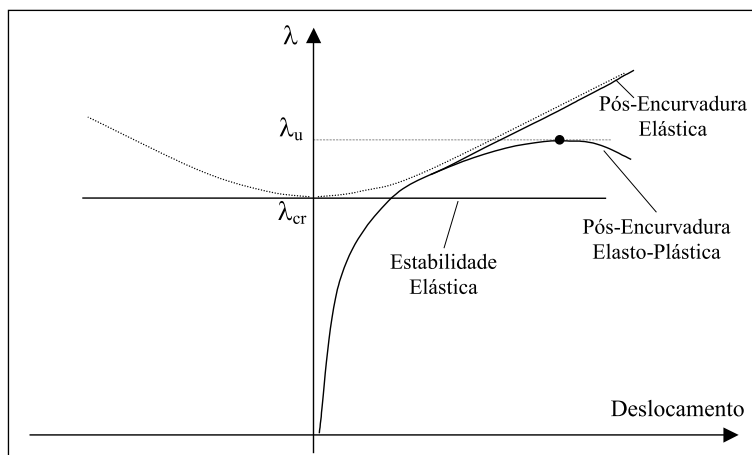


Figura 2 – Comparação entre as trajectórias de equilíbrio fornecidas pelas diferentes análises.

1.2 Métodos de Análise Numérica

Todos os métodos de análise numérica abordados neste trabalho envolvem a discretização do elemento estrutural com secção de parede fina, i.e., a sua transformação num sistema (discreto) com um número finito de graus de liberdade. Dependendo (i) do tipo de comportamento geometricamente não linear que se pretende determinar e (ii) das condições de apoio e carregamento do elemento estrutural, pode utilizar-se um ou mais dos quatro métodos de análise numérica que se caracterizam sucintamente em seguida:

- (i) *Método dos Elementos Finitos* (elementos finitos de casca). Conforme se ilustra na Figura 3, a superfície média do elemento estrutural é dividida num número bastante elevado de pequenos rectângulos, os quais correspondem aos folhetos médios de elementos de casca geometricamente não lineares. No interior de cada um dos elementos, o campo de deslocamentos é aproximado por meio de uma combinação linear de “funções de forma” (frequentemente polinómios) cujos coeficientes são valores de deslocamentos nodais generalizados (e.g., deslocamentos propriamente ditos ou rotações) – eles incluem os graus de liberdade do elemento estrutural discretizado,

obtidos por imposição das condições de apoio e compatibilidade apropriadas. Como as bibliotecas de diversos programas de elementos finitos comerciais de grande disseminação, tais como o Abaqus (HKS 2002), o Adina (Bathe 2003) ou o Ansys (SAS 2004), contêm vários elementos de casca não lineares (com diferentes níveis de sofisticação e destinados a serem utilizados na análise de problemas mais ou menos específicos), parece lícito afirmar que praticamente todas as AEF presentemente efectuadas pela comunidade técnico-científica ligada às estruturas de aço enformadas a frio são executadas num dos programas comerciais referidos atrás (e.g., Young e Yan 2002; Sarawit et al. 2003). Em virtude de os autores deste trabalho estarem familiarizados sobretudo com a utilização do programa Abaqus, todas as AEF cujos resultados se apresentam e discutem neste artigo foram efectuadas adoptando discretizações em elementos de casca que pertencem à biblioteca desse programa.

- (ii) *Método das Faixas Finitas* (semi-analítico). Este método, o qual pode ser encarado como uma variante do método dos elementos finitos (elementos de casca), (ii1) tira partido da natureza prismática de uma esmagadora maioria dos elementos estruturais com secção de parede fina (praticamente todos os perfis de aço enformados a frio estão nesta categoria) e (ii2) torna possível superar os problemas relacionados com o elevado esforço computacional necessário para efectuar AEF, um aspecto particularmente condicionante antes de surgir a mais recente geração de computadores pessoais (cerca de seis anos atrás) e constitui ainda hoje a mais severa limitação à sua utilização generalizada. Tal como se ilustra na Figura 3, a superfície média do elemento estrutural encontra-se agora dividida em “rectângulos compridos e estreitos” cujo comprimento coincide com o do próprio elemento – cada um desses rectângulos corresponde ao plano médio de uma faixa finita geometricamente não linear. Deste modo, a discretização faz-se apenas ao longo da linha média da secção transversal: no interior de cada faixa, a variação transversal dos deslocamentos é aproximada por meio de polinómios, os quais asseguram a compatibilidade entre faixas adjacentes (i.e., através das linhas nodais longitudinais) e cujos coeficientes representam os seguintes deslocamentos nodais generalizados: (ii1) deslocamentos de membrana axiais e transversais, e (ii2) deslocamentos e rotações de flexão. A formulação da faixa finita deve também incluir funções analíticas que sejam capazes

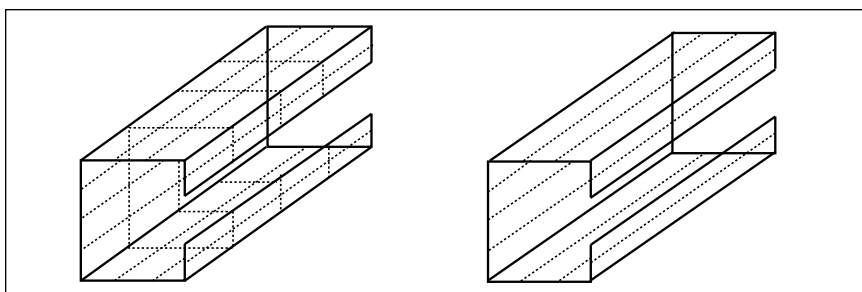


Figura 3 – Discretização de um perfil em C em elementos finitos de casca e em faixas finitas.

de descrever (de uma forma exacta ou aproximada) a variação longitudinal do campo de deslocamentos e satisfazer as condições de apoio correspondentes – a escolha mais adequada para estas funções analíticas (em geral funções trigonométricas) depende do tipo de análise que se pretende efectuar (Hancock 1998). De entre os trabalhos mais importantes sobre a aplicação do MFF à determinação dos comportamentos de estabilidade e pós-encurvadura de elementos estruturais de aço enformados a frio, merecem uma referência especial os de Plank e Wittrick (1974), Graves-Smith e Sridharan (1978), Sridharan e Graves-Smith (1981) e, acima de todos, Hancock e seus colaboradores (e.g., Hancock 1981, 1985, 1998; Hancock et al. 1990; Key e Hancock 1993 ou Papangelis e Hancock 1995).

- (iii) *Método das Faixas Finitas com Funções “B3-Spline”*. Este método pode ser encarado como um “compromisso” entre o MFF e o MEF: apesar de envolver uma discretização longitudinal (tal como o MEF), a utilização das funções “B3-Spline” (combinações de quatro polinómios cúbicos – e.g., De Boor 1978) faz com que seja possível manter uma elevada eficiência computacional (tal como no caso do MFF, embora de forma menos vincada). A formulação de faixas finitas com funções “B3-Spline” foi motivada pela necessidade de superar várias limitações do MFF (semi-analítico), nomeadamente a sua incapacidade para (iii1) analisar elementos estruturais submetidos a cargas aplicadas ao longo do vão ou com condições de apoio “não simplesmente apoiadas” (as várias possíveis condições de apoio serão definidas com rigor na subsecção seguinte) ou para (iii2) assegurar a compatibilidade entre deslocamentos transversais de membrana e flexão, ao longo dos bordos longitudinais do perfil (“linhas de dobra”) – este último aspecto tem grande relevância quando se analisa, por exemplo, o comportamento de pós-encurvadura distorcional. Uma vez mais, a principal contribuição para a formulação, validação e implementação computacional de faixas finitas com funções “B3-Spline” especificamente desenvolvidas para analisar o comportamento geometricamente não linear de perfis de aço enformados a frio deve-se a investigadores da Universidade de Sydney, liderados por Hancock – destacam-se os trabalhos de Lau e Hancock (1986), relativos a análises de estabilidade, e de Kwon e Hancock (1991), relativos a análises de pós-encurvadura. Muito mais recentemente, Prola e Camotim (2000, 2001) recuperaram as formulações das faixas finitas que acabam de referir-se e, utilizando o código de manipulação simbólica Maple V (WMS 2001), elaboraram e validaram programas de cálculo semelhantes aos desenvolvidos em Sydney.
- (iv) *Teoria Generalizada de Vigas (GBT)*. Apesar da sua designação, a GBT é muito mais que uma teoria de barras e deve ser encarada como uma abordagem ou metodologia extremamente eficaz e elegante para resolver vários problemas estruturais que envolvem barras prismáticas com secção de parede fina. De facto, muito embora a GBT (iv1) seja apresentada num formato que apresenta grandes semelhanças com as teorias de barras “clássicas” (uma formulação unidimensional, i.e., em que as equações de equilíbrio e as condições de fronteira que regem

o comportamento do elemento estrutural são expressas em termos de grandezas que dependem apenas de uma coordenada axial), ela (iv2) incorpora também conceitos da teoria de “placas dobradas” (“folded-plate theory” em língua inglesa), o que faz com que seja possível tomar em consideração os efeitos locais (deformações das secções transversais dos elementos nos seus próprios planos). Como é óbvio, para que seja possível combinar estas duas características, é necessário ser capaz de determinar, a priori, as propriedades mecânicas que descrevem não só o comportamento de corpo rígido da secção transversal do elemento estrutural (tal como sucede nas teorias “clássicas”), mas também as deformações sofridas pelas suas paredes (deformações locais). Ao adoptar uma discretização da secção transversal genuinamente original, a GBT consegue alcançar esse objectivo através de um processo muito elegante e estruturalmente clarificador, o qual inclui (iv1) a identificação dos modos de deformação (da secção transversal) e (iv2) a determinação das correspondentes propriedades mecânicas modais (Schardt 1989, 1994; Silvestre e Camotim 2002a, 2002b). Esta característica faz com que a aplicação da GBT seja consideravelmente mais versátil e eficiente, do ponto de vista computacional, que a utilização de análises baseadas no MFF ou MEF. Para além disso, e tal como se ilustrará devidamente mais adiante, as análises através da GBT tornam possível uma melhor interpretação dos resultados obtidos e conduzem a uma compreensão mais aprofundada dos vários aspectos de natureza mecânica associados aos comportamentos de estabilidade e pós-encurvadura (local, distorcional ou global) de elementos estruturais de aço enformados a frio. É ainda importante mencionar que existem semelhanças substanciais entre a GBT e o MFF (ou o MFFS), no sentido em que ambos os métodos (iv1) partilham o mesmo domínio de aplicação (perfis prismáticos com secção de parede fina), (iv2) adoptam representações do campo de deslocamentos similares e (iv3) tratam diferentemente as discretizações ao longo da linha média da secção transversal e ao longo do eixo do elemento estrutural. No entanto, deve também sublinhar-se que existem diferenças fundamentais entre os dois métodos, no que respeita à aproximação do campo de deslocamentos utilizada para efectuar a discretização ao longo da linha média da secção transversal. Estas diferenças estão ilustradas nas Figuras 4(a)-(b) e 5 e podem ser resumidas da seguinte forma:

- (iv.1) No MFF, a variação das componentes dos deslocamentos ao longo da linha média da secção transversal é aproximada por meio de funções polinomiais, definidas nas larguras das diversas faixas finitas adoptadas para discretizar a secção transversal e que asseguram a compatibilidade nos nós de separação entre duas faixas adjacentes. As amplitudes dessas funções, as quais correspondem a deslocamentos e rotações nodais, são os graus de liberdade da secção. Na GBT, o processo de discretização (original) conduz a funções de aproximação definidas em toda a linha média da secção transversal e que correspondem a modos de deformação dessa mesma secção (movimentos de corpo rígido ou configurações deformadas no seu próprio plano – ver Fig. 5) que traduzem comportamentos mecânicos/estruturais bem de-

finidos. As amplitudes dessas funções de aproximação são novamente os graus de liberdade da secção transversal – no entanto, elas podem agora ser encaradas como factores de participação dos modos de deformação na configuração deformada global da secção. Por outras palavras, a discretização da GBT fornece imediatamente (i.e., sem qualquer “esforço” adicional) os meios para efectuar uma “análise modal” da configuração deformada da secção, uma característica que torna a interpretação de vários aspectos relativos ao comportamento estrutural dos perfis com secção de parede fina muito elegante e particularmente clarificadora.

- (iv.2) A eficiência computacional da discretização da secção transversal preconizada pela GBT é bastante superior à das suas congéneres adoptadas pelos MFF/MFFS – obtêm-se resultados igualmente precisos através de análises efectuadas com um número

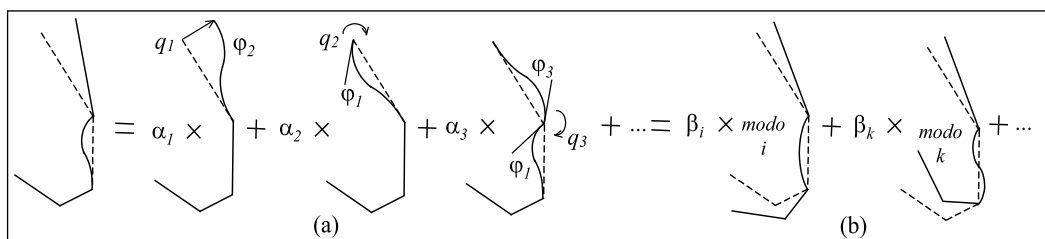


Figura 4: Discretização da secção transversal através (a) do MFF/MFFS e (b) da GBT.

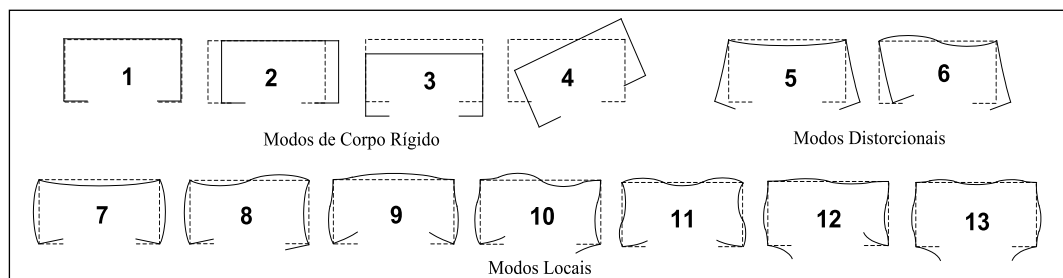


Figura 5: Configurações (no plano da secção) de 13 modos de deformação de uma secção em C.

de graus de liberdade substancialmente inferior. Para além disso, o facto de os graus de liberdade da GBT possuírem significados estruturais bem definidos abre a possibilidade de se seleccionarem apenas os mais relevantes de entre eles (frequentemente em pequeno número), o que conduz à execução de análises que se podem designar como “controladamente aproximadas” – este tipo de análises conduz a um economia computacional considerável, sem qualquer sacrificio da precisão dos resultados obtidos (e.g., Silvestre e Camotim 2003a).

- (iv.3) A Figura 5 mostra as configurações deformadas (no plano da secção) dos primeiros 13 modos de deformação de uma secção em C: 4 modos de corpo rígido (relativos à extensão longitudinal, à flexão em torno dos eixos de maior e menor inércia e à torção), 2 modos distorcionais e 7 modos locais. É importante referir que os

quatro primeiros modos de deformação da GBT são aqueles que são abrangidos pela teoria clássica de barras com secção de parede fina desenvolvida por Vlasov (1959). Assim, se apenas esses modos de deformação forem incluídos numa análise baseada na GBT, obter-se-ão resultados idênticos aos fornecidos pela dita teoria clássica de barras com secção de parede fina.

- (iv.4) No que diz respeito à variação longitudinal do campo de deslocamentos (i.e., à solução do problema unidimensional associado à análise do elemento estrutural), a formulação da GBT pode ser implementada utilizando (iv1) funções analíticas (tal como o MFF – a designação “GBT semi-analítica” faria algum sentido) ou (iv2) uma discretização longitudinal (tal como no MFFS). Neste último caso, podem adoptar-se várias técnicas, tais como diferenças finitas (e.g., Leach 1989) ou elementos finitos (e.g., Silvestre e Camotim 2003a, 2003b).

O trabalho pioneiro sobre a GBT foi publicado há cerca de quatro décadas por Schardt (1966). Posteriormente, Schardt esteve na origem (na qualidade de autor ou orientador) de uma impressionante actividade de investigação dedicada a desenvolver e aplicar formulações da GBT (e.g., Schardt 1983, 1989, 1994)⁵. Nos anos 80, Davies travou conhecimento com a GBT, tendo reconhecido imediatamente as suas elegância e enormes potencialidades – este facto, fez com que tivesse uma contribuição absolutamente decisiva para a disseminação da teoria no seio da comunidade técnico-científica de língua inglesa e, mais do que isso, para estabelecer a GBT como uma alternativa válida (e muitas vezes vantajosa) à utilização de análises baseadas no MEF ou no MFF/MFFS (e.g., Davies e Leach 1994; Davies et al. 1994 ou Davies 1998). Nos últimos 5-6 anos, a GBT tem atraído uma atenção considerável por parte de vários outros investigadores, facto que é confirmado pelo significativo número de publicações recentes originárias de Bratislava (e.g., Rendeck e Baláž 2004), de Coimbra (e.g., Simão e Silva 2004) e, sobretudo, de Lisboa – uma descrição detalhada das novas formulações e aplicações da GBT desenvolvidas na Universidade Técnica de Lisboa, as quais incluem análises de vibração e não se restringem a elementos estruturais de aço enformados a frio, pode ser encontrada em artigos de síntese recentes (Camotim et al. 2004, 2006) ou na tese de doutoramento de Silvestre (2005).

1.3 Condições de apoio dos elementos estruturais

Para que seja possível efectuar uma comparação racional e com significado científico entre (i) resultados de análises numéricas baseadas em diferentes métodos ou (ii) resultados numéricos e experimentais, é absolutamente indispensável que as condições de apoio dos elementos estruturais sejam modeladas adequadamente (i.e., que os dois conjuntos de resultados correspondam, efectivamente, ao mesmo problema). Assim, é necessário começar por definir, com o maior rigor possível, as condições de apoio normalmente consideradas tanto em diferentes simulações numéricas como em estudos

⁵ O livro de Schardt (1989) (em alemão) constitui ainda hoje a principal referência sobre a GBT.

experimentais relativos a perfis de aço enformados a frio. Antes de mais, deve fazer-se uma distinção clara entre condições de apoio globais e locais (ver a notação adoptada na Fig. 6): enquanto as primeiras dizem respeito às translações (uma axial e duas transversais) e às rotações (uma de torção e duas de flexão) de corpo rígido da secção extrema, as segundas envolvem os deslocamentos generalizados dos bordos transversais das paredes do elemento estrutural, relativamente à sua posição após sofrer todos os movimentos de corpo rígido. De entre as condições locais, devem ainda tratar-se separadamente aquelas que são respeitantes (i) ao empenamento (deslocamentos axiais u) e (ii) à deformação no plano (deslocamentos transversais de membrana e flexão, bem como as suas derivadas em relação à coordenada longitudinal $x - v, v_x, w, w_x$) das secções extremas.

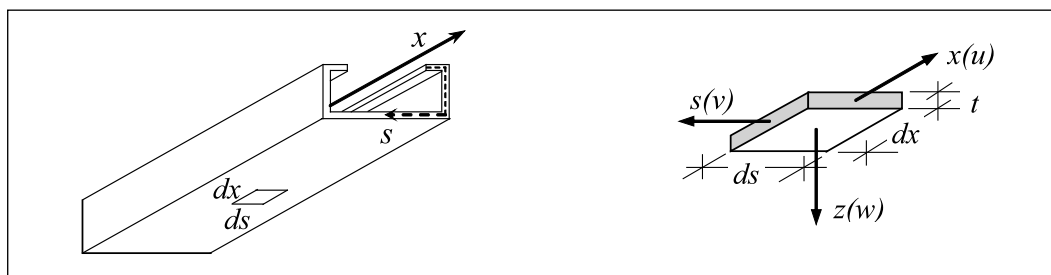


Figura 6: Sistema de coordenadas do elemento estrutural e componentes dos deslocamentos locais e globais.

Em seguida, listam-se e descrevem-se várias condições de apoio que são, com maior ou menor frequência, (i) modeladas em análises numéricas ou (ii) fisicamente executadas em investigações experimentais⁶. Assim, uma secção extrema pode ser:

- (i) *Livre*. Todos os deslocamentos e rotações globais e locais são completamente permitidos.
- (ii) *Encastrada*. Todos os deslocamentos e rotações globais e locais estão totalmente impedidos. Esta é a condição de apoio implementada na esmagadora maioria dos ensaios experimentais relativos a colunas (e.g., Rasmussen 2000).
- (iii) *Simplesmente Apoiada*. Os seguintes deslocamentos e rotações estão impedidos: (iii₁) translações transversais e rotação de torção (globais), e (iii₂) deslocamentos transversais de membrana e flexão (locais). Devido à natureza das funções analíticas utilizadas, esta condição de apoio é automaticamente modelada em praticamente todas as análises baseadas no MFF e também nas suas congéneres baseadas na GBT (semi-analíticas)⁷. É também importante referir que, unicamente no caso das análises de pós-encurvadura (i.e., não em análises de estabilidade), o impedimento da deformação da secção extrema no seu plano provoca, inevitavelmente, restrições a

6 Como é óbvio, admite-se implicitamente que os movimentos de corpo rígido da secção extrema associados a um determinado carregamento (cargas ou tensões aplicadas) estão completamente permitidos (e.g., a translação axial em colunas ou a rotação de flexão em vigas).

7 Admite-se que cada faixa finta é (individualmente) simplesmente apoiada. Em termos físicos, isto implica a existência de apoios simples (articulados) ao longo de toda a linha média da secção, o que significa que a ocorrência de deformações das paredes no plano da secção está completamente impedida.

nível do empenamento e das rotações de flexão global – este facto deve estar sempre presente quando se procede à interpretação dos resultados dessas análises. Para além disso, note-se que a simulação desta condição de apoio através de elementos finitos de casca conduz ao aparecimento de concentrações de tensões, um fenómeno que pode afectar significativamente os valores das tensões de bifurcação, sobretudo as associadas a modos locais (Dinis e Camotim 2003).

- (iv) *“Totalmente Simplesmente Apoiada”*. Esta condição difere da anterior pelo facto de a deformação da secção extrema no seu próprio plano ser permitida (i.e., os deslocamentos transversais de membrana e flexão das paredes estão quase totalmente livres – apenas é necessário que impeçam os movimentos de corpo rígido da secção). Em virtude desta diferença, esta condição de apoio apenas pode ser modelada devidamente no contexto de análises baseadas no MEF (elementos de casca).
- (v) *Localmente Encastrada e Globalmente Simplesmente Apoiada*. Apenas as translações globais transversais e a rotação de torção se encontram livres. Esta condição de apoio, a qual pode ser modelada tanto experimental (e.g., Batista et al. 2004) como numericamente (apenas através de análises baseadas no MEF, no entanto⁸) corresponde a (v_1) solidarizar a secção extrema com a superfície interna de uma placa de extremidade rígida e, em seguida, (v_2) apoiar a superfície externa dessa placa sobre uma rótula esférica (com a translação axial livre, no caso de a secção de apoio ser solicitada nessa direcção). Refira-se ainda que, em colunas curtas-intermédias que bifurcam em modos de instabilidade locais (sobretudo) ou distorcionais, esta condição de apoio pode dar origem a fenómenos de “deslocamento do centróide efectivo” das secções transversais (e.g., Young e Rasmussen 1999).
- (vi) *Localmente Articulada e Globalmente Simplesmente Apoiada*. Esta condição de apoio difere da anterior pelo facto de a linha média da secção extrema estar ligada à superfície interna da placa de extremidade rígida por meio de rótulas cilíndricas (uma por parede), e não completamente solidarizada. Por outro lado, a única diferença em relação à condição “simplesmente apoiada” (ver o ponto (iii)) reside no impedimento do empenamento, devido à presença da placa de extremidade rígida. Uma vez mais, o fenómeno do “deslocamento do centróide efectivo” pode ocorrer.
- (vii) *Localmente Articulada e Globalmente Encastrada*. Esta condição de apoio poderia ser designada como “quase encastrada”, na medida em que difere daquela que foi descrita anteriormente, no ponto (ii), apenas pelo facto de agora poderem ocorrer rotações de flexão nos bordos longitudinais das paredes. É ainda importante sublinhar que esta condição pode ser modelada numericamente – uma vez mais, somente no contexto de análises baseadas no MEF⁸ – e também foi já reproduzida em ensaios experimentais (e.g., os ensaios relativos à pós-encurvadura de colunas realizados por Kwon e Hancock 1992).

⁸ O método das faixas finitas (semi-analítico ou com funções “B3-Spline”) não permite modelar condições de apoio que envolvem restrições às rotações de flexão locais e globais *diferentes*. Apesar de as análises baseadas na GBT parecerem poder permitir modelar este tipo de condições de apoio, a realidade é que essa modelação não foi ainda realizada com sucesso.

2 Análise de estabilidade

Com o objectivo de ilustrar os resultados fornecidos por análises de estabilidade, em regime elástico, considerem-se agora as Figuras 7(a)-(c), as quais dizem respeito a colunas com secção em C (dimensões e propriedades materiais apresentadas na Fig. 13) e incluem:

- (i) Curvas P_b vs. L , as quais fornecem cargas de bifurcação que correspondem a modos de instabilidade com uma ($P_{b,1}$), duas ($P_{b,2}$) ou três ($P_{b,3}$) semi-ondas. Estas curvas apenas podem determinar-se por meio de análises baseadas no MFF ou na GBT (semi-analítica) – adoptando a função trigonométrica adequada para descrever a variação longitudinal dos deslocamentos. A precisão dos resultados obtidos depende do nível de discretização da secção transversal e deve referir-se que estão presentemente disponíveis dois programas de cálculo de muito fácil utilização para efectuar este tipo de análises (ambos baseados no MFF): (i₁) THIN-WALL (Papangelis e Hancock 1998), desenvolvido na Universidade de Sydney, e (ii) CUFMS, elaborado por Schafer (2003a) e que pode ser obtido gratuitamente na página pessoal deste investigador da Universidade Johns Hopkins de Baltimore.
- (ii) Uma curva P_{cr} vs. L , a qual fornece as cargas críticas de bifurcação das colunas. Esta curva pode ser determinada (ii₁) indirectamente, combinando os troços inferiores das várias curvas P_b vs. L (conforme se mostra na Fig. 7(a)) ou (ii₂) directamente, através de análises baseadas no MFFS, na GBT (implementada numericamente por meio de elementos finitos de barra) ou no MEF (elementos de casca) e em que a discretização longitudinal do elemento estrutural seja suficientemente fina. No que respeita às análises baseadas no MEF, deve tomar-se em consideração que (ii₁) a relação comprimento-largura do elemento finito deve estar compreendida entre 1 e 2 e que (ii₂) a utilização de elementos finitos com “integração reduzida”⁹ (e.g., o elemento S4R do programa ABAQUS) conduz frequentemente a significativas subavaliações das tensões de bifurcação distorcional – ver a Figura 14 (Dinis e Camotim 2004a).
- (iii) “Diagramas de participação modal”, os quais fornecem a variação (com L) da contribuição dos vários modos de deformação da GBT (mostrados na Fig. 5) para a configuração dos modos de instabilidade das colunas associados a P_{cr} (modos críticos – ver Fig. 7(b)) e a $P_{b,1}$ (ver Fig. 7(c)) – no primeiro caso, a participação de um modo de deformação pode exibir uma (números não sublinhados), duas (números sublinhados uma vez) ou três (números sublinhados duas vezes) semi-ondas. Estes diagramas constituem a “marca distintiva” das análises baseadas na GBT e tornam possível identificar rapidamente os “ingredientes estruturais” dos modos de instabilidade das colunas, cujas configurações são semelhantes às apresentadas Figura 1 (obtidas através do MEF) – em particular, os diagramas

⁹ A “integração reduzida” pode provocar (artificialmente) uma significativa diminuição da rigidez das paredes do elemento estrutural ao corte, a qual desempenha um papel fundamental na mecânica da bifurcação distorcional.

de participação modal são muito úteis para detectar a ocorrência de “modos de instabilidade mistos” (modos que combinam características locais, distorcionais e globais). Para além disso, estes diagramas mostram ainda que se podem efectuar análises de estabilidade (baseadas na GBT) exactas destas colunas considerando unicamente 7 modos de deformação (aqueles que participam nos respectivos modos de instabilidade) – i.e., basta resolver problemas de valores e vectores próprios de dimensão 7.

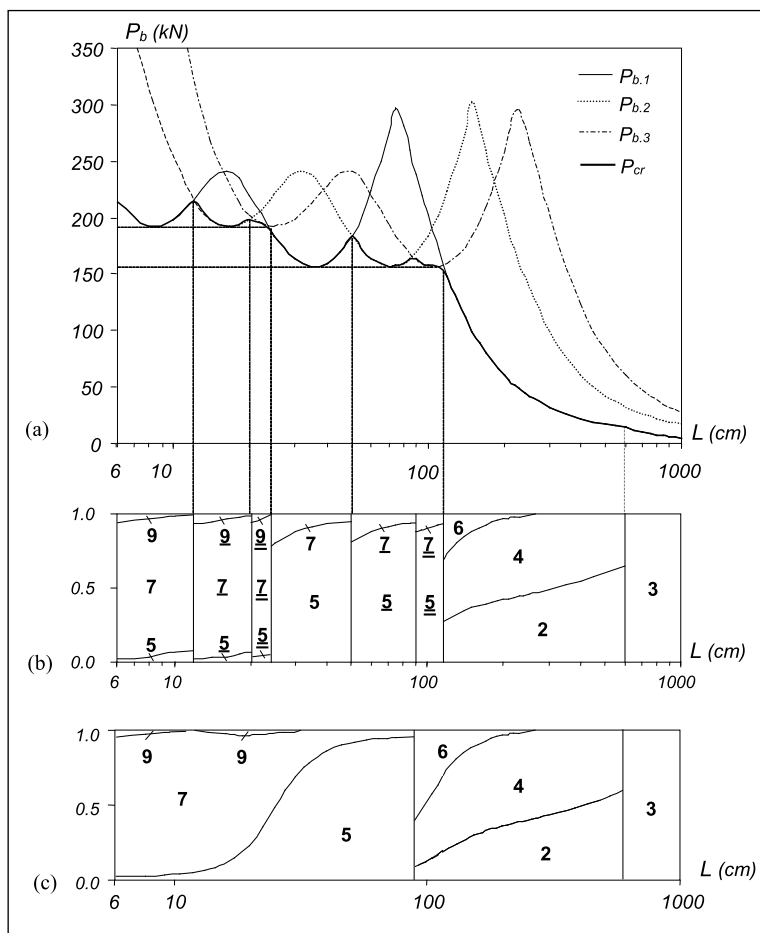


Figura 7: Estabilidade das colunas com secção em C: (a) curvas que fornecem a variação de $P_{b,1}$, $P_{b,2}$, $P_{b,3}$ e P_{cr} com L e diagramas de participação dos modos de deformação (da GBT) relativos aos modos de instabilidade (b) críticos e (c) com uma única semi-onda.

Em elementos estruturais cujas secções extrema não são simplesmente apoiadas, as análises de estabilidade só podem ser efectuadas utilizando o MFFS, a GBT ou o MEF e obtêm-se apenas curvas P_{cr} vs. L , a precisão das quais depende do nível de discretização longitudinal (i.e., do número de funções “B₃-Spline” ou do comprimento dos elementos

finitos de barra ou casca). Com o objectivo de ilustrar a influência das condições de apoio na estabilidade dos elementos estruturais, apresentam-se na Figura 8 as curvas P_{cr} vs. L relativas a colunas com secção em “Rack” com secções extremas (i) simplesmente apoiadas (C1), (ii) encastradas (C2) e (iii) localmente encastradas e globalmente simplesmente apoiadas (C3). Indicam-se também a natureza e o número de semi-ondas dos modos de instabilidade críticos relativos aos dois primeiros conjuntos de colunas.

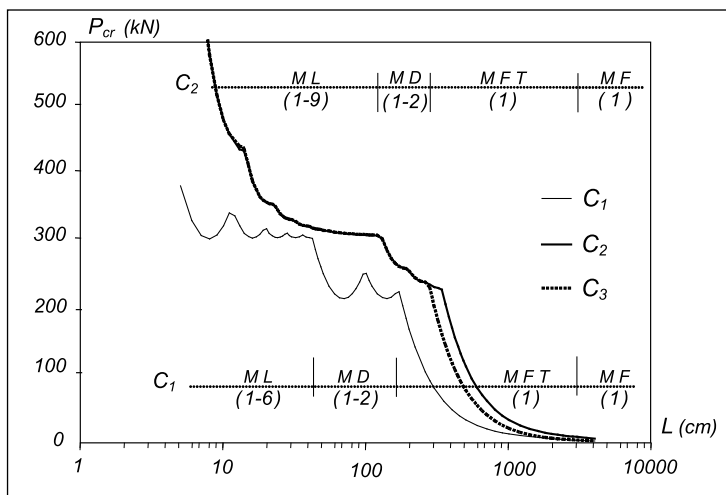


Figura 8: Estabilidade de colunas com secção em “Rack” e três condições de apoio distintas.

Estes resultados foram obtidos através de análises baseadas no MEF efectuadas no programa ABAQUS e discretizando as colunas em malhas refinadas de elementos de casca S4 (elementos isoparamétricos com quatro nós e “integração completa”) (Dinis e Camotim 2003). A observação das curvas da Figura 8 permite chegar às seguintes conclusões:

- (i) Como seria de esperar, (i_1) as cargas críticas (de bifurcação) das colunas encastradas são maiores que as das suas congéneres simplesmente apoiadas, para toda a gama de comprimentos, e (i_2) as diferenças entre as cargas críticas das colunas C2 and C3 só envolvem a bifurcação em modos de instabilidade globais (flexão-torção ou flexão).
- (ii) O encastramento das secções extremas das colunas conduz a modos de instabilidade locais com um maior número de semi-ondas (9 em vez de 6). Note-se ainda que a curva P_{cr} vs. L decresce visivelmente, o que reflecte a perda de influência do encastramento das secções extremas na estabilidade local das colunas, à medida que aumenta o seu comprimento.

Finalmente, deve ainda referir-se que a aplicação do “método da resistência directa” (“direct strength method” em língua inglesa – e.g., Schafer 2003b, 2003c), o qual constitui a abordagem mais moderna e promissora do dimensionamento de elementos estruturais de aço enformados a frio (foi já incluído nas versões mais recentes dos regulamentos Norte Americano e Australiano/Neo-Zelandês), requer o conhecimento

das tensões de bifurcação locais e distorcionais (e globais, claro). Entre outras coisas, este facto reflecte a crescente familiaridade dos projectistas de estruturas de aço com os conceitos envolvidos nas análises de estabilidade (bifurcação) e com as ferramentas numéricas que permitem efectuar essas mesmas análises.

3 Análise de pós-encurvadura elástica

3.1 Formulação da GBT

Para além da óbvia necessidade de considerar relações cinemáticas (i.e., relações deformações-deslocamentos) com um grande número de termos não lineares (todos os importantes), o desenvolvimento de uma formulação da GBT que se destina a analisar o comportamento de pós-encurvadura de elementos estruturais com secção de parede fina contendo imperfeições geométricas iniciais exige uma discretização especial (modal) da secção transversal (Silvestre e Camotim 2003a). Na realidade, esta nova discretização é bastante mais complexa que aquela que é efectuada no contexto da “GBT convencional” originalmente proposta por Schardt (1989), no sentido em que envolve a consideração de dois conjuntos adicionais de modos de deformação, os quais (i) resultam da imposição de deslocamentos unitários de membrana axiais (de empenamento) e transversais e (ii) não satisfazem a hipótese de Vlasov de as distorções de membranas serem nulas ao longo da linha média da secção. Estes conjuntos adicionais de modos de deformação designam-se e caracterizam-se da seguinte forma:

- (i) *Modos de Corte*. Baseados na hipótese de os deslocamentos transversais de membrana serem nulos (a qual implica automaticamente que os deslocamentos transversais de flexão sejam também nulos), a sua incorporação nas análises de pós-encurvadura permite tomar em consideração a não linearidade dos deslocamentos de empenamento ao longo da linha média de cada parede. A Figura 9 mostra os deslocamentos de empenamento associados aos dez modos de corte mais relevantes de uma secção em C.
- (ii) *Modos de Extensão Transversal*. Baseados na hipótese de os deslocamentos axiais (de empenamento) serem nulos, a sua incorporação nas análises de pós-encurvadura permite tomar em consideração as extensões laterais provocadas em cada parede pela respectiva flexão transversal. A Figura 10 mostra as configurações deformadas associadas aos oito modos de extensão transversal mais relevantes de uma secção em C.

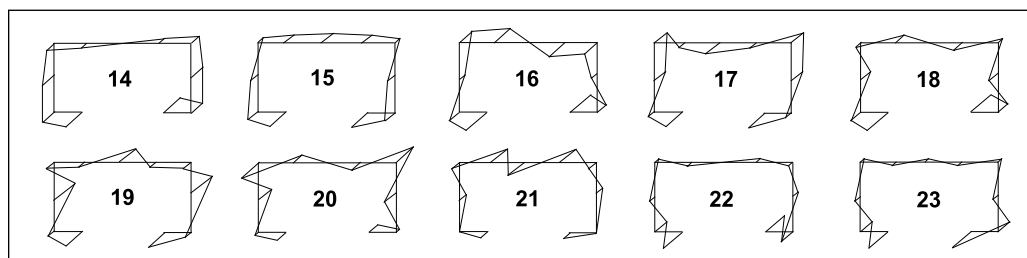


Figura 9: Deslocamentos de empenamento dos 10 modos de corte mais relevantes (secção em C).

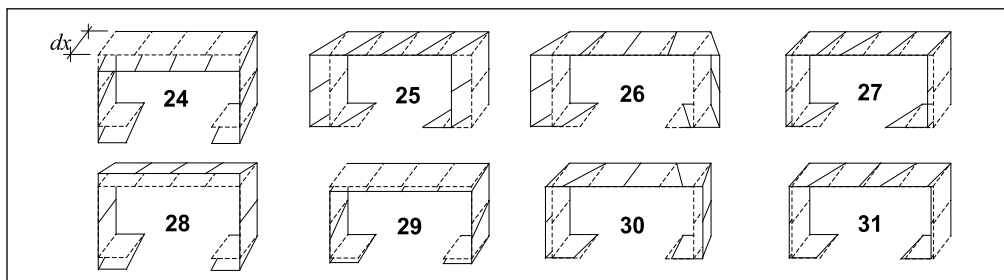


Figura 10: Configurações dos 8 modos de extensão transversal mais relevantes (secção em C).

Para resolver o sistema de equações diferenciais de equilíbrio da GBT, o qual se exprime em termos (i) das propriedades mecânicas modais da secção do elemento estrutural (já conhecidos após efectuar a análise da secção) e (ii) das funções de amplitude modal (ainda desconhecidas), torna-se indispensável formular um elemento finito de barra não linear com dois nós, uma tarefa que foi executada adoptando polinómios cúbicos de Hermite como funções de forma (Silvestre e Camotim 2003a). Obtém-se a solução do sistema de equações algébricas que resulta da subsequente discretização do perfil em elementos finitos recorrendo a estratégias de resolução de sistema de equações não lineares bem conhecidas: o algoritmo de previsão-correcção baseado no método de Newton-Raphson e a técnica de controle do comprimento de arco (e.g., Crisfield 1991, 1997). Na Figura 11 apresenta-se um diagrama sequencial que proporciona uma

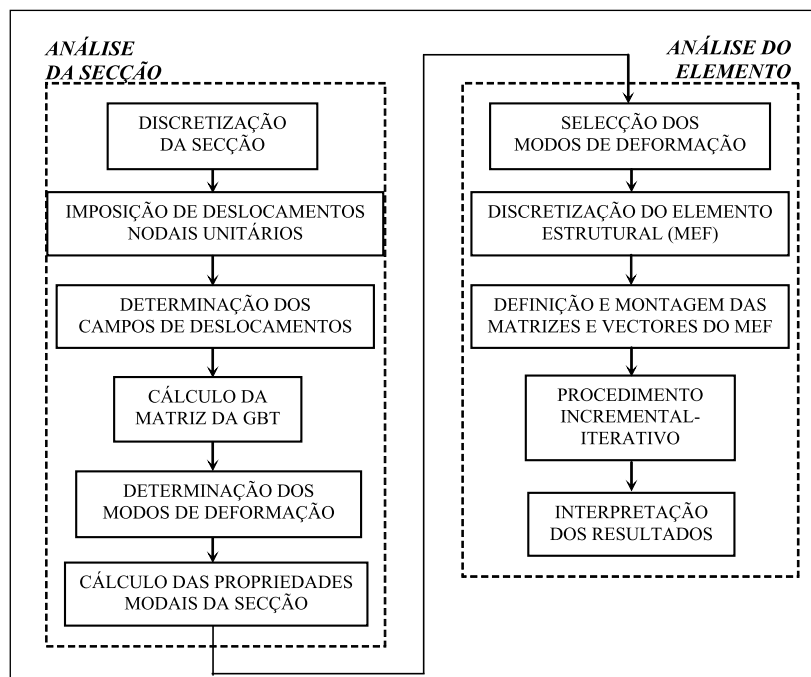


Figura 11: Procedimentos envolvidos numa análise de pós-encurvadura baseada na GBT.

perspectiva global dos vários passos e procedimentos envolvidos na execução da análise de pós-encurvadura de um elemento estrutural de aço enformado a frio baseada na GBT, os quais podem agrupar-se em duas tarefas principais: (i) a análise da secção transversal, a qual fornece os modos de deformação e os valores das correspondentes propriedades mecânicas modais, após o que se efectua (ii) a análise do elemento estrutural, a qual inclui a resolução do sistema de equações não lineares que rege o equilíbrio do perfil e também a interpretação dos resultados obtidos, tirando partido da descrição modal que caracteriza a GBT.

3.2 Resultados numéricos

A Figura 12 diz respeito a colunas com secção em C e fornece uma ilustração das diferenças qualitativas que existem entre os comportamentos de pós-encurvadura de colunas com imperfeições geométricas iniciais (com a forma do modo de instabilidade crítico), cujas “versões perfeitas” bifurcam em modos de instabilidade locais, distorcionais e globais. Na realidade, uma rápida observação das diversas trajectórias de equilíbrio permite confirmar dois factos bem conhecidos sobre os comportamentos de pós-encurvadura global e local de colunas: a rigidez e a resistência pós-críticas são (i) muito baixas no primeiro caso e (ii) bastante significativas no segundo. No que respeita ao comportamento de pós-encurvadura distorcional, o qual tem sido objecto de bem menos estudos que os dois restantes, é importante referir que ele se situa numa posição intermédia, tanto em termos cinemáticos como de rigidez e resistência – a deformação distorcional envolve, em simultâneo, rotações de corpo rígido (de subconjuntos de paredes em torno de bordos longitudinais interiores), tal como na deformação global, e flexão transversal das paredes, tal como na deformação local.

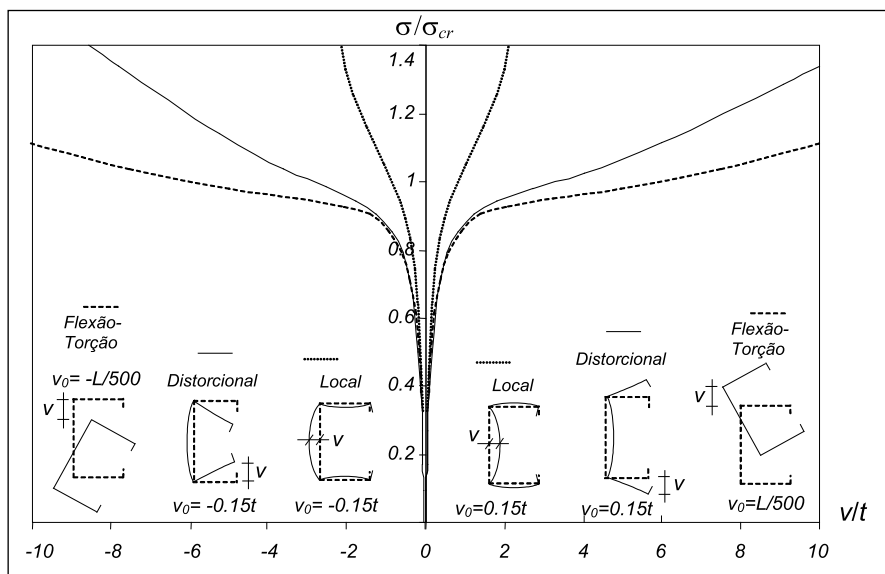


Figura 12: Trajectórias de pós-encurvadura local, distorcional e global (colunas em C).

Em seguida, apresentam-se resultados de análises baseadas na GBT e no MEF relativas ao comportamento de pós-encurvadura distorcional de duas colunas simplesmente apoiadas com secção em C, contendo imperfeições geométricas iniciais com a forma do modo de instabilidade crítico e amplitudes $v_0 = +0.15t$ (abertura dos conjuntos banzo-reforço) e $v_0 = -0.15t$ (fecho dos conjuntos banzo-reforço) – a única diferença entre as duas colunas reside no sinal das imperfeições iniciais. As dimensões da secção transversal e a discretização da GBT estão indicadas na Figura 13, a qual mostra (i) as duas trajectórias de pós-encurvadura e (ii) diagramas que fornecem a evolução da participação dos modos de deformação da GBT nas configurações deformadas das colunas situadas sobre essas trajectórias de equilíbrio. Para além disso, refira-se que se obtiveram os resultados da GBT discretizando axialmente as colunas em 8 elementos finitos de barra (Camotim e Silvestre 2004). Observa-se de imediato que:

- (i) Há uma coincidência quase absoluta entre os resultados das análises baseadas no MEF (ABAQUS – elementos S4) e na GBT – para $v/t < 10$, as diferenças nunca excedem 2.1%.
- (ii) Existe uma clara assimetria das trajectórias de pós-encurvadura associadas a valores de v_0 positivos e negativos – a maior resistência pós-crítica corresponde a $v_0 < 0$. Refira-se que este surpreendente fenómeno foi detectado pela primeira vez por Prola e Camotim (2002), por meio de análises de pós-encurvadura baseadas no MFFS.

Deve ainda referir-se que todos os modos de deformação associados à discretização da secção indicada na Figura 13 foram incluídos nas análises baseadas na GBT. No entanto, constatou-se que apenas alguns deles participam nas configurações deformadas que as colunas exibem ao longo das suas trajectórias de pós-encurvadura: os modos (i) convencionais 1, 5 e 7 (ver Fig. 5), (ii) de corte 15, 19 e 23 (ver Fig. 9) e (iii) de extensão transversal 26 e 28 (ver Fig. 10). Isto significa que se obteriam também resultados “exactos” através de análises baseadas na GBT que incluíssem unicamente estes 8 modos de deformação – este facto ilustra a elevada economia computacional que a GBT pode proporcionar, sem o menor sacrifício da precisão dos resultados obtidos. Para além disso, a natureza modal desses resultados permite compreender melhor a assimetria das trajectórias de equilíbrio referida no parágrafo anterior – na realidade, uma observação atenta dos diagramas de participação modal da Figura 13 mostra que:

- (i) O modo 1 é dominante durante os estádios iniciais da pré-encurvadura, antes de ser gradualmente “substituído” pelo modo 5 – no entanto, a participação deste modo é diferente nas colunas cujos conjuntos banzo-reforço abrem e fecham. Enquanto no primeiro caso o modo 5 surge quando se tem $\sigma \approx 0.50\sigma_{cr}$ e a sua participação cresce até cerca de 84%, no segundo caso essa participação inicia-se apenas em $\sigma \approx 0.70\sigma_{cr}$, mas cresce mais rapidamente até cerca de 92%.

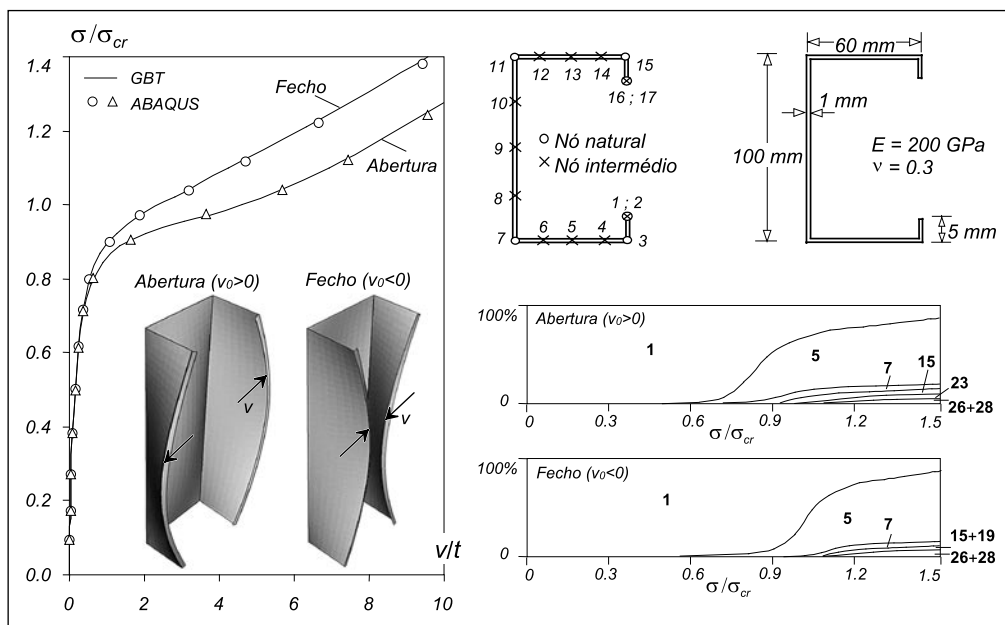


Figura 13: Trajetórias de pós-encurvadura distorcional e diagramas de participação modal.

- (ii) A participação dos modos de corte também difere consideravelmente nas colunas cujos conjuntos banzo-reforço abrem e fecham. No primeiro caso (mais flexível), os modos 15 e 23 surgem, conjuntamente com o modo 7, quando se tem $\sigma \approx 0.90\sigma_{cr}$ e a sua participação é relevante (cresce até 10%). No segundo caso, a contribuição dos modos 15 e 19 só se inicia para $\sigma > 1.05\sigma_{cr}$ e a sua participação conjunta fica sempre abaixo dos 5%.
- (iii) As diferenças de participação modal descritas no ponto anterior (sobretudo as que dizem respeito aos modos de corte) fornecem uma explicação cabal para a assimetria patente nas duas trajetórias de pós-encurvadura representadas na Figura 13. Note-se que seria absolutamente impossível extrair uma explicação tão clara e “estrutural” a partir dos resultados obtidos através de análises baseadas no MEF (de natureza nodal).

Em relação aos resultados das análises baseadas no MEF, deve (i) sublinhar-se o facto de estes terem sido obtidos discretizando as colunas em elementos S4 e, ao mesmo tempo, (ii) alertar-se o leitor para o “perigo” de utilizar elementos de casca com “integração reduzida”. Para justificar este “alerta” e permitir avaliar os erros envolvidos, as Figuras 14(a)-(b) mostram resultados, relativos à estabilidade e à pós-encurvadura distorcional de colunas com secção em C, obtidos através do programa ABAQUS e adoptando malhas idênticas de elementos S4 e S4R (Dinis e Camotim 2004a) – os resultados de pós-encurvadura dizem respeito a uma coluna com imperfeições iniciais de amplitude $v_0 = +0.1t$ (abertura dos conjuntos banzo-reforço) e são comparados com valores obtidos utilizando o MFFS (Prola e Camotim 2002). Observa-se que:

- (i) As malhas de elementos S4 and S4R conduzem praticamente aos mesmos (precisos) resultados no caso da estabilidade local e global (por flexão-torção). No entanto, a situação altera-se no caso da estabilidade distorcional: os valores de σ_{cr} obtidos com discretizações da coluna em elementos S4 e S4R diferem consideravelmente, sendo os primeiros aqueles que estão correctos – esta diferença resulta, basicamente, de o processo da “integração reduzida” provocar uma diminuição significativa (e artificial) na rigidez de corte do elemento finito, a qual tem um papel crucial na estabilidade distorcional.
- (ii) Naturalmente (em face dos resultados de estabilidade), a trajetória de pós-encurvadura distorcional obtida com elementos S4 é visivelmente mais rígida que a fornecida pelos elementos S4R. A comparação com valores “exactos”, determinados por análises baseadas no MFFS, mostra claramente que apenas os elementos S4 conduzem a resultados precisos.

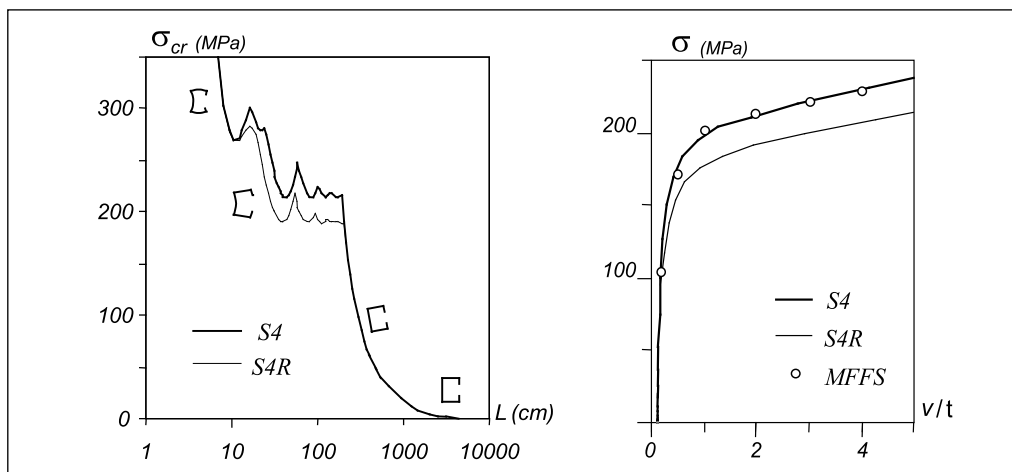


Figura 14: Resultados de análises baseadas no MEF, relativas (a) à estabilidade e (b) à pós-encurvadura distorcional de colunas, e adoptando discretizações em elementos de casca S4 e S4R.

3.3 Interacção entre modos locais e distorcionais

Abordagens baseadas na GBT e no MEF foram recentemente utilizadas para estudar o comportamento de pós-encurvadura de colunas de aço enformadas a frio com secção em C e tensões de bifurcação crítica local e distorcional idênticas, as quais correspondem a modos de instabilidade com 3 e 1 semi-ondas (Silvestre e Camotim 2004; Dinis e Camotim 2004b, Dinis et al. 2005a) – a Figura 15 mostra as dimensões da secção transversal da coluna, o seu comportamento de estabilidade (as curvas P_{cr} vs. L e $P_{b,2}$ vs. L fornecem os valores das duas primeiras cargas de bifurcação) e a configuração do modo de instabilidade “combinado” que corresponde à coincidência das duas cargas de bifurcação ($L=27$ cm). Todas as colunas analisadas têm as mesmas dimensões e con-

têm imperfeições geométricas iniciais com a mesma amplitude e várias configurações – obtidas considerando diferentes combinações lineares dos dois modos de instabilidade críticos (normalizados), conforme se ilustra na Figura 16.

Muito embora esteja fora do âmbito do presente trabalho apresentar uma descrição detalhada da actividade de investigação relativa aos fenómenos de acoplamento entre modos de instabilidade locais e distorcionais, é conveniente referir que (Silvestre e Camotim 2004; Dinis e Camotim 2004b; Dinis et al. 2005a):

- (i) A comparação entre as abordagens baseadas na GBT e no MEF mostraram claramente que a natureza modal da GBT proporciona resultados passíveis de uma interpretação “estrutural” que está completamente fora do alcance das análises por elementos finitos de casca. Em particular, concluiu-se que tem muito mais significado encarar as imperfeições iniciais existentes na coluna como combinações lineares dos modos de deformação 5 e 7 (representados na Fig. 5), em vez de combinações lineares dos modos de instabilidade local e distorcional cuja interacção se pretende estudar (conforme está ilustrado na Fig. 16).
- (ii) Nos estádios mais avançados da pós-encurvadura, as trajectórias de equilíbrio de todas as colunas (com diferentes configurações das imperfeições iniciais) “convergem” para uma de duas “curvas comuns”, as quais correspondem a modos acoplados predominantemente distorcionais e envolvendo abertura ou o fecho dos conjuntos banzo-reforço – as curvas representadas na Figura 17, obtidas através de

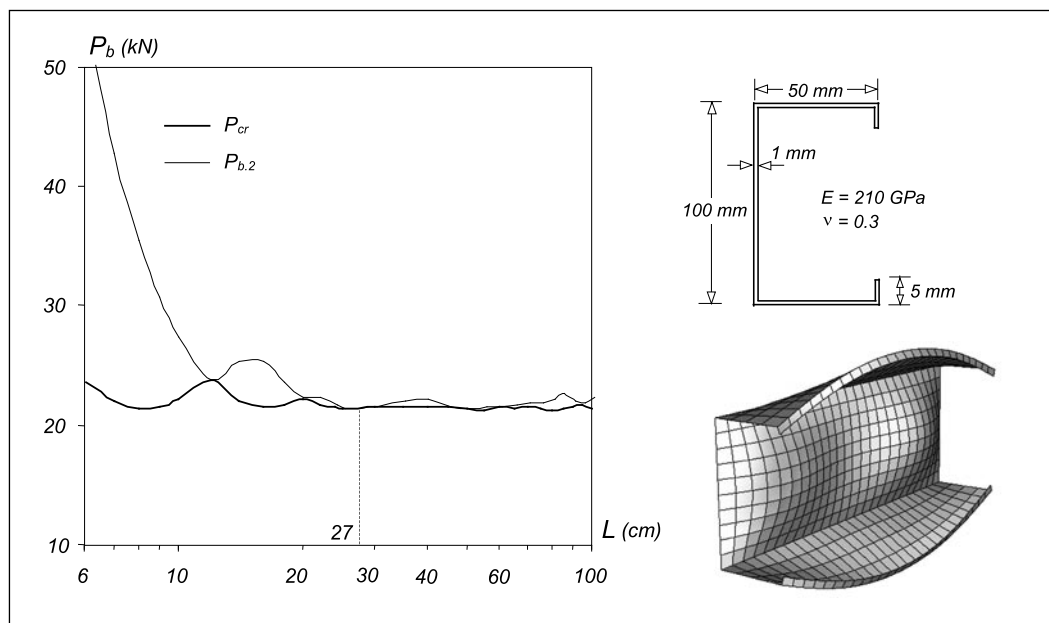


Figura 15: Coluna com interacção modal: dimensões da secção transversal, comportamento de estabilidade (P_{cr} e $P_{b,2}$ – duas primeiras cargas de bifurcação) e modo de instabilidade “combinado”.

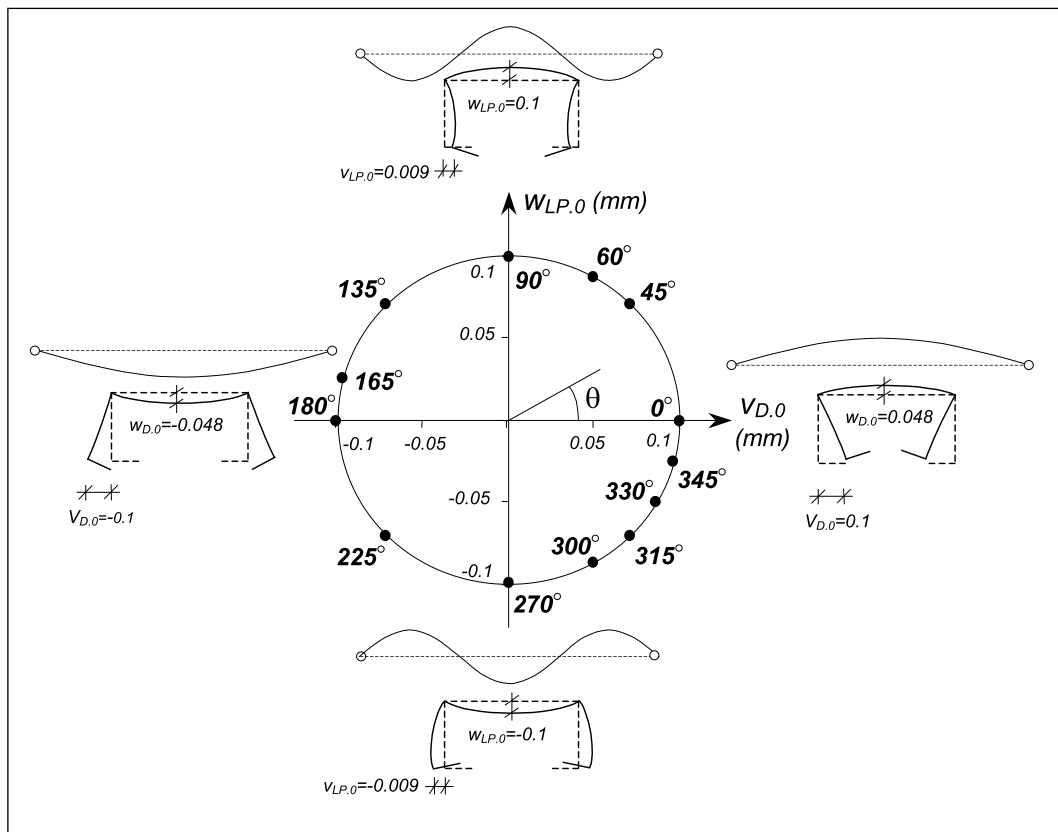


Figura 16: Representação das configurações das imperfeições iniciais no plano $w_{D,0}-w_{LP,0}$.

análises baseadas na GBT, fornecem uma ilustração qualitativa desta afirmação. É importante sublinhar que o conhecimento da natureza (abertura ou fecho) da componente distorcional das imperfeições iniciais (i.e., o valor do ângulo θ no plano $w_{D,0}-w_{LP,0}$ da Fig. 16) é determinante para se saber qual a curva para que converge a trajectória de equilíbrio de uma determinada coluna.

- (iii) Quando a componente local das imperfeições iniciais é muito maior que a sua congénere distorcional (i.e., para $\theta \approx 90^\circ$ ou $\theta \approx 270^\circ$ – ver Fig. 16), a trajectória de equilíbrio da coluna exibe um fenómeno de instabilidade por “snap-through” mais ou menos perceptível, o qual está relacionado com uma “súbita mudança de configuração” – decréscimo da sua componente local. Este fenómeno está bem ilustrado na Figura 18, onde se mostram quatro trajectórias de equilíbrio determinadas através de análises baseadas no MEF¹⁰ que correspondem a imperfeições distorcionais puras ($\theta=0^\circ$ e $\theta=180^\circ$) e locais puras ($\theta=90^\circ$ e $\theta=270^\circ$). Observa-se que apenas as duas últimas exibem pontos limite e fenómenos de “snap-through” – muito mais “abrupto” o que ocorre na curva associada a $\theta=90^\circ$.

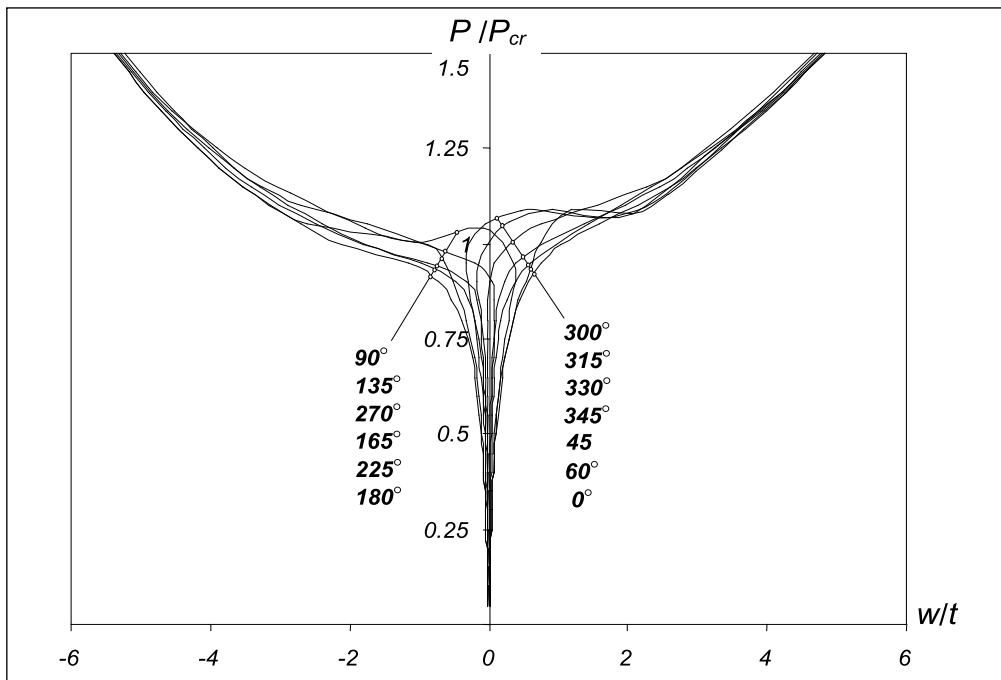


Figura 17: Trajetórias de equilíbrio de colunas contendo imperfeições geométricas iniciais com diferentes configurações (trajetórias obtidas através de análises baseadas na GBT).

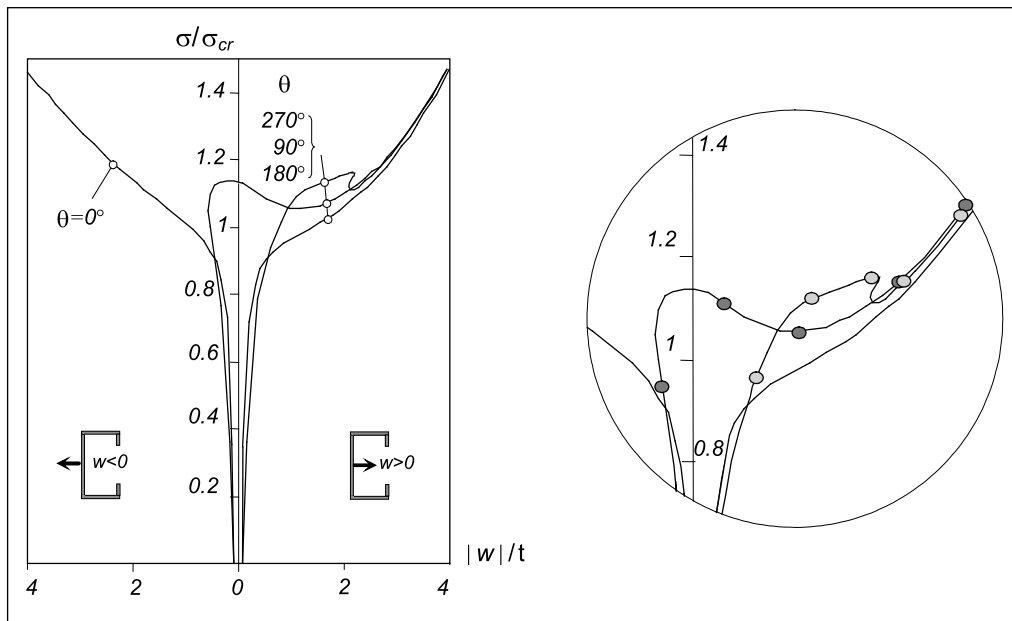


Figura 18: Trajetórias de equilíbrio de colunas que exibem fenômenos “snap-through” (trajetórias determinadas através de análises baseadas no MEF).

- (iv) As imperfeições distorcionais puras são as mais prejudiciais para o comportamento da coluna, no sentido em que são as que provocam uma maior redução da sua capacidade resistente – note-se que as curvas da Figura 17 relativas a $\theta=0^\circ$ e $\theta=180^\circ$ (ver Fig. 16) estão abaixo de todas as que para elas convergem. Este resultado tem muita importância a nível de dimensionamento, pois significa que a resistência da coluna é sempre controlada pela sua sensibilidade às imperfeições distorcionais puras, independentemente de ocorrerem ou não fenómenos de interacção entre modos locais e distorcionais.

4 Análise de pós-encurvadura elasto-plástica

Muito embora tenham existido algumas tentativas para formular e implementar computacionalmente faixas finitas (semi-analíticas e com funções “B₃-Spline”) que tornassem possível executar análises de pós-encurvadura de perfis de aço enformados a frio em regime elasto-plástico (e.g., Key e Hancock 1993 ou Guo e Lindner 1993), é lícito afirmar que, até à data, este tipo de análises estruturais apenas podem ser efectuadas rigorosamente (i.e., de modo a fornecerem o comportamento de pós-encurvadura e o valor da resistência última “exactos” do elemento estrutural) recorrendo a análises baseadas no MEF e discretizando os perfis em malhas muito refinadas de elementos de casca não lineares (geométrica e fisicamente). Como a comunidade técnico-científica ligada às estruturas de aço enformados a frio apenas teve acesso a ferramentas de cálculo capazes de efectuarem análises com estas características nos últimos anos (i.e., após o desenvolvimento e a disseminação mais ou menos universal de computadores e programas de cálculo de elevada potência), não surpreende que a sua utilização e aplicação constituam áreas onde decorre presentemente uma intensa actividade de investigação (e.g., Hasham e Rasmussen 2001; Young e Yan 2002; Bakker e Peköz 2003; Sarawit et al. 2003; Dinis e Camotim 2004a, 2004b; Landolfo et al. 2005 ou Young e Ellobody 2005). Em particular, as simulações numéricas baseadas no MEF têm vindo a ser cada vez mais utilizadas para realizar “ensaios virtuais”, os quais tendem a substituir, pelo menos parcialmente, os (muito mais dispendiosos) ensaios experimentais propriamente ditos (físicos) – é suficiente realizar um pequeno número de ensaios físicos (cuidadosamente planeados e rigorosamente instrumentados), os quais visam validar uma modelação numérica mais ou menos complexa, posteriormente utilizada para efectuar estudos paramétricos alargados (e.g., Joó e Dunai 2002). Para além disso, as análises baseadas no MEF desempenham também um papel fundamental na validação e calibração de metodologias de dimensionamento eficazes (i.e., seguras e económicas) para perfis de aço enformados a frio (e.g., Young 2004; Batista et al. 2006).

¹⁰ Devido ao facto de se terem considerado incrementos de carga muito menores e um maior refinamento no processo iterativo, os fenómenos de “snap-through” são bastante mais visíveis (i.e., pronunciados) nas trajectórias de equilíbrio determinadas através do MEF que naquelas que foram obtidas por meio da GBT.

No que diz respeito à utilização das simulações numéricas no desenvolvimento de metodologias de dimensionamento eficazes para elementos estruturais de aço enformados a frio, um aspecto fundamental é o conhecimento das imperfeições geométricas iniciais e tensões residuais que devem ser incorporadas nas análises. Neste contexto, não podem deixar de referir-se os trabalhos pioneiros de Schafer e Peköz (1998) e, mais recentemente, de Dubina e seus colaboradores (Dubina e Ungareanu 2002; Dubina et al. 2004) – estes investigadores procuraram (i) sistematizar e caracterizar os vários tipos de imperfeições geométricas iniciais (sobretudo) e tensões residuais, e também (ii) avaliar a influência que a presença dessas imperfeições exerce na capacidade resistente dos elementos estruturais. O objectivo final destes trabalhos consiste em estabelecer um conjunto de regras e recomendações, fiáveis e de fácil utilização, que possam ser utilizadas tanto (i) pelos produtores (tolerâncias de fabrico dos perfis) como (ii) pelos projectistas (definição clara das imperfeições que devem ser incluídas nas análises numéricas). Finalmente, deve ainda mencionar-se que é prática comum desprezar o efeito das tensões residuais no comportamento de pós-encurvadura e no valor da resistência última dos perfis de aço enformados a frio – de facto, e ao contrário do que sucede com os perfis de aço laminados a quente ou soldados, a influência das tensões residuais na capacidade resistente dos elementos estruturais de aço enformados a frio é muito pequena (Schafer e Peköz 1998; Dubina e Ungareanu 2002; Ellobody e Young 2005; Young e Ellobody 2005).

Em seguida, apresenta-se uma pequena (mas significativa) amostra dos resultados publicados recentemente por Dinis e Camotim (2004a), os quais (i) são dizem respeito ao comportamento de pós-encurvadura, em regime elasto-plástico, de colunas simplesmente apoiadas com secção em “Rack” e (ii) foram obtidos através da utilização do programa ABAQUS, adoptando malhas refinadas de elementos S4 para discretizar as colunas. No entanto, antes de apresentar esses resultados, deve sublinhar-se que eles não abordam as questões referidas no parágrafo anterior, relativas à influência do tipo de imperfeições iniciais – de facto, os autores admitiram que todas as colunas analisadas (i) continham imperfeições geométricas iniciais com a forma do modo de instabilidade crítico e amplitudes relativamente pequenas (10% da espessura da parede do perfil), e (ii) não exibiam tensões residuais.

As Figuras 19 e 20 mostram resultados relativos a colunas de aço enformadas a frio ($E=210$ GPa e $\nu=0.3$) com a secção em “Rack” indicada e que bifurcam (em regime elástico) em modos de instabilidade locais e distorcionais com uma única semi-onda. As respectivas tensões de bifurcação valem $\sigma_{cr,L}=277.4$ MPa e $\sigma_{cr,D}=209.4$ MPa, valores que correspondem a comprimentos $L=11$ cm e $L=94$ cm – note-se que, em virtude de estes valores serem bastante diferentes ($\sigma_{cr,L}/\sigma_{cr,D} > 1.3$), não ocorrem fenómenos de interacção modal local/distorcional. Consideram-se dois valores para a tensão de cedência do aço – $f_y=355$ MPa ($f_y/\sigma_{cr,L} \approx 1.3$ e $f_y/\sigma_{cr,D} \approx 1.7$) e $f_y=550$ MPa ($f_y/\sigma_{cr,L} \approx 2$ e $f_y/\sigma_{cr,D} \approx 2.6$) – e, como já se referiu, as colunas contêm imperfeições geométricas iniciais com a forma do modo de instabilidade crítico e amplitudes iguais 10% da espessura da parede. Assim, tem-se $w_0=0.1$ t (pós-encurvadura local) e $|v_0|=0.1$ t (pós-encurvadura distorcional) – devido à assimetria do comportamento de pós-encurvadura distorcional, é necessário fazer

a distinção entre $v_0=+0.1$ t (abertura dos conjuntos banzo-reforços) e $v_0=-0.1$ t (fecho desses mesmos conjuntos). Os resultados apresentados em cada uma das duas figuras consistem em (i) três trajectórias de equilíbrio (uma elástica, incluída a título comparativo, e duas elasto-plásticas) e (ii) a configuração deformada da coluna elasto-plástica com $f_y=550$ MPa na vizinhança próxima do colapso (i.e., o mecanismo de colapso – note-se que, no caso da pós-encurvadura distorcional, esse mecanismo depende do “sinal” do movimento dos conjuntos banzo-reforços).

A observação atenta dos resultados apresentados nas Figuras 19 e 20 mostra que:

- (i) A comparação entre as trajectórias de pós-encurvadura locais e distorcionais mostra que as primeiras exibem uma resistência pós-crítica bastante superior (independentemente do sinal das imperfeições iniciais distorcionais) – note-se que as escalas dos eixos horizontal e vertical são diferentes nas duas figuras. Deste modo, as regras e os procedimentos de dimensionamento desenvolvidos no contexto da instabilidade local não podem aplicar-se directamente a problemas que envolvem instabilidade distorcional.
- (ii) A comparação entre as assimetrias das trajectórias de pós-encurvadura distorcional das colunas com secção em C e em “Rack” (Figs. 13 e 20) mostra que a segunda é (ii₁) menos pronunciada e (ii₂) qualitativamente diferente – a maior resistência pós-crítica está agora associada a $v > 0$, i.e., à abertura dos conjuntos banzo-reforços). Portanto, é importante chamar a atenção para o facto de a natureza desta assimetria variar com a geometria da secção transversal da coluna.
- (iii) Quanto ao comportamento de pós-encurvadura local em regime elasto-plástico, observa-se que, uma vez atingida a carga de cedência, a plasticidade espalha-se com muita rapidez, conduzindo a (iii₁) uma redução bastante súbita da rigidez (i.e., as curvas elástica e elasto-plástica “divergem abruptamente”) e a (iii₂) uma rápida erosão da reserva de resistência (o colapso ocorre pouco depois). Logicamente, este comportamento torna-se mais pronunciado à medida que diminui a relação f_y/σ_{cr} , já que o início da cedência ocorre para uma distribuição “mais uniforme”, o que faz com que o espalhamento da plasticidade seja mais rápido – e.g., note-se que, para $f_y=355$ MPa, o início da cedência e o colapso ocorrem para valores da tensão aplicada muito próximos ($\sigma/\sigma_{cr} \approx 0.87$ contra $\sigma/\sigma_{cr} \approx 0.94$).
- (iv) No que respeita ao comportamento de pós-encurvadura distorcional em regime elasto-plástico, constata-se que a proximidade entre o início da cedência e o colapso é muito maior na coluna com $f_y=355$ MPa (i.e., a coluna com $f_y=550$ MPa tem um comportamento bastante mais “dútil”). Esta diferença é novamente devida ao facto de a distribuição das tensões ser “praticamente uniforme” na secção de meio vão quando se inicia a cedência – assim, a secção média da colunas sofre uma plastificação total “quase instantânea”.

- (v) Quando o colapso local está iminente, a alma da coluna encontra-se totalmente plastificada e formam-se “charneiras plásticas” na vizinhança dos bordos longitudinais alma-banzo. Enquanto a alma apresenta deformações plásticas consideráveis, as restantes paredes continuam a trabalhar em regime elástico – estas paredes “recuperam” progressivamente as respectivas configurações iniciais à medida que a coluna evolui ao longo do ramo descendente da sua trajectória de equilíbrio.
- (vi) Ambos os colapsos distorcionais, i.e., os que envolvem a abertura ($v > 0$) e o fecho ($v < 0$) dos conjuntos banzo-reforços, estão associados à formação de uma “rótula plástica” bem definida (localizada) na secção de meio vão da coluna. Esta “rótula plástica” está associada a um mecanismo de colapso que envolve a formação de “charneiras plásticas” na alma, nos banzos e nos reforços (e.g., Kotelko 2004).

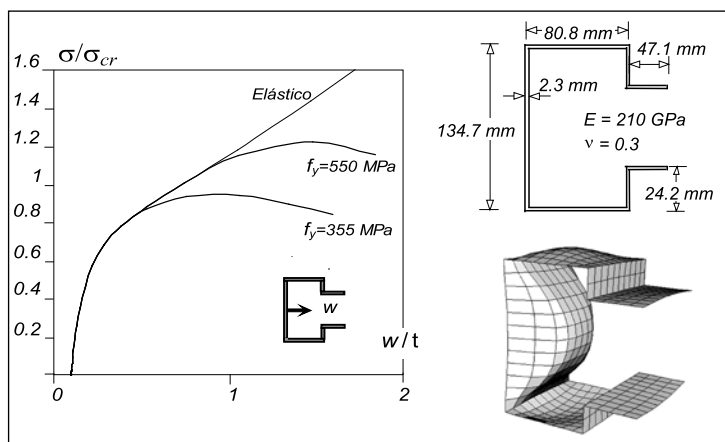


Figura 19: Colunas com secção em “Rack”: trajectórias de pós-encurvadura local, em regime elástico e elasto-plástico, e mecanismo de colapso.

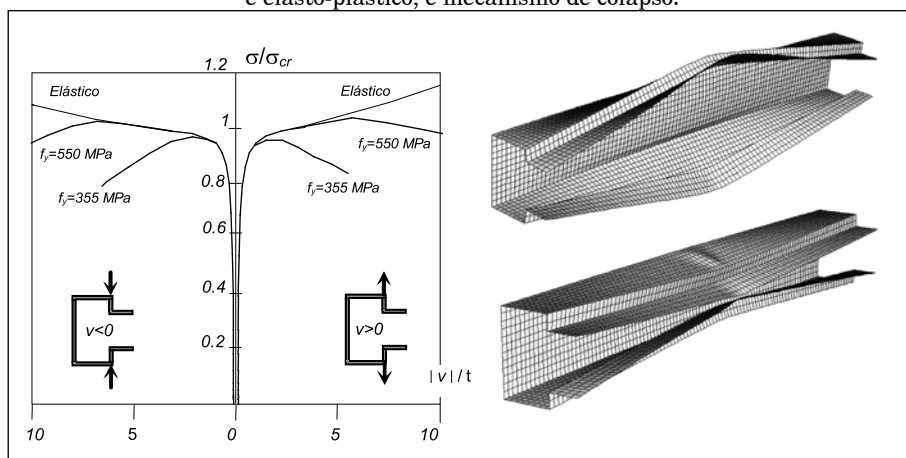


Figura 20: Colunas com secção em “Rack”: trajectórias de pós-encurvadura distorcional, em regime elástico e elasto-plástico, e mecanismos de colapso.

4.1 Interacção entre modos locais e distorcionais

Finalmente, as Figuras 21 e 22 mostram as partes superiores ($P/P_{cr} > 0.8$) das trajetórias de pós-encurvadura, em regime elástico e elasto-plástico, das colunas com secção em C abordadas na subsecção 3.3 e cujo comportamento é fortemente afectado pela interacção entre um modo de instabilidade local com 3 semi-ondas e um modo distorcional com 1 semi-onda (Dinis et al. 2005a, 2005b). Todas as análises foram efectuadas com o programa ABAQUS e consideram-se colunas com (i) 14 imperfeições geométricas iniciais, associadas a valores de θ iguais a 0, 30, 45, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 315 e 330° (ver Fig. 16) e (ii) três valores da tensão de cedência, aos quais correspondem valores da relação f_y/σ_{cr} iguais a 2, 3.5 e 5.5 ($\sigma_{cr}=100.5$ MPa) – como é obvio, o comportamento elástico está associado a $f_y/\sigma_{cr}=\infty$. Por outro lado, as Figuras 23(a)-(b) fornecem informações sobre a evolução das deformações plásticas nas duas colunas definidas por $\theta=0^\circ + f_y/\sigma_{cr} \approx 3.5$ e $\theta=90^\circ + f_y/\sigma_{cr} \approx 3.5$. Em cada caso, apresentam-se quatro diagramas de deformações plásticas, respeitantes a diferentes configurações de equilíbrio situadas sobre a trajetória de pós-encurvadura (ver Fig. 23a) – as configurações deformadas relativas aos pontos 1 estão ampliadas 10 vezes, quando comparadas com as restantes (para as tornar visíveis). Por outro lado, os pontos de equilíbrio 4 correspondem a situações de colapso ou pós-colapso, o que significa que as respectivas configurações deformadas fornecem informação sobre os mecanismos de colapso das colunas.

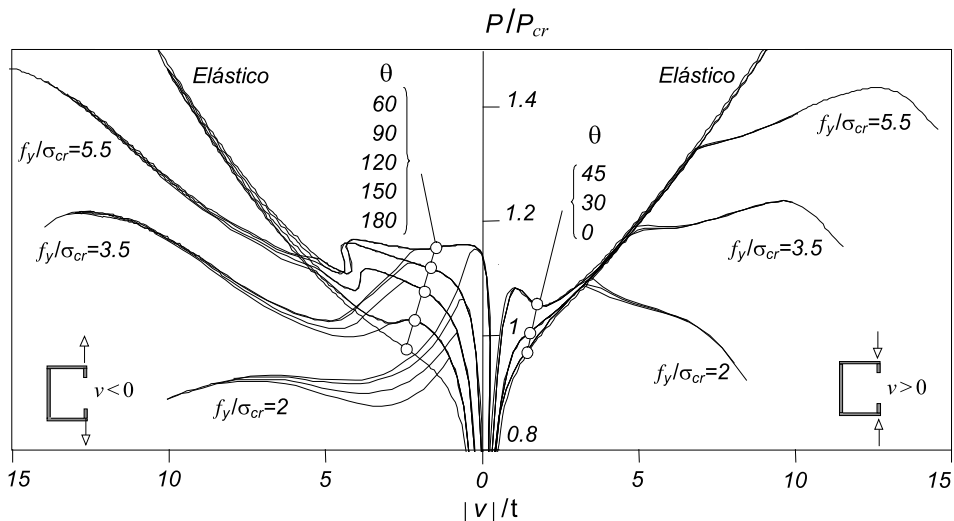


Figura 21 – Trajetórias de pós-encurvadura P/P_{cr} vs. v/t em regime elástico e elasto-plástico ($f_y/\sigma_{cr}=2, 3.5, 5.5$ e $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$).

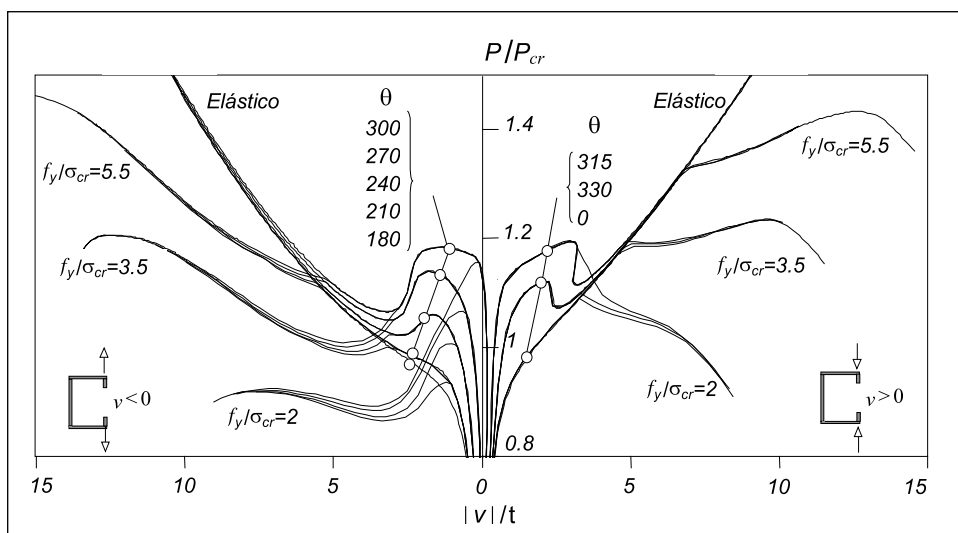


Figura 22 – Trajectórias de pós-encurvadura P/P_{cr} vs. v/t em regime elástico e elasto-plástico ($f_y/\sigma_{cr}=2, 3.5, 5.5$ e $180^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$).

A observação das trajectórias de pós-encurvadura, dos diagramas de deformações plásticas e dos mecanismos de colapso apresentados sugere os seguintes comentários:

- (i) As trajectórias de equilíbrio elasto-plásticas das várias colunas também convergem para as curvas relativas a $\theta=0^\circ$ ou $\theta=180^\circ$. Consoante o valor de f_y/σ_{cr} , esta convergência pode ocorrer antes ou depois de a coluna ter atingido a sua resistência última (ver Figs. 21 e 22).
- (ii) O início da cedência dá-se sempre no intervalo de carga aplicada $0.8 < P/P_{cr} < 1.3$ (como é óbvio, o valor exacto é fortemente dependente da relação f_y/σ_{cr} e da configuração das imperfeições iniciais) e define o ponto de separação entre as trajectórias de equilíbrio elásticas e elasto-plásticas. Para um dado valor de f_y/σ_{cr} , esta separação ocorre para cargas mais elevadas nas colunas com imperfeições locais puras ($\theta=90^\circ$ ou 270°) – as diferenças em relação às colunas com imperfeições distorcionais puras ($\theta=0^\circ$ ou 180°) podem atingir os 20% (e.g., $\theta=180^\circ$ vs. 270° , para $f_y/\sigma_{cr} \approx 2$).
- (iii) As Figuras 23b₁ e 23b₂ mostram que a cedência se inicia nas extremidades livres dos reforços, na secção de meio vão.
- (iv) Para $f_y/\sigma_{cr} \geq 3.5$, o colapso apenas ocorre após a completa plastificação das zonas centrais das colunas localizadas junto dos bordos longitudinais alma-banzo, conforme mostram as Figuras 23b₁ e 23b₂. No entanto, deve referir-se que o

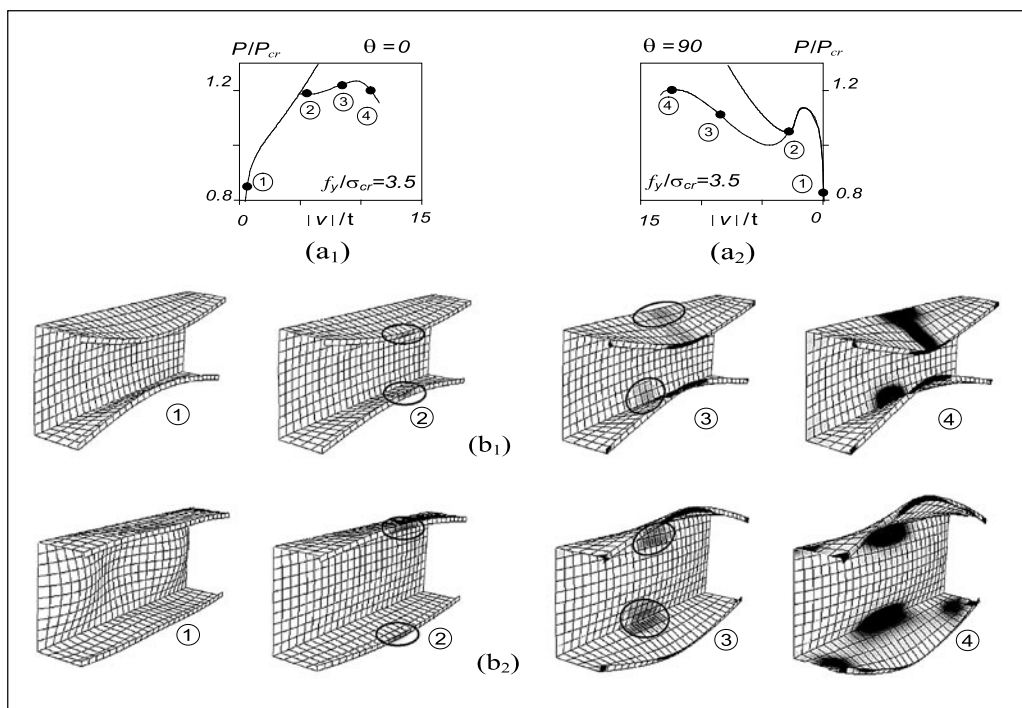


Figura 23 – (a) Configurações de equilíbrio nas curvas P/P_{cr} vs. v/t e (b) correspondentes diagramas de deformações plásticas e mecanismos de colapso para colunas definidas por (1) $\theta=0^\circ - f_y/\sigma_{cr}=3.5$ e (2) $\theta=90^\circ - f_y/\sigma_{cr}=3.5$.

mecanismo de colapso é diferente nas colunas cujos conjuntos banzo-reforço abrem ou fecham. No primeiro caso, ilustrado no lado direito da Figura 23b₂, formam-se “mecanismos de três rótulas plásticas” nos banzos. Já no segundo caso, ilustrado no lado direito da Figura 23b₁, as deformações plásticas ocorrem apenas na vizinhança próxima da secção de meio vão.

- (v) Para $f_y/\sigma_{cr} \geq 3.5$, o início da cedência não precipita o colapso da coluna, mesmo no caso de estar associado à ocorrência de um fenómeno de “snap-through” ($f_y/\sigma_{cr}=3.5$ e abertura dos conjuntos banzo-reforço) – a coluna exhibe ainda uma certa reserva de resistência pós-crítica, mais substancial no caso de se ter $f_y/\sigma_{cr} \approx 5.5$ e abertura dos conjuntos banzo-reforço (ver a Fig. 22). É ainda importante referir que o colapso apenas ocorre depois de as várias trajectórias de equilíbrio terem convergido para uma única “curva comum” – este facto significa que a configuração das imperfeições iniciais tem uma influência muito diminuta na resistência última e no mecanismo de colapso da coluna.
- (vi) Tal como sucedia em regime elástico, as imperfeições distorcionais puras são também as mais prejudiciais no caso das colunas elasto-plásticas, no sentido em que

são aquelas que estão associadas a menores capacidades resistentes. Esta característica reveste-se de grande importância para o desenvolvimento de metodologias de dimensionamento para colunas de aço enformadas a frio afectadas por fenómenos de interacção entre modos de instabilidade locais e distorcionais – a este propósito, merecem uma referência especial três trabalhos recentes dos autores deste artigo (Silvestre et al. 2005, 2006a, 2006b), nos quais se utilizam resultados de simulações numéricas para estudar o alargamento do domínio de aplicação do “método da resistência directa” a este tipo de colunas (e também a vigas).

5 Considerações finais e desenvolvimentos futuros

Apresentou-se neste artigo o “estado-da-arte” relativo ao desenvolvimento e aplicação de métodos numéricos para analisar o comportamento geométrica e fisicamente não linear (elasto-plástico) de elementos estruturais de aço enformados a frio, os quais são caracterizados por elevadas esbeltezas (tanto locais como globais). Em particular, abordou-se a utilização (i) do método dos elementos finitos (discretizações em elementos de casca), (ii) dos métodos das faixas finitas semi-analítico e com funções “ B_3 -Spline” e (iii) formulações da Teoria Generalizada de Vigas (GBT). Inicialmente, o artigo descreveu sucintamente (i) os tipos de análise não linear de estruturas, (ii) os quatro métodos numéricos de análise referidos atrás e (iii) a modelação das condições de apoio dos elementos estruturais mais correntes. Em seguida, o trabalho debruçou-se, de forma separada e sequencial, sobre a determinação dos seguintes comportamentos estruturais dos perfis de aço enformados a frio: (i) estabilidade em regime elástico, (ii) pós-encurvadura em regime elástico e (iii) pós-encurvadura e resistência última em regime elasto-plástico – nos dois últimos casos, dedicou-se uma atenção especial aos fenómenos de interacção entre modos de instabilidade locais e distorcionais. Ao longo do artigo, foram apresentados diversos conjuntos de resultados numéricos ilustrativos, relativos ao comportamento estrutural de colunas formadas por perfis com secção em C (sobretudo) e em “Rack” que bifurcam em modos de instabilidade locais e/ou distorcionais (maioritariamente) e também globais. Os vários aspectos discutidos incluíram (i) a escolha da discretização mais adequada, (ii) a incorporação de imperfeições geométricas iniciais e/ou tensões residuais, (iii) a eficiência computacional e a “clareza estrutural” das análises baseadas na GBT e (iv) a extrema utilidade das simulações numéricas para o desenvolvimento, calibração e validação de novas regras e metodologias de dimensionamento para elementos estruturais de aço enformado a frio.

Finalmente, uma última palavra para referir que está presentemente em curso uma intensa actividade de investigação no âmbito do desenvolvimento, implementação e aplicação de métodos numéricos destinados à análise de elementos estruturais constituídos por perfis de aço enformados a frio. A título meramente ilustrativo, indicam-se em seguida alguns tópicos/domínios onde são de esperar novos resultados num futuro mais ou menos próximo (obviamente, os autores estão conscientes que esta lista de

tópicos/domínios está longe de ser exaustiva e reflecte, inevitavelmente, as suas experiências e perspectivas pessoais):

- (i) Estabilidade e pós-encurvadura local e distorcional de elementos estruturais submetidos a diagramas de esforços variáveis (e.g., vigas sob a acção de carregamentos transversais).
- (ii) Estabilidade e pós-encurvadura local, distorcional e global de elementos estruturais em cujas paredes existem fiadas de orifícios e/ou perfurações.
- (iii) Interação entre modos locais e distorcionais em vigas e colunas-viga.
- (iv) Interação entre modos distorcionais e globais em colunas, vigas e colunas-viga.
- (v) Desenvolvimento e implementação computacional de formulações da GBT que permitam analisar o comportamento de pós-encurvadura elasto-plástico de perfis de aço enformados a frio e determinar, tão rigorosamente quanto possível, as respectivas resistências últimas.
- (vi) Utilização dos resultados de simulações numéricas para alargar o domínio de aplicação do “método da resistência directa” a outro tipo de elementos estruturais (e.g., colunas-viga), a um maior número de secções transversais (e.g., secções com reforços intermédios) e a comportamento estruturais mais complexos (e.g., elementos estruturais condicionados por fenómenos de interação entre modos locais e distorcionais).

Referências

- Bakker, M.C. and Peköz, T. (2003). The finite element method for thin-walled members – basic principles. *Thin-Walled Structures*, 41(2-3), 179-189.
- Bathe, K.J. (1998). *Finite Element Procedures in Engineering*. Prentice-Hall, Englewood-Cliffs.
- Bathe, K.J./ADINA R&D Inc. (2003). *ADINA System*.
- Batista, E.M.; Pérez, S.; Camotim, D. and Dinis, P.B. (2004). Experimental analysis of cold-formed beam-columns under distortional buckling. *Proceedings of Fourth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures* (CIMS'04 – Roma, 27-29/9), 439-451.
- Batista, E.M.; Dinis, P.B. and Camotim, D. (2006). Estabilidade, pós-flambagem e resistência última distorcional de vigas-coluna de aço formadas a frio com seção rack. *Livro de Resumos das XXXII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural* (Campinas, 22-26/5), 135-136. (artigo completo nos Anais em CD-ROM).
- Camotim, D. and Silvestre, N. (2004). GBT distortional post-buckling analysis of cold-formed steel lipped channel columns and beams. *Program and Book of Abstracts of 17th ASCE Engineering Mechanics Conference* (EM2004 – Newark, 13-16/6), 38-39. (artigo completo incluído nas Actas em CD-ROM)
- Camotim, D.; Silvestre, N.; Gonçalves, R. and Dinis, P.B. (2004). GBT analysis of thin-walled members: new formulations and applications. *Thin-Walled Structures: Recent Advances and Future Trends in Thin-Walled Structures Technology* (International Workshop – Loughborough, 25/6), J. Loughlan (ed.), Canopus Publishing Ltd., Bath, 137-168.
- Camotim, D.; Silvestre, N.; Gonçalves, R. and Dinis, P.B. (2006). GBT-based structural analysis of thin-walled members: overview, recent progress and future developments. *Advances in Engineering Structures, Mechanics and Construction* (SMCD 2006 – Waterloo, 14-17/5), M. Pandey, W.-C. Xie, L. Chu (eds.), Springer, 187-204.
- Cheung, Y.K. (1976). *Finite Strip Method in Structural Analysis*. Pergamon Press, Oxford.
- Cheung, M.S.; Li, W. and Chidiac, S.E. (1996). *Finite Strip Analysis of Bridges*. E & FN Spon, London.
- Crisfield, M.A. (1991). *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures – Essentials* (vol. 1). John Wiley & Sons, Chichester.
- Crisfield, M.A. (1997). *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures – Advanced Topics* (vol. 2). John Wiley & Sons, Chichester.
- Davies, J.M. (1998). Generalised beam theory (GBT) for coupled instability problems. *Coupled Instability in Metal Structures: Theoretical and Design Aspects* (CISM Course n° 379), J. Rondal (ed.), Springer-Verlag, Vienna, 151-223.
- Davies, J.M. (2000). Recent research advances in cold-formed steel structures. *Journal of Constructional Steel Research*, 55(1-3), 267-288.
- Davies, J.M. and Leach, P. (1994). First-order generalised beam theory. *Journal of Constructional Steel Research*, 31(2-3), 187-220.
- Davies, J.M.; Leach, P. and Heinz, D. (1994). Second-order generalised beam theory. *Journal of Constructional Steel Research*, 31(2-3), 221-241.
- De Boor, C. (1978). *A Practical Guide to Splines*, Applied Mathematical Science (vol. 27). Springer-Verlag, Berlin.
- Dinis, P.B. and Camotim, D. (2003). Estabilidade de perfis de aço enformados a frio: modelação por

elementos finitos e estudo da influência das condições de apoio. *Actas do VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional* (Évora, 14-16/4), J.I. Barbosa (ed.), 365-378.

Dinis, P.B. and Camotim, D. (2004a). Local-plate and distortional post-buckling behaviour of cold-formed steel columns: elastic and elastic-plastic FEM analysis. *Proceedings of Structural Stability Research Council (SSRC) Annual Stability Conference* (Long Beach, 24-27/3), 475-498.

Dinis, P.B. and Camotim, D. (2004b). FEM elastic and elastic-plastic analysis of the local-plate/distortional mode interaction in cold-formed steel columns. *Proceedings of Fourth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures* (CIMS'04 – Rome, 27-29/9), 131-142.

Dinis, P.B.; Silvestre, N. and Camotim, D. (2005a). Analysis of the local-plate/distortional mode interaction in cold-formed steel lipped channel columns. *Proceedings of Tenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing* (Rome, 30/8 a 2/9), B. Topping (ed.), Civil-Comp Press, 371-372. (artigo completo nas Actas em CD-ROM – paper 152)

Dinis, P.B.; Camotim, D. and Silvestre, N. (2005b). FEM-based analysis of the local-plate/distortional mode interaction in cold-formed steel lipped channel columns, *submetido para publicação*.

Dubina, D. and Ungareanu, V. (2002). Effect of imperfections on numerical simulation of instability behaviour of cold-Formed steel members. *Thin-Walled Structures*, 40(3), 239-262.

Dubina, D.; Ungareanu, V. and Rondal, J. (2004). Numerical modeling and codification of imperfections for cold-formed steel member analysis. *Proceedings of Second International Conference on Steel & Composite Structures* (Icscs'04 – Seoul, 2-4/9), C.K. Choi, H.W. Lee, H.G. Kwak (eds.), 148. (artigo completo nas Actas em CD-ROM)

Ellobody, E. and Young, B. (2005). Behavior of cold-formed steel plain angle columns. *Journal of Structural Engineering* (ASCE), 131(3), 469-478.

Gonçalves, R. and Camotim, D. (2004). GBT local and global buckling analysis of aluminium and stainless steel columns. *Computers & Structures*, 82(17-19), 1473-1484.

Gonçalves, R. and Camotim, D. (2005). Thin-walled member plastic bifurcation analysis using generalised beam theory. *Computers & Structures*, aceite para publicação.

Graves-Smith, T.R. and Sridharan, S. (1978). A finite strip method for the post-locally buckled analyses of steel plates. *International Journal of Mechanical Science*, 20(12), 833-842.

Guo, Y.L. and Lindner, J. (1993). Analysis of elastic-plastic interaction buckling of stiffened panels by spline finite strip method, *Computers & Structures*, 46(3), 529-536.

Hancock, G.J. (1981). Non-linear analysis of thin-sections in compression. *Journal of Structural Division* (ASCE), 107(3), 455-471.

Hancock, G.J. (1985). Non-linear analysis of thin-walled I-sections in bending. *Aspects of the Analysis of Plate Structures*, D. Dawe, R. Horsington, A. Kamketar e G. Little (eds.), Oxford University Press, Oxford, 251-268.

Hancock, G.J. (1998). Finite strip buckling and nonlinear analysis and distortional buckling analysis of thin-walled structural members. *Coupled Instability in Metal Structures: Theoretical and Design Aspects* (CISM Course n°379), J. Rondal (ed.), Springer-Verlag, Vienna, 225-289.

Hancock, G.J.; Davids, A.J.; Key, P.W.; Lau, S.C. and Rasmussen, K.J. (1990). Recent developments in the buckling and nonlinear analysis of thin-walled structural members, *Thin-Walled Structures*, 9(1-4), 309-338.

Hasham, A. and Rasmussen, K.J. (2001). Nonlinear analysis of locally buckled I-section steel beam-columns. *Thin-Walled Structures - Advances and Developments* (ICTWS'2001 – Cracow, 5-

8/6), J. Zaras, K. Kowal-Michalska, J. Rhodes (eds.), Elsevier, 329-337.

HKS – Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc. (2002). *ABAQUS Standard* (Version 6.3).

Joó, A. and Dunai, L. (2002). Numerical studies on the ultimate behaviour of steel cold-formed pur-lins. *Proceedings of The Sixth International Conference on Computational Structures Technology* (Prague, 4-6/9), B. Topping, Z. Bittnar (eds.), Civil-Comp Press, p. 247-248. (artigo completo nas Actas em CD-ROM – paper 103)

Key, P.W. and Hancock, G.J. (1993). A finite strip method for the elastic-plastic large displacement analysis of thin-walled and cold-formed sections. *Thin-Walled Structures*, 16(1-4), 3-29.

Kotelko, M. (2004). Load-capacity estimation and collapse analysis of thin-walled beams and columns – recent advances. *Thin-Walled Structures*, 42(2), 153-175.

Kwon, Y.B. and Hancock, G.J. (1991). A nonlinear elastic spline finite strip analysis for thin-walled sections. *Thin-Walled Structures*, 12(4), 295-319.

Kwon, Y.B. and Hancock, G.J. (1992). Strength tests for cold-formed channel sections undergoing local and distortional buckling. *Journal of Structural Engineering* (ASCE), 117(2), 1786-1803.

Landolfo, R.; Portioli, F. and Di Lorenzo, G. (2005). Finite element modelling procedures for innovative built-up cold-formed beams. *Proceedings of 4th European Conference on Steel and Composite Structures* (EUROSTEEL 2005 – Maastricht, 8-10/6), Maastricht, 77-84.

Lau, S.C. and Hancock, G.J. (1986). Buckling of thin flat-walled structures by a spline finite strip method. *Thin-Walled Structures*, 4(4), 269-294.

Leach, P. (1989). *The Generalised Beam Theory with Finite Difference Applications*. Ph.D. Thesis, Civil Engineering Department, University of Salford.

Magnusson, A. (2000). Treatment of bifurcation points with asymptotic expansion. *Computers & Structures*, 77(5), 475-484.

Papangelis, J.P. and Hancock, G.J. (1995). Computer analysis of thin-walled structural members, *Computers & Structures*, 56(1), 157-176.

Papangelis, J.P. and Hancock, G.J. (1998). *THIN-WALL* (version 2.0), Center for Advanced Structural Analysis, School of Civil and Mining Engineering, University of Sydney, Australia.

Plank, R.J. and Wittrick, W.H. (1974). Buckling under combined loading of thin, flat-walled structures by a complex finite strip method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8(2), 323-339.

Prola, L.C. and Camotim, D. (2000). Pós-encurvadura de placas e secções de parede fina: utilização do método das faixas finitas com 'B_s-splines'. *Actas do VI Congresso Nacional de Mecânica Aplicada e Computacional* (VI ENMAC – Aveiro, 17-19/4), 993-1002.

Prola, L.C. and Camotim, D. (2001). Post-buckling spline finite strip analysis of thin-walled structural members. *Proceedings of 8th International Conference on Enhancement and Promotion of Computational Methods in Engineering* (EPMESC'VIII – Shanghai, 25-28/7), 366-367. (artigo completo nas Actas em CD-ROM)

Prola, L.C. and Camotim, D. (2002). On the distortional post-buckling behavior of cold-formed lipped channel steel columns. *Proceedings of Structural Stability Research Council (SSRC) Annual Stability Conference* (Seattle, 24-27/4), 571-590.

Rasmussen, K.J. (1996). Numerical simulation and computational models in coupled instabilities. *Coupled Instabilities in Metal Structures* (CIMS'96 – Liège, 5-7/9), J. Rondal, D. Dubina, V. Gioncu

(eds.), Imperial College Press, London, 45-60.

Rasmussen, K.J. (2000). Experimental techniques in the testing of thin-walled structural members. *Coupled Instabilities in Metal Structures* (CIMS'2000 – Lisboa, 21-23/9), D. Camotim, D. Dubina, J. Rondal (eds.), Imperial College Press, 225-239.

Rendek, S. and Baláz, I. (2004). Distortion of thin-walled beams. *Thin-Walled Structures*, 42(2), 255-277.

Sarawit, A.; Kim, Y.; Bakker, M.C. and Peköz, T. (2003). The Finite element method for thin-walled members – Applications. *Thin-Walled Structures*, 41(2-3), 191-206.

SAS – Swanson Analysis Systems Inc. (2004). *ANSYS Reference Manual* (Version 8.1).

Schafer, B. (2003a). *CUFISM* (version 2.6), www.ce.jhu.edu/bschafer/cufism.

Schafer, B. (2003b). Cold-formed steel design by the direct strength method: bye-bye effective width. *Proceedings of Structural Stability Research Council (SSRC) Annual Stability Conference* (Baltimore, 2-5/4), 357-377.

Schafer, B. (2003c). Advances in the direct strength design of thin-walled members. *Advances in Structures* (ASSCCA'03 – Sydney, 23-25/6), G. Hancock, M. Bradford, T. Wilkinson, B. Uy, K. Rasmussen (eds.), Balkema, Lisse, 503-509.

Schafer, B. and Peköz, T. (1998). Computational modeling of cold-formed steel: characterizing geometric imperfections and residual stresses. *Journal of Constructional Steel Research*, 47(3), 193-210.

Schardt, R. (1966). Eine Erweiterung der Technische Biegetheorie zur Berechnung Prismatischer Faltwerke. *Stahlbau*, 35, 161-171. (alemão)

Schardt, R. (1983). The generalized beam theory. *Instability and Plastic Collapse of Steel Structures* (Proceedings of the M.R. Horne Conference – University of Manchester), Granada, London, 469-475.

Schardt, R. (1989). *Verallgemeinerte Technishe Biegetheorie (VTB)*. Springer-Verlag, Berlin. (alemão)

Schardt, R. (1994). Generalized beam theory – an adequate method for coupled stability problems. *Thin-Walled Structures*, 19(2-4), 161-180.

Silvestre, N. (2005). *Teoria Generalizada de Vigas: Formulações, Implementação Numérica e Aplicações*. Tese de Doutoramento, Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura, IST/UTL.

Silvestre, N. and Camotim D. (2002a). First-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials. *Thin-Walled Structures*, 40(9), 755-789.

Silvestre, N. and Camotim, D. (2002b). Second-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials. *Thin-Walled Structures*, 40(9), 791-820.

Silvestre, N. and Camotim, D. (2003a). Non-linear generalised beam theory for cold-formed steel members. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 3(4), 461-490.

Silvestre, N. and Camotim, D. (2003b). GBT stability analysis of pultruded FRP lipped channel members. *Computers & Structures*, 81(18-19), 1889-1904.

Silvestre, N. and Camotim, D. (2004). GBT-based analysis of the local-plate/distortional buckling mode interaction in lipped channel columns. *Proceedings of Fourth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures* (CIMS'04 – Rome, 27-29/9), 107-118.

Silvestre, N.; Camotim, D. and Dinis, P.B. (2005). On the use of the direct strength method to design lipped channel columns affected by local-plate/distortional mode interaction. *Proceedings of the 4th European Conference on Steel and Composite Structures* (EUROSTEEL 2005 – Maastricht, 8-10/6), 125-133.

- Silvestre, N.; Camotim, D. and Dinis, P.B. (2006a). DSM design against local-plate/distortional interactive buckling. *Proceedings of STEEL: A New and Traditional Material for Building* (ICMS 2006 – Poiana Brasov, 20-22/9). (no prelo)
- Silvestre, N.; Dinis, P.B. and Camotim, D. (2006b). Direct strength method for lipped channel columns and beams affected by local-plate/distortional interaction”. *Proceedings of 18th International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures* (Orlando, 26-27/10). (no prelo)
- Simão, P. and Silva, L.S. (2004). A unified energy formulation for the stability analysis of open and closed thin-walled members in the framework of the generalized beam theory. *Thin-Walled Structures*, 42(10), 1495-1517.
- Sridharan, S. and Graves-Smith, T.R. (1981). Post-buckling analyses with finite strips. *Journal of Engineering Mechanics Division* (ASCE), 107(5), 869-888.
- Teh, L. and Clarke, M. (1999). Tracing secondary equilibrium paths of elastic framed structures. *Journal of Engineering Mechanics* (ASCE), 125(12), 1358-1364.
- Vlasov, B.Z. (1959). *Thin-Walled Elastic Bars*. Fizmatgiz, Moscow. (em russo – tradução em língua inglesa: Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1961).
- Young, B. (2004). Design of channel columns with inclined edge stiffeners. *Journal of Constructional Steel Research*, 60(2), 183-197.
- Young, B. and Ellobody, E. (2005). Finite element analysis of cold-formed steel lipped angle compression members. *Advances in Steel Structures* (ICASS'05 – Shanghai, 13-15/6), Z.Y. Shan, G.Q. Li, S.L. Chan (eds.), Elsevier, p. 469-478.
- Young, B. and Rasmussen, K.J. (1999). Shift of effective centroid in channel columns. *Journal of Structural Engineering* (ASCE), 125(5), 524-531.
- Young, B. and Yan, J. (2002). Finite element analysis and design of fixed-ended plain channel columns. *Finite Elements in Analysis and Design*, 38(6), 549-566.
- Zienkiewicz, O.C. and Taylor R.L. (2000). *The Finite Element Method* (5th edition). Butterworth-Heinemann, Oxford.
- WMS – Waterloo Maple Software (2001). *MAPLE V* (version 7). University of Waterloo, Canada.

Numerical analysis of cold-formed steel members: recent developments and future perspectives

Abstract

The objective of this work is to present and discuss the most recent developments concerning the formulation and application of numerical methods and techniques intended to analyse the geometrically and physically non-linear structural behaviour of cold-formed steel members (columns, beams and beam-columns), which are typically built from thin-walled profiles with very slender cross-sections. In particular, one considers (i) the finite element method (adopting shell elements to discretise the members), (ii) the semi-analytical and “B₃-Spline” finite strip methods and (iii) numerical implementations of recently developed Generalised Beam Theory (GBT) formulations. After briefly describing the types of structural analysis dealt with, one (i) discusses issues involving the modelling the member end support conditions and (ii) addresses aspects related with the performance of (ii₁) elastic buckling (bifurcation) and (ii₂) elastic or elastic-plastic post-buckling analyses. These last numerical analyses (i) concern members buckling in local, distortional and global (flexural or flexura-torsional) modes, (ii) include the presence of inevitable initial geometrical imperfections and residual stresses and (iii) make it possible to account for the effects stemming from the occurrence of buckling mode interaction phenomena. The paper also includes (i) a few illustrative numerical results concerning lipped channel (mostly) and rack-section columns, and (ii) some comments on (ii₁) the computational efficiency of the GBT-based approach and (ii₂) the usefulness of numerical simulations to develop and/or calibrate efficient design methods for cold-formed steel members – special attention is paid to the “direct strength method”, already incorporated in the most recent North American and Australian-New Zealander design specifications. Finally, the paper concludes with a brief mention to a few problems currently under investigation, which provide an overall perspective of the (near) future developments concerning the application of numerical methods to the analysis and design of cold-formed steel members.

Key words: Cold-formed steel members, Numerical analysis, Finite strip method, Shell finite element method, Generalised Beam Theory (GBT), GBT-based beam finite elements, Direct strength method.

1 Introduction

After a few remarks concerning (i) the most relevant features of the linear and non-linear structural behaviour of cold-formed steel members, (ii) a brief historical sketch on the use of numerical analysis in structural engineering and (iii) the description of the objectives and content of this state-of-the-art report, the paper introductory section addresses three specific issues: (i) the types of structural analysis, (ii) the methods of numerical analysis and (iii) the member end support conditions – they are presented in separate subsections, as outlined next.

1.1 Types of structural analysis

The geometrically non-linear behaviour of cold-formed steel members is commonly assessed by means of the one of the following two types of structural analysis (see Fig. 2):

- (i) *Buckling Analysis*. The simplest geometrically non-linear analysis, also termed “linear stability” or “bifurcation”. The material behaviour is generally deemed elastic and this analysis applies to geometrically perfect members and requires solving an eigenvalue problem – the eigenvalues and eigenfunctions/eigenvectors are the buckling stresses and modes. The lowest buckling stress and associated buckling mode are labelled critical.
- (ii) *Post-Buckling Analysis*. A much more complex analysis, also termed “non-linear”. The material behaviour may be deemed either elastic or elastic-plastic and this analysis applies to “real members” (members with initial imperfections) and involves solving a system of non-linear equations to determine non-linear (post-buckling) equilibrium paths – curves relating the applied loading with a with suitably chosen displacement – and the strain and/or stress evolution along those paths. The member collapse takes place at a limit point, corresponding to its ultimate strength and failure mode. The post-buckling analysis of members with coincident (or nearly coincident) buckling modes is termed “mode interaction” – still a major challenge for the cold-formed steel research community.

1.2 Methods of numerical analysis

All the methods of numerical analysis addressed involve the discretisation of the member, making it a system with a finite number of degrees of freedom. Depending on (i) the geometrically non-linear behaviour sought and (ii) the member support and/or loading

conditions, one may use one or more of the following four methods of numerical analysis:

- (i) *Finite Element Method* (shell finite elements). The member mid-surface is divided into a fairly large number of small rectangles, corresponding to the mid-planes of geometrically non-linear shell elements (see Fig. 3). Inside each element, the displacement field is approximated by a linear combination of “shape functions” (often polynomials) whose coefficients are nodal displacements and rotations – they include the discretised member degrees of freedom, obtained by imposing the boundary and compatibility conditions.
- (ii) *Finite Strip Method* (semi-analytical). A variant of the shell finite element method that (ii₁) takes advantage of the prismatic nature of most thin-walled members and (ii₂) makes it possible to overcome computational effort problems. The member mid-surface is now divided into full length “long and narrow rectangles”, corresponding to the mid-planes of geometrically non-linear finite strips (see Fig. 3). The discretisation takes place only along the cross-section mid-line: inside each strip, the displacement transversal variation is approximated by polynomials, ensuring compatibility between adjacent strips and whose coefficients stand for the nodal (ii₁) membrane axial and transversal displacements and (ii₂) flexural displacements and rotations. The finite strip formulation must also include analytical functions describing the displacement longitudinal variation and satisfying the boundary conditions.
- (iii) *Spline Finite Strip Method*. A “compromise” between the finite strip and finite element method: involves longitudinal discretisation, by means of “B₃-Spline” functions, but retains a fairly high computational efficiency. The formulation of geometrically non-linear spline strips was prompted by the inability of the semi-analytical finite strips (iii₁) to handle members acted by in-span loads or displaying other than “simply supported” end sections and (iii₂) to ensure compatibility, along the member longitudinal edges.
- (iv) *Generalised Beam Theory* (GBT). Very efficient and elegant approach to solve prismatic member structural problems: (iv₁) presented in a format resembling “classical” beam theories, but (iv₂) incorporating genuine folded-plate theory that makes it possible to account for local deformations. Its “trademark” is a unique two-stage cross-section discretisation, leading to the identification of cross-section deformation modes and evaluation of the associated modal properties – this feature renders the application of GBT very versatile and computationally efficient. GBT bears considerable resemblance with the finite strip method, in the sense that both (iv₁) share the same field of application, (iv₂) employ similar displacement representations and (iv₃) treat the cross-section and longitudinal discretisations differently. However, there exist fundamental differences between them, concerning the nature of the cross-section discretisation (see Figs. 4 and 5).

1.3 Member end support conditions

Meaningful comparisons between (i) numerical results yielded by different methods or (ii) numerical and experimental results are only viable if the member end support conditions are adequately modelled. This requires the proper definition of the support conditions adopted in numerical simulations and/or (ii) experimental investigations concerning cold-formed steel members. One must make a clear distinction between global and local conditions: while the former involve the end section rigid-body motions, the latter concern the displacements of the wall transverse edges, w.r.t. the end section location after its rigid-body motion – the local conditions deal with end section warping and in-plane deformation.

One lists and describes various end support conditions that are more or less frequently (i) modelled in numerical analyses and/or (ii) physically executed in experimental investigations. Besides the conceptually obvious free and fixed end sections, the list includes also (i) several distinct modellings of “simply supported” end sections and (ii) support conditions involving different local and global displacement/rotation restraints – in particular, one (i) identifies the “simply supported” conditions automatically included in most finite strip and GBT analyses and (ii) highlights the fact that they often differ from the ones modelled with shell finite elements.

2 Buckling analysis

This section includes the presentation and discussion of results concerning the local and global elastic buckling (bifurcation) behaviour of (i) simply supported lipped channel columns (see Fig. 7) and (ii) rack-section columns with different end support conditions (see Fig.8). While the former were yielded by GBT-based analyses and include the corresponding modal participation diagrams, the latter were obtained from ABAQUS shell finite element analyses and make it possible to assess how the end section displacement/rotation restraints influence the member buckling response.

3 Elastic post-buckling analysis

3.1 GBT formulation

Besides the obvious need to consider fully non-linear kinematical relations, the development and beam finite element implementation of a GBT-based formulation to analyse the post-buckling behaviour of initially imperfect thin-walled members requires a special cross-section modal discretisation, which must go well beyond the one carried out in the context of buckling analysis. This is due to the fact that it involves

two additional deformation mode sets, not complying with Vlasov's null membrane shear strain assumption – these novel deformation modes are designated as (warping) shear modes and transverse extension modes. This subsection provides a characterisation of the above deformation modes, which is followed by a brief description of the set of options and procedures involved in the performance of a GBT-based (elastic) post-buckling analysis (see Fig. 11).

3.2 Numerical results

This subsection begins with a qualitative characterisation of the local-plate, distortional and global (flexural-torsional) elastic post-buckling behaviours of lipped channel columns (see Fig. 12). Then, one presents and discusses very thoroughly results (i) concerning the distortional post-buckling behaviours of simply supported and (ii) obtained by means of GBT-based analyses (see Fig. 13) – particular attention is paid to the recently unveiled asymmetry w.r.t. the initial imperfection “sign” (outward or inward flange-lip motions). Finally, the reader is warned against the use of “reduced integration” shell elements in distortional buckling and post-buckling analysis – in order to justify this “warning” and enable the assessment of the errors involved, one (i) presents ABAQUS numerical results obtained with identical S4 and S4R shell element meshes and (ii) compares them with finite strip values (see Fig. 14).

3.3 Local/distortional buckling mode interaction

This subsection deals with the elastic post-buckling behaviour of simply supported lipped channel columns affected by local-plate/distortional mode interaction phenomena – they have identical local-plate and distortional critical stresses, corresponding to buckling modes with three and one half-waves, respectively (see Fig. 15). All the columns analysed are identical and contain initial imperfections sharing the same overall amplitude and exhibiting different shapes, associated with several linear combinations of the two normalised “competing” critical buckling modes (see Fig. 16).

The results presented and discussed (i) were obtained by means of ABAQUS (mostly) and GBT-based post-buckling analyses and (ii) consist of non-linear equilibrium paths (see Figs. 17 and 18). One important finding is related to the fact that the pure distortional imperfection shapes are the most detrimental ones, in the sense that they correspond to the lowest column strengths – this is bound to have far-reaching design implications, since it means that the column strength is governed by its sensitivity to pure distortional imperfections, regardless of whether local-plate/distortional interaction takes place or not.

4 Elastic-plastic post-buckling analysis

This section deals exclusively with ABAQUS shell finite element analyses. After briefly addressing the usefulness of numerical simulations to develop efficient design methods for cold-formed steel members, a topic closely related to the codification of the geometrical imperfections (mostly) and residual stresses to be included in the analyses, one presents and discusses numerical results concerning the elastic-plastic local-plate and distortional post-buckling behaviour of simply supported rack-section columns – these results consist basically of non-linear equilibrium paths and collapse mechanisms (see Figs. 19 and 20).

4.1 Local/distortional buckling mode interaction

This subsection concerns the extension, into the elastic-plastic range, of the local-plate/distortional interactive (elastic) post-buckling results presented in subsection 3.3 – three different yield stress values are considered, associated with yield-to-critical stress ratios ranging between 2.0 and 5.5. The results presented and discussed consist of (i) elastic-plastic post-buckling equilibrium paths and ultimate strength values (see Fig. 22) and also (ii) the plastic strain evolution along those paths (see Fig. 23).

One relevant finding concerns the fact that, depending on the yield-to-critical stress ratio, yielding may or may not precipitate the column collapse. Moreover, the pure distortional imperfection shapes are found to be again the most detrimental ones, as they lead to lower column ultimate strengths – this result has already (very recently) been used in the context of the development and calibration of a “direct strength method” curve aimed at the design of lipped channel columns affected by local-plate/distortional buckling mode interaction.

5 Concluding remarks and future developments

Besides going quickly over the content of the whole paper, this section includes a brief reference to a number of problems that are currently under investigation, concerning the development and application of numerical methods to the analysis and design of cold-formed steel members – although they inevitably reflect the personal experiences and expectations of the authors, it seems fair to assume that they also provide an overall perspective of the (near) future developments in this area.