

Formulação de modelos de dano para meios anisótropos e bimodulares

José Julio de Cerqueira Pituba¹

Trabalho recebido em 05/10/2005 e aprovado para publicação em 26/09/2006.

Resumo

Este trabalho trata da formulação de leis constitutivas para meios elásticos, considerados inicialmente íntegros e isotrópicos ou anisótropos, que, uma vez danificados, podem apresentar diferentes comportamentos em tração e em compressão e certo grau de anisotropia. Numa primeira etapa é revista uma formulação para meios elásticos anisótropos e bimodulares, sendo a mesma, então, estendida para incorporar os processos de danificação. Em cada caso, tensores anisótropos de quarta ordem são requeridos pela formulação, dependendo do tipo de anisotropia assumida. Como exemplo de modelo constitutivo derivado da formulação geral citada, apresenta-se a proposta de um modelo restrito ao caso de isotropia transversal, bimodularidade e deformações plásticas induzidas pela danificação, sendo ilustradas aplicações iniciais em vigas de concreto armado, confrontando-se respostas numéricas do modelo com respostas experimentais contidas na literatura. De um modo geral, a formulação descrita neste trabalho tem um caráter amplo, abrindo um grande leque para o desenvolvimento de modelos que visem simular o comportamento de meios onde a danificação é o principal fenômeno envolvido.

Palavras-chave: mecânica do dano, modelo constitutivo, anisotropia, materiais bimodulares.

¹ Prof. Dr. da Faculdade de Ciências e Tecnologia (FCT) da Universidade Estadual Paulista (UNESP). Rua Roberto Simonsen 305, CEP: 19060-900, Presidente Prudente, SP, Brasil. Tel: +55 , Fax: +55 . E-mail: jjpituba@fct.unesp.br

1. Introdução

A Mecânica do dano é uma ferramenta para a simulação em meios contínuos equivalentes da deterioração de materiais devida exclusivamente a um processo de microfissuração. Um dado material pode ser simulado como um meio contínuo e a influência das alterações internas provocadas pelas microfissuras naquele material é considerada por meio de variáveis de dano escalares ou tensoriais que penalizam a rigidez inicial do meio equivalente. O dano implica uma redução de várias das componentes do tensor constitutivo de rigidez, podendo o material danificado manter-se isotrópico ou tornar-se anisótropo. Nos modelos isotrópicos a danificação não afeta o número de direções ou planos iniciais de simetria do material, isto é, se o meio é inicialmente isotrópico ou anisótropo com algum grau, essas características se preservam com a danificação. Entre os modelos dessa classe, podem ser citados: Mazars (1984), Comi (2000) e La Borderie (1991).

Por outro lado, os chamados modelos anisotrópicos têm a capacidade de introduzir alterações quanto ao número inicial de planos e direções de simetria do material. Dentro desse contexto, podem-se citar Pietruszczak e Mroz (2001), Dragon *et al.* (2000), Lemaitre *et al.* (2000) e Brünig (2004), sendo os dois primeiros trabalhos aplicados à modelagem de materiais frágeis, enquanto os outros são aplicados ao estudo da danificação dúctil.

Dentro do regime de pequenas deformações, a formulação de leis constitutivas para materiais com isotropia ou anisotropia elástica apresentando diferentes comportamentos em tração e em compressão, porém sem a consideração do dano, é apresentada por Curnier *et al.* (1995). A formulação que se propõe aqui é obtida através da introdução, no desenvolvimento de Curnier, de condições que permitam levar em conta a danificação, sendo descrita no item 3 deste trabalho.

Já no item 4, como exemplo de aplicação da formulação proposta aqui, apresenta-se uma proposta de modelo constitutivo para o concreto, segundo a qual o concreto pode ser simulado como um meio contínuo inicialmente isotrópico com anisotropia induzida pelo dano. A classe de anisotropia induzida, adotada no modelo, decorre do pressuposto de que localmente o concreto solicitado passa a apresentar uma distribuição de danificação com orientação bem definida. Essa suposição, aliás, está justificada na observação do comportamento do material em ensaios experimentais de Van Mier (1984). Em outras palavras, considera-se que a danificação orientada é responsável pela mudança de característica do material, passando de um meio inicialmente isotrópico para um meio com isotropia transversal. No âmbito dessa proposta, o modelo constitutivo para o concreto, em princípio, poderia incluir como hipótese a possibilidade de o material apresentar ortotropia induzida pelo dano. Contudo, o custo da formulação teórica e, principalmente, da identificação paramétrica poderia tornar sua utilização prática inviável. Uma outra simplificação adotada para esta versão inicial do modelo é que o carregamento seja sempre proporcional a um certo parâmetro, de modo a restringir a possibilidade de danificação a uma única direção, qualquer que seja o estado de tensão local.

Outro aspecto levado em conta pelo modelo é o caráter bimodular adquirido pelo concreto danificado. Isso é possível pela definição de dois tensores de dano, um para estados predominantes de tração e um outro para compressão, destacando-se o critério para a divisão dos estados.

No item 5, apresentam-se as aplicações iniciais do modelo gerado pela formulação proposta com o objetivo de comprovar sua potencialidade e avaliar estudos ulteriores no sentido de aperfeiçoar sua formulação e emprego. Finalmente, algumas conclusões são discutidas na seção 6.

2. Elasticidade linear de meios com anisotropia e resposta bimodular

Em hiperelasticidade, para o caso de elasticidade linear com anisotropia, as expressões do potencial quadrático $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ e a lei linear entre tensão ($\boldsymbol{\sigma}$) e deformação ($\boldsymbol{\varepsilon}$) dele derivada envolvem constantes ditas “volumétricas” λ_{ab} e de “cisalhamento” μ_a , que se reduzem àquelas de Lamè no caso de isotropia. As formas que incluem isotropia, isotropia transversal e ortotropia são dadas por:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\lambda_{ab}}{2} \text{tr}(\mathbf{A}_a \boldsymbol{\varepsilon}) \text{tr}(\mathbf{A}_b \boldsymbol{\varepsilon}) + \mu_a \text{tr}(\mathbf{A}_a \boldsymbol{\varepsilon}^2) \quad (a, b = 1, d) \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda_{ab} \text{tr}(\mathbf{A}_a \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{A}_b + \mu_a (\mathbf{A}_a \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{A}_a^T) \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = \lambda_{ab} [\mathbf{A}_a \otimes \mathbf{A}_b] + \mu_a [\mathbf{A}_a \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_a] \quad (3)$$

onde $d = 1$ para isotropia (envolvendo as duas constantes de Lamè usuais λ_0 e μ_0), $d = 2$ para isotropia transversal (5 constantes) e $d = 3$ para ortotropia (9 constantes). Os tensores $\mathbf{A}_a$ e $\mathbf{A}_b$ são: ($\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}$) para materiais isótropos, ($\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$) para materiais com isotropia transversal e ($\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}_3 = \mathbf{B}$) para materiais ortótropos. No caso de isotropia transversal, o tensor $\mathbf{I}$ é o tensor identidade de segunda ordem e o tensor $\mathbf{A}$ é formado pelo produto tensorial do vetor perpendicular ao plano de isotropia transversal por ele mesmo. No caso de ortotropia, existem três vetores linearmente independentes que definem os planos de ortotropia, sendo os tensores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ definidos por dois daqueles vetores e realizando-se os produtos tensoriais deles por eles mesmos; há também um tensor associado à terceira direção, formado pelos tensores $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ ($\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}$).

Por outro lado, considerando-se um caso unidimensional, a palavra “bimodular” refere-se a materiais cujas leis tensão-deformação unidimensionais são caracterizadas por diferentes módulos de elasticidade em tração e em compressão. A extensão de tais características para os casos bi e tridimensional é proposta no trabalho Curnier *et al.* (1995) e passa a ser descrita no que segue.

Para a modelagem de um material hiperelástico bimodular, a densidade de energia potencial elástica W deve ser uma vez diferenciável continuamente (em qualquer ponto), porém diferenciável duas vezes continuamente apenas por partes. A relação

tensão-deformação derivada de tal potencial tem continuidade (em qualquer ponto) e apresenta um tensor de elasticidade descontínuo em relação a uma hipersuperfície que contém a origem do espaço das deformações; nessas condições torna-se possível reproduzir uma resposta diferente em tração e em compressão.

Seja, então, o espaço das deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ dividido em subdomínios ditos de compressão $\boldsymbol{\varepsilon}_-$ e de tração $\boldsymbol{\varepsilon}_+$ por meio de uma hipersuperfície I caracterizada por uma função de valor escalar $g(\boldsymbol{\varepsilon})$. Sendo a hipersuperfície $g(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$, devendo conter a origem do espaço das deformações, segue-se que:

$$\mathbf{0} \in \dot{\mathcal{Y}} \Leftrightarrow g(\mathbf{0}) = 0 \quad (4)$$

e sua definição serve, então, como critério para que o espaço das deformações resulte separado em partes as quais corresponderão regimes predominantes de tração e compressão.

Um hiperplano, caracterizado por sua normal unitária $\mathbf{N}$ ($\|\mathbf{N}\| = 1$), proporciona a representação mais simples da hipersuperfície no espaço das deformações. Nesse caso são válidas:

$$\dot{\mathcal{Y}} := \{\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\varepsilon} \mid g(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0\} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_- := \{\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\varepsilon} \mid \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} < 0\}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_+ := \{\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\varepsilon} \mid \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} > 0\} \quad (6)$$

A resposta material pode então ser descrita de acordo com os regimes predominantes de compressão e de tração por duas funções de energia elástica $W_-(\boldsymbol{\varepsilon})$ e $W_+(\boldsymbol{\varepsilon})$, restritas aos subdomínios $\boldsymbol{\varepsilon}_-$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_+$ respectivamente, sendo que juntas compõem uma função de energia $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ definida sobre $\boldsymbol{\varepsilon}$. Por outro lado, a continuidade da função de energia elástica (e de seu primeiro gradiente) e a lei tensão-deformação, ao longo da interface, implicam

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = W_+(\boldsymbol{\varepsilon}) = W_-(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \mid g(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\sigma}_+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\sigma}_-(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \mid g(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \quad (8)$$

Já o tensor de rigidez elástica por hipótese apresenta-se contínuo ao longo da interface e descontínuo através dela, isto é, segundo a normal definida por ∇g . O salto do tensor é dado por:

$$[E(\boldsymbol{\varepsilon})] := E_+(\boldsymbol{\varepsilon}) - E_-(\boldsymbol{\varepsilon}) = s(\boldsymbol{\varepsilon}) \nabla g(\boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \nabla g(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \mid g(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \quad (9)$$

onde $s(\boldsymbol{\varepsilon})$ é uma função contínua de valor escalar que mede o valor do salto.

No caso do hiperplano, o caráter invariante de $g(\boldsymbol{\varepsilon})$ pode ser explicitado representando-o como uma combinação linear dos invariantes lineares de deformação, $I_a = (\text{tr } A_a \boldsymbol{\varepsilon})$, isto é: $g(\boldsymbol{\varepsilon}) = \gamma_a I_a$. Seu gradiente $\nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}} g(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{N}$, definindo a normal ao hiperplano, resulta uma combinação linear dos correspondentes tensores A_a . Para exemplificar, no caso mais geral passam a valer as relações:

$$g(\varepsilon) = \gamma_a \operatorname{tr}(\mathbf{A}_a \varepsilon) = \operatorname{tr}[(\gamma_a \mathbf{A}_a) \varepsilon] = \mathbf{N} : \varepsilon = 0, \quad (a = l, d), \quad (10)$$

$$\mathbf{N} = \nabla_\varepsilon g = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{I}_a} \nabla_\varepsilon \mathbf{I}_a = \gamma_a \mathbf{A}_a, \quad (11)$$

onde os coeficientes γ_a são tais que: $||\mathbf{N}|| = 1$

Finalmente, as expressões para a função de energia, para a lei tensão-deformação e para o tensor dos módulos elásticos são escritas, em analogia com Eq. (1), (2) e (3), nas seguintes formas:

$$W(g(\varepsilon), \varepsilon) = \frac{\lambda_{ab}(g(\varepsilon))}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{A}_a \varepsilon) \operatorname{tr}(\mathbf{A}_b \varepsilon) + \mu_a \operatorname{tr}(\mathbf{A}_a \varepsilon^2) \quad (a, b = l, d) \quad (12)$$

$$\sigma(g(\varepsilon), \varepsilon) = \lambda_{ab}(g(\varepsilon)) \operatorname{tr}(\mathbf{A}_a \varepsilon) \mathbf{A}_b + \mu_a (\mathbf{A}_a \varepsilon + \varepsilon \mathbf{A}_a^T) \quad (13)$$

$$\mathbf{E}(g(\varepsilon), \varepsilon) = \lambda_{ab}(g(\varepsilon)) [\mathbf{A}_a \otimes \mathbf{A}_b] + \mu_a [\mathbf{A}_a \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_a] \quad (14)$$

O caráter bimodular implica que as constantes λ_{ab} são funções de g , isto é:

$$\lambda_{ab}(g(\varepsilon)) = \lambda_{ba} := \begin{cases} \lambda_{ab}^- & \text{se } g(\varepsilon) < 0 \\ \lambda_{ab}^+ & \text{se } g(\varepsilon) > 0 \end{cases} \quad (15)$$

Vale ressaltar que os coeficientes μ_a devem ser iguais em compressão e em tração para que se verifique a condição de salto tangencial nulo no tensor constitutivo, Eq. (9).

3. Proposta de formulação para meios elásticos anisótropos com dano e resposta bimodular

Esta proposta de formulação visa estender os modelos de elasticidade linear em meios anisótropos bimodulares, de modo a se levar em conta a danificação nesses meios. Propõe-se que os coeficientes λ_{ab} e μ_a passem a ser funções de variáveis de danificação, bem como o próprio hiperplano separador das respostas em tração e em compressão. Contudo, vale ressaltar que as condições de salto tangencial nulo devem também ser obedecidas aqui. Com isso os coeficientes μ_a devem ser iguais em tração e em compressão.

Com a introdução de processos de danificação na formulação proposta por Cur-nier, a lei tensão-deformação passa a sofrer a influência das variáveis de dano. Como o critério para a identificação das respostas constitutivas de compressão ou de tração, hiperplano separador g , é função das componentes de deformação, este critério é então influenciado pelas variáveis de dano.

Outra observação pertinente é sobre a introdução de variáveis associadas ao dano, que podem ser interpretadas como taxas de liberação de energia durante o processo de evolução do dano. Tais variáveis podem ser empregadas na definição dos critérios que identificam o início e a evolução da danificação e que são necessários para a formulação de um modelo constitutivo.

A escolha das variáveis de dano e da classe de anisotropia consideradas num modelo depende do material que se deseja simular. Nesse sentido, é importante observar que a danificação influencia também a forma de variação dos tensores $[A_a \otimes A_b]$ e $[A_a \otimes I + I \otimes A_a]$, Eq. (14).

As expressões para a função de energia, para a relação tensão-deformação e para o tensor dos módulos elásticos de rigidez são escritas nas seguintes formas:

$$W(D_i, g(\epsilon), \epsilon) = \frac{\lambda_{ab}(D_i, g(\epsilon))}{2} \text{tr}(A_a \epsilon) \text{tr}(A_b \epsilon) + \mu_a(D_i) \text{tr}(A_a \epsilon^2) \quad (a, b = 1, d) \quad (16)$$

$$\sigma(D_i, g(\epsilon), \epsilon) = \lambda_{ab}(D_i, g(\epsilon)) \text{tr}(A_a \epsilon) A_b + \mu_a(D_i) (A_a \epsilon + \epsilon A_a^T) \quad (17)$$

$$E(D_i, g(\epsilon), \epsilon) = \lambda_{ab}(D_i, g(\epsilon)) [A_a \otimes A_b] + \mu_a(D_i) [A_a \otimes I + I \otimes A_a] \quad (18)$$

onde o subíndice i pode assumir valores de 1 até o número de variáveis escalares de dano que os modelos venham a considerar. Os tensores utilizados aqui se encontram descritos detalhadamente em Pituba (2003), inclusive em sua forma matricial para implementação computacional.

As variáveis associadas ao dano são obtidas da variação da função de energia, Eq. (16), em relação ao incremento dos processos de danificação. Portanto,

$$Y(D_i, g(\epsilon, D_i), \epsilon) = \frac{\partial W}{\partial D_i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_{ab}(D_i, g(\epsilon, D_i))}{\partial D_i} \text{tr}(A_a \epsilon) \text{tr}(A_b \epsilon) - \frac{\partial \mu_a(D_i)}{\partial D_i} \text{tr}(A_a \epsilon^2) \quad (19)$$

Já o caráter bimodular implica que os coeficientes λ_{ab} são funções de $g(\epsilon, D_i)$, isto é:

$$\lambda_{ab}(D_i, g(\epsilon, D_i)) = \lambda_{ba} := \begin{cases} \lambda_{ab}^-(D_i) & \text{se } g(\epsilon, D_i) < 0 \\ \lambda_{ab}^+(D_i) & \text{se } g(\epsilon, D_i) > 0 \end{cases} \quad (20)$$

Observa-se que a formulação proposta pode ser empregada tanto para materiais elásticos danificados possuindo anisotropia e caráter bimodular iniciais, como para materiais elásticos danificados com anisotropia e bimodularidade induzidas pelo dano. Neste último caso, a inserção das variáveis de dano na formulação é feita de modo criterioso para gerar um certo grau de anisotropia do material, assim como para induzir o surgimento do caráter bimodular. Um exemplo dessa possibilidade é abordado a seguir.

3.1. Caso particular de isotropia transversal induzida pela danificação

Neste item, o material comporta-se, inicialmente, como um meio isótropo com iguais rigidezes em tração e em compressão; com o surgimento e a evolução da danificação, o material passa a apresentar um comportamento bimodular com anisotropia.

Admitindo-se, pois, uma situação genérica em que o meio já apresente um certo nível de dano, que gerou um estado de isotropia transversal, passam a valer as seguintes relações:

$$W(D_i, g(\epsilon, D_i), \epsilon) = \frac{\lambda_{11}}{2} \text{tr}^2(\epsilon) + \mu_1 \text{tr}(\epsilon^2) - \frac{\lambda_{22}(D_i, g(\epsilon, D_i))}{2} \text{tr}^2(A\epsilon) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & - \lambda_{12}(D_i, g(\epsilon, D_i)) \text{tr}(\epsilon) \text{tr}(A\epsilon) - \mu_2(D_i) \text{tr}(A\epsilon^2) \\ \sigma(D_i, g(\epsilon, D_i), \epsilon) &= \lambda_{11} \text{tr}(\epsilon) \mathbf{I} + 2\mu_1 \epsilon - \lambda_{22}(D_i, g(\epsilon, D_i)) \text{tr}(A\epsilon) \mathbf{A} \\ & - \lambda_{12}(D_i, g(\epsilon, D_i)) [\text{tr}(\epsilon) \mathbf{A} + \text{tr}(A\epsilon) \mathbf{I}] - \mu_2(D_i) [A\epsilon + \epsilon A^T] \end{aligned} \quad (22)$$

$$E(D_i, g(\epsilon, D_i), \epsilon) = \mathbf{E}_0 - \lambda_{22}(D_i, g(\epsilon, D_i)) [A \otimes A] - \lambda_{12}(D_i, g(\epsilon, D_i)) [A \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes A] - \mu_2(D_i) [A \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes A] \quad (23)$$

$$\begin{aligned} Y(D_i, g(\epsilon, D_i), \epsilon) &= \nabla_D W = \frac{\partial W}{\partial D_i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_{22}(D_i, g(\epsilon, D_i))}{\partial D_i} \text{tr}^2(A\epsilon) \\ & - \frac{\partial \lambda_{12}(D_i, g(\epsilon, D_i))}{\partial D_i} \text{tr}(\epsilon) \text{tr}(A\epsilon) - \frac{\partial \mu_2(D_i)}{\partial D_i} \text{tr}(A\epsilon^2) \end{aligned} \quad (24)$$

sendo $\lambda_{11} = \lambda_0$ e $\mu_1 = \mu_0$ as constantes de Lamè e $\mathbf{E}_0$ o tensor de rigidez elástica isótropo.

O caráter bimodular é levado em conta pelas seguintes condições:

$$\lambda_{12}(D_i, g(\epsilon, D_i)) := \begin{cases} \lambda_{12}^-(D_i) & \text{se } g(\epsilon, D_i) < 0 \\ \lambda_{12}^+(D_i) & \text{se } g(\epsilon, D_i) > 0 \end{cases}; \lambda_{22}(D_i, g(\epsilon, D_i)) := \begin{cases} \lambda_{22}^-(D_i) & \text{se } g(\epsilon, D_i) < 0 \\ \lambda_{22}^+(D_i) & \text{se } g(\epsilon, D_i) > 0 \end{cases} \quad (25)$$

Observa-se ainda que para valores nulos das variáveis de dano todos os coeficientes dependentes delas se anulam e o material tem um comportamento de meio isótropo e unimodular.

4. Exemplo de formulação de um modelo constitutivo para o concreto

Um modelo constitutivo utilizado para simular o comportamento do concreto em Pituba (2003) é descrito aqui com base na formulação do item anterior, procurando ainda atender ao princípio de equivalência de energia estabelecido na Mecânica do Dano, (Lemaitre 1996). Portanto, seguindo o formalismo da seção 3.1, o modelo proposto exprime-se pela forma invariante abaixo:

$$W(\epsilon) = \rho \psi(\epsilon) := \begin{cases} W_- (\epsilon) & \text{se } g(\epsilon, \mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) < 0, \\ W_+ (\epsilon) & \text{se } g(\epsilon, \mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) > 0, \end{cases} \text{ e } W_- = W_+ = W_0 \text{ se } \mathbf{D}_T = \mathbf{D}_C = \mathbf{0} \quad (26)$$

$$W_+ = \rho \psi_+(\epsilon) = \frac{\lambda_{11}}{2} \text{tr}^2(\epsilon) + \mu_1 \text{tr}(\epsilon^2) - \frac{\lambda_{22}(D_1, D_4, D_5)}{2} \text{tr}^2(A\epsilon) - \lambda_{12}^+(D_1) \text{tr}(\epsilon) \text{tr}(A\epsilon) - \mu_2(D_4, D_5) \text{tr}(A\epsilon^2) \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
W_0 = \rho \psi_-(\epsilon) = & \frac{\lambda_{11}}{2} \text{tr}^2(\epsilon) + \mu_1 \text{tr}(\epsilon^2) - \frac{\lambda_{22}^-(D_2, D_3, D_4, D_5)}{2} \text{tr}^2(A\epsilon) - \lambda_{12}^-(D_2, D_3) \text{tr}(\epsilon) \\
& \text{tr}(A\epsilon) - \frac{\lambda_{11}^-(D_3)}{2} \text{tr}^2(\epsilon) - \frac{(1-2\nu_0)}{2\nu_0} \lambda_{11}^-(D_3) \text{tr}[(I \otimes I)\epsilon]^2 - \mu_2(D_4, D_5) \text{tr}(A\epsilon^2)
\end{aligned} \quad (28)$$

onde W_0 é o potencial elástico do material íntegro e os outros parâmetros sendo definidos por:

$$\begin{aligned}
\lambda_{22}^+(D_1, D_4, D_5) &= (\lambda_0 + 2\mu_0)(2D_1 - D_1^2) - 2\lambda_{12}^+(D_1) - 2\mu_2(D_4, D_5) \\
\lambda_{12}^+(D_1) &= \lambda_0 D_1; \quad \mu_2(D_4, D_5) = 2\mu_0[1 - (1 - D_4)^2(1 - D_5)^2] \\
\lambda_{22}^-(D_2, D_3, D_4, D_5) &= (\lambda_0 + 2\mu_0)(2D_2 - D_2^2) - 2\lambda_{12}^-(D_2, D_3) + \frac{(\nu_0 - 1)}{\nu_0} \lambda_{11}^-(D_3) - 2\mu_2(D_4, D_5) \\
\lambda_{12}^-(D_2, D_3) &= \lambda_0[(1 - D_3)^2 - (1 - D_2)(1 - D_3)]; \quad \lambda_{11}^-(D_3) = \lambda_0(2D_3 - D_3^2) \\
\mu_2(D_4, D_5) &= 2\mu_0[1 - (1 - D_4)^2(1 - D_5)^2]
\end{aligned} \quad (29)$$

O tensor de tensões obtém-se do gradiente do potencial elástico resultando:

$$\sigma(\epsilon) = \nabla_\epsilon \rho \psi_-(\epsilon) = \begin{cases} \sigma_-(\epsilon) = \nabla_\epsilon \rho \psi_-(\epsilon) & \text{se } g(\epsilon, \mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) < 0, \\ \sigma_+(\epsilon) = \nabla_\epsilon \rho \psi_+(\epsilon) & \text{se } g(\epsilon, \mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) > 0, \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_+(\epsilon) = \rho \frac{\partial \psi_+}{\partial \epsilon} &= \lambda_{11} \text{tr}(\epsilon) I + 2\mu_1 \epsilon - \lambda_{22}^+(D_1, D_4, D_5) \text{tr}(A\epsilon) A \\
&- \lambda_{12}^+(D_1) (\text{tr}(\epsilon) A + \text{tr}(A\epsilon) I) - \mu_2(D_4, D_5) (A\epsilon + \epsilon A)
\end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_-(\epsilon) = \rho \frac{\partial \psi_-}{\partial \epsilon} &= \lambda_{11} \text{tr}(\epsilon) I + 2\mu_1 \epsilon - \lambda_{22}^-(D_2, D_3, D_4, D_5) \text{tr}(A\epsilon) A - \lambda_{12}^-(D_2, D_3) \\
&(\text{tr}(\epsilon) A + \text{tr}(A\epsilon) I) - \lambda_{11}^-(D_3) \text{tr}(\epsilon) I - \frac{(1-2\nu_0)}{\nu_0} \lambda_{11}^-(D_3) (I \otimes I) \epsilon - \mu_2(D_4, D_5) (A\epsilon + \epsilon A)
\end{aligned} \quad (32)$$

O tensor constitutivo de rigidez também é obtido do potencial elástico:

$$\mathbb{E}(\epsilon) := \begin{cases} \mathbb{E}_-(\epsilon) = \nabla_\epsilon^2 \rho \psi_-(\epsilon) & \text{se } g(\epsilon, \mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) < 0, \\ \mathbb{E}_+(\epsilon) = \nabla_\epsilon^2 \rho \psi_+(\epsilon) & \text{se } g(\epsilon, \mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) > 0, \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_+(\epsilon) = \rho \frac{\partial^2 \psi_+}{\partial \epsilon^2} &= \mathbb{E}_T = \lambda_{11} [I \otimes I] + 2\mu_1 [I \otimes I] - \lambda_{22}^+(D_1, D_4, D_5) [A \otimes A] \\
&- \lambda_{12}^+(D_1) [A \otimes I + I \otimes A] - \mu_2(D_4, D_5) [A \otimes I + I \otimes A]
\end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_-(\epsilon) = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \epsilon^2} = \mathbf{E}_C = \lambda_{11} [I \otimes I] + 2\mu_1 [I \otimes \bar{I}] - \lambda_{22}^-(D_2, D_3, D_4, D_5) [A \otimes A] \\ - \lambda_{12}^-(D_2, D_3) [A \otimes I + I \otimes A] - \lambda_{11}^-(D_3) [I \otimes I] - \frac{(1-2\nu_0)}{\nu_0} \lambda_{11}^-(D_3) [I \otimes \bar{I}] - \mu_2(D_4, D_5) [A \otimes \bar{I} + I \otimes \bar{A}] \end{aligned} \quad (35)$$

É possível mostrar que as formas adotadas para $\mathbf{D}_T$ e $\mathbf{D}_C$ atendem ao princípio de equivalência de energia, proporcionando um tensor de rigidez simétrico. Para estados predominantes de tração, propõe-se o seguinte tensor de dano escalar:

$$\mathbf{D}_T = f_1(D_1, D_4, D_5) (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) + f_2(D_4, D_5) [(\mathbf{A} \otimes \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{I}} \otimes \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})] \quad (36)$$

sendo: $f_1(D_1, D_4, D_5) = D_1 - f_2(D_4, D_5)$ e $f_2(D_4, D_5) = 1 - (1-D_4)(1-D_5)$.

O tensor de dano em tração apresenta duas variáveis escalares na sua composição D_1 e D_4 e uma terceira variável de dano D_5 , ativada somente se tiver havido compressão prévia com danificação correspondente. A variável D_1 representa a danificação na direção perpendicular ao plano local de isotropia transversal do material e D_4 é a variável representativa do dano gerado pelo cisalhamento entre as bordas das fissuras pertencentes àquele plano. Já em compressão tem-se:

$$\mathbf{D}_C = f_1(D_2, D_4, D_5) (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) + f_2(D_3) [(\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{I}}) - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})] + f_3(D_4, D_5) [(\mathbf{A} \otimes \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{I}} \otimes \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})] \quad (37)$$

sendo: $f_1(D_2, D_4, D_5) = D_2 - f_3(D_4, D_5)$, $f_2(D_3) = D_3$ e $f_3(D_4, D_5) = 1 - (1-D_4)(1-D_5)$.

Notam-se aí as variáveis D_2 , D_3 e D_5 , além de D_4 , relacionada a efeitos de tração pré-existent. A variável D_2 (dano perpendicular ao plano local de isotropia transversal do material) penaliza o módulo de elasticidade nessa direção e, juntamente com D_3 (dano no plano de isotropia transversal), penaliza o coeficiente de Poisson em planos perpendiculares ao de isotropia transversal. Observa-se que, dessa forma, é possível capturar a danificação dos módulos de cisalhamento.

As variáveis associadas às variáveis de dano em tração (D_1 , D_4) e em compressão (D_2 , D_3 , D_5), por sua vez, podem ser interpretadas como taxas de energia liberada durante o processo de evolução de dano, e também são derivadas do potencial W :

$$Y_i(D_i) = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D_i} \quad (i=1,5) \quad (38)$$

O modelo proposto inclui dois tensores de dano que permitem levar em conta o aspecto bimodular induzido pela danificação no comportamento do concreto. Logo, surge a necessidade de um critério para caracterizar estados predominantes de tração e de compressão. Como já discutido, este critério é influenciado pelo estado de dano existente, portanto, para a função g propõe-se:

$$g(\varepsilon, \mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) = N(\mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) \cdot \varepsilon^e \quad (39)$$

Em Pituba (2003) aborda-se com mais detalhes a divisão do espaço das deformações dadas, segundo a Eq. (39) e em correspondência aos casos mais gerais de solicitações, por:

$$g(\varepsilon, \mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) = N(\mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) \cdot \varepsilon^e = \gamma_1(D_1, D_2) \varepsilon_V^e + \gamma_2(D_1, D_2) \varepsilon_{11}^e \quad (40)$$

onde $\gamma_1(D_1, D_2) = \{1 + H(D_2)[H(D_1) - 1]\}\eta(D_1) + \{1 + H(D_1)[H(D_2) - 1]\}\eta(D_2)$ e $\gamma_2(D_1, D_2) = D_1 + D_2$.

As funções de Heaveside empregadas na última relação são dadas por:

$$H(D_i) = 1 \text{ para } D_i > 0; \quad H(D_i) = 0 \text{ para } D_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (41)$$

As funções $\eta(D_1)$ e $\eta(D_2)$ são definidas, respectivamente, para os casos de tração, supondo que não tenha danificação prévia de compressão, e de compressão, supondo que não tenha havido danificação prévia de tração, sendo expressas como:

$$\eta(D_1) = \frac{-D_1 + \sqrt{3 - 2D_1^2}}{3}; \quad \eta(D_2) = \frac{-D_2 + \sqrt{3 - 2D_2^2}}{3} \quad (42)$$

Como foi visto, na formulação do modelo a danificação induz uma anisotropia no comportamento do concreto. Sendo, portanto, o material inicialmente isotrópico linear, é conveniente separar os critérios de danificação em: critério para início de danificação, quando o material deixa de ser isotrópico, e critério para carga e descarga, entendido aqui num sentido de evolução ou não das variáveis de dano, quando o material já se apresenta como transversalmente isotrópico. Essa divisão é justificada pela diferença existente entre as energias de deformação elástica complementares de um material isotrópico e de um material transversalmente isotrópico.

A ativação inicial dos processos de danificação é governada por uma limitação da quantidade de energia que pode ser empregada em processos puramente reversíveis. Sugere-se como critério para identificação de início da danificação a comparação entre a energia elástica complementar W_e^* , calculada localmente considerando-se o meio inicialmente íntegro, isotrópico e puramente elástico, e um certo valor de referência Y_{OT} , ou Y_{OC} , obtido de ensaios uniaxiais de tração, ou de compressão, respectivamente. De forma resumida, o critério é dado por:

$$f_{T,C}(\sigma) = W_e^* - Y_{OT,OC} < 0 \quad f_T \dot{\mathbf{D}}_T = 0 \quad f_C \dot{\mathbf{D}}_C = 0 \quad (43)$$

então, $\mathbf{D}_T = \mathbf{0}$ (ou seja, $D_1 = D_4 = 0$) e o regime de resposta do material é elástico linear e isotrópico para estados predominantes de tração, valendo o mesmo para os casos de compressão.

Considerando-se uma situação geral de meio danificado em regime predominante de tração, o critério para a identificação de acréscimos de danificação é representado pela seguinte relação:

$$f_T(\sigma) = W_{e+}^* - Y_{0T}^* \leq 0 \quad (44)$$

onde o valor de referência Y_{0T}^* é definido pela máxima energia elástica complementar determinada ao longo do processo de danificação até o estado atual, isto é:

$$Y_{0T}^* = MAX(Y_{0T}^*, W_{e+}^*) \quad (45)$$

As condições teóricas de carregamento-descarregamento ficam, então, dadas pelas relações:

$$f_T \leq 0, \dot{D}_T \geq 0, f_T \dot{D}_T = 0; \quad Se f_T = 0, \dot{f}_T \dot{D}_T = 0 \quad (46)$$

A energia elástica complementar do meio danificado se expressa segundo formas diferentes, dependendo de se os estados de deformação predominantes são de tração ou de compressão. Por conveniência, admite-se, por exemplo, que seja conhecido o plano de isotropia transversal e que tenha sido adotado um sistema de coordenadas locais tal que a direção 1 seja perpendicular àquele plano. Logo, para o caso de estados predominantes de tração e de compressão valem as relações:

$$W_{e+}^* = \frac{\sigma_{11}^2}{2E_0(1-D_1)^2} + \frac{(\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2)}{2E_0} - \frac{\nu_0(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33})}{E_0(1-D_1)} - \frac{\nu_0\sigma_{22}\sigma_{33}}{E_0} + \frac{(1+\nu_0)}{E_0(1-D_4)^2(1-D_5)^2}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) + \frac{(1+\nu_0)}{E_0}\sigma_{23}^2 \quad (47)$$

$$W_{e-}^* = \frac{\sigma_{11}^2}{2E_0(1-D_2)^2} + \frac{(\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2)}{2E_0(1-D_3)^2} - \frac{\nu_0(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33})}{E_0(1-D_2)(1-D_3)} - \frac{\nu_0\sigma_{22}\sigma_{33}}{E_0(1-D_3)^2} + \frac{(1+\nu_0)}{E_0(1-D_4)^2(1-D_5)^2}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) + \frac{(1+\nu_0)}{E_0}\sigma_{23}^2 \quad (48)$$

Nos casos onde se configura carregamento, isto é, onde $\dot{D}_T \neq 0$ ou $\dot{D}_C \neq 0$, é necessário atualizar os valores das variáveis escalares de dano que aparecem nos tensores D_T e D_C , considerando-se suas leis de evolução. Neste trabalho, propõe-se que as leis de evolução das variáveis de dano sejam escritas em função de suas variáveis associadas, as quais correspondem à energia liberada durante o processo de evolução do dano, Lemaitre (1996).

Dos potenciais de energia complementar (47) e (48) decorrem as variáveis associadas ao dano. As expressões para a energia liberada durante o processo de evolução do dano, em estados predominantes de tração e de compressão são dadas, respectivamente, por:

$$Y_T = \frac{\partial W_{e+}^*}{\partial D_1} + \frac{\partial W_{e+}^*}{\partial D_4} = Y_I + Y_4, \quad Y_C = \frac{\partial W_{e-}^*}{\partial D_2} + \frac{\partial W_{e-}^*}{\partial D_3} + \frac{\partial W_{e-}^*}{\partial D_5} = Y_2 + Y_3 + Y_5 \quad (49)$$

$$Y_1 = \frac{\sigma_{11}^2}{E_0(1-D_1)^3} - \frac{\nu_0(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33})}{E_0(1-D_1)^2} \quad (50)$$

$$Y_2 = \frac{\sigma_{11}^2}{E_0(1-D_2)^3} - \frac{\nu_0(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33})}{E_0(1-D_2)^2(1-D_3)} \quad (51)$$

$$Y_3 = \frac{(\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2)}{E_0(1-D_3)^3} - \frac{\nu_0(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33})}{E_0(1-D_2)(1-D_3)^2} - \frac{2\nu_0\sigma_{22}\sigma_{33}}{E_0(1-D_3)^2} \quad (52)$$

$$Y_4 = \frac{(1+\nu_0)}{E_0(1-D_4)^3(1-D_5)^2} (2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{13}^2) \quad (53)$$

$$Y_5 = \frac{(1+\nu_0)}{E_0(1-D_5)^3(1-D_4)^2} (2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{13}^2) \quad (54)$$

Segundo o método do Estado Local, a desigualdade de Clausius-Duhem pode ser dada por:

$$A \cdot \dot{a} - \left(\frac{1}{T} \right) \nabla T \cdot q \geq 0 \quad (55)$$

que exprime a soma da dissipação associada à evolução das variáveis internas e da dissipação térmica por calor, sendo $\mathbf{a}$ um conjunto de variáveis internas e A é o conjunto de variáveis associadas a $\mathbf{a}$ definidas por $-A_i = \partial\psi/\partial a_i$. No modelo proposto ocorrem processos puramente mecânicos (isotérmicos) aplicados aos meios elásticos. Nessas condições, pode-se ter:

$$A \cdot \dot{a} \geq 0, \text{ ou seja, } Y \cdot \dot{D} \geq 0 \quad (56)$$

Como Y_i ($i = 1, 5$) são formas quadráticas definidas positivas (Eq. 50 a 54) resulta que $\dot{D}_i \geq 0$ ($i = 1, 5$), evidenciando que os processos de danificação são termodinamicamente admissíveis.

Nota-se que as relações que definem as variáveis associadas, Eq. (49), podem ser dadas por:

$$Y_{T,C} = F(\sigma, \mathbf{E}_0, \mathbf{D}_{T,C}) \quad (57)$$

Também, as leis de evolução das variáveis de dano podem ser dadas por:

$$\dot{\mathbf{D}}_{T,C} = F^*(Y_{T,C}, b_{T,C}) \quad (58)$$

onde $b_{T,C}$ são conjuntos de parâmetros contidos nas leis de evolução de $\mathbf{D}_T$ ou $\mathbf{D}_C$. Observa-se que, para situações de carregamento monotônico crescente, as relações Eq. (58) podem ser integradas diretamente. Entretanto, as relações para $Y_{T,C}$ e $\mathbf{D}_{T,C}$ formam um sistema implícito. A solução do sistema pode ser obtida por meio de um procedimento iterativo.

Em geral, as leis de evolução das variáveis de dano podem ser obtidas pelas estratégias:

- por identificação direta a partir de respostas experimentais obtidas em laboratórios;
- pela definição de um potencial de dissipação escrito em função das variáveis associadas, que engloba estados que podem ser atingidos sem qualquer dissipação adicional de energia e de cuja variação derivam as leis de evolução.

Um inconveniente da primeira estratégia limitante de sua generalidade é que ela pode conduzir a leis que tenham aplicação restrita a combinações de solicitações similares àquelas dos ensaios realizados. Já a segunda tem um cunho mais teórico, porém com algumas vantagens, tais como: aplicação a situações gerais de solicitações, estrutura formal do modelo resultante próxima daquela obtida por outras teorias e possibilidade de manutenção de simetria do tensor constitutivo.

Contudo, para os estudos iniciais contidos neste trabalho e, ainda, visando a uma aplicação mais prática do modelo, admite-se aqui a primeira estratégia. Portanto, limitando-se a análise ao caso de carregamento monotônico crescente, as leis de evolução propostas para as variáveis escalares de dano em tração $\dot{D}_1$, $\dot{D}_4$ e em compressão $\dot{D}_2$, $\dot{D}_3$ e $\dot{D}_5$ são resultantes de ajustes sobre resultados experimentais e apresentam características similares àquelas encontradas nos trabalhos de Mazars (1984) e La Borderie (1991). A forma geral proposta é a seguinte:

$$D_i = 1 - \frac{1 + A_i}{A_i + \exp[B_i(Y_i - Y_{oi})]} \quad \text{com } i = 1, 5 \quad (59)$$

onde A_i , B_i e Y_{oi} são parâmetros a serem identificados. O subíndice i está relacionado à variável de dano escalar que está sendo calculada. Os parâmetros Y_{oi} são entendidos como limites iniciais para a ativação da danificação, os mesmos utilizados na Eq. (43). A identificação paramétrica do modelo é realizada através de ensaios experimentais de tração uniaxial para a obtenção dos parâmetros A_1 , B_1 e $Y_{o1} = Y_{OT}$, de ensaios de compressão uniaxial para a identificação dos parâmetros A_2 , B_2 e Y_{o2} e, finalmente, de ensaios de compressão biaxial para obter A_3 , B_3 e $Y_{o3} = Y_{o2} = Y_{OC}$. Por outro lado, a identificação dos parâmetros contidos nas leis de evolução correspondentes às variáveis de dano D_4 e D_5 , as quais influenciam o comportamento do concreto em cisalhamento, não será objeto de estudo neste trabalho, por não estarem disponíveis ensaios que permitam a calibração dos parâmetros ou, até mesmo, a proposição de leis de evolução mais realistas até o momento. Resultados da identificação paramétrica através de ensaios correspondentes a estados uni, bi e triaxiais em corpos de prova de concreto são descritos em Proença and Pituba (2003).

Por outro lado, quando o processo de danificação é ativado, a formulação passa a envolver o tensor $\mathbf{A}$, que, por sua vez, depende do conhecimento da normal ao plano de isotropia transversal. Então, devem-se definir regras para a localização dessa normal para um dado estado de deformação.

Em Pituba (2003) sugere-se um critério para a localização do plano de isotropia transversal baseado nos sinais das taxas das deformações principais. Inicialmente, propõe-se que a isotropia transversal decorrente do dano se manifesta somente se existirem taxas positivas de deformação, ao menos em uma das direções principais. Em se-

guida, definem-se algumas regras para identificar sua localização. Em primeiro lugar, num estado de deformação em que uma das taxas de deformação é não-nula ou de sinal contrário às demais, aplica-se a seguinte regra:

“No espaço das deformações principais, se duas das três taxas das deformações forem de alongamento, encurtamento ou nulas, o plano definido por elas será o plano de isotropia.”

Nesse caso enquadra-se, por exemplo, a tração uniaxial, resultando que o plano de isotropia transversal é perpendicular à direção da tensão de tração. Entretanto, há casos não abrangidos por essa regra. Por exemplo, o estado de deformação plana em que as deformações não-nulas são de sinais contrários. Para esta situação, vale uma segunda regra:

“Num estado de deformação plana, onde as taxas das deformações principais no plano tenham sinais contrários, o plano local de isotropia transversal do material fica definido pelas direções da deformação principal permanentemente nula e da deformação cuja taxa seja positiva.”

Um outro caso particular ocorre quando todas as taxas de deformações principais são positivas. Para esses estados vale uma terceira regra, segundo a qual se assume que a direção de maior alongamento seja perpendicular ao plano local de isotropia transversal do material. Obviamente, critérios baseados em outros fundamentos podem ser sugeridos, como, por exemplo, a teoria de microplanos.

4.1. Sobre a incorporação de deformações residuais na formulação do modelo constitutivo

Observações experimentais indicam que as deformações permanentes não são desprezíveis nas situações de descarregamento. Alguns modelos de dano levam em conta na sua formulação tais deformações associando-as exclusivamente ao fenômeno da danificação. O tipo de acoplamento adotado normalmente é o cinemático, o início e evolução de microfissuras influenciam na velocidade das deformações permanentes. De fato, as deformações anelásticas e a danificação evoluem simultaneamente. Segundo La Borderie (1991), a microfissuração e a existência de vazios no material estão na origem dos dois fenômenos. Por um lado, os microvazios são uma causa para as deformações anelásticas, pois impedem que as microfissuras fechem totalmente num processo de descarregamento. Por outro lado, nota-se numa microfissura que suas faces são irregulares, sendo esta uma outra razão para a dificuldade do seu fechamento total.

Neste item trata-se da incorporação de deformações residuais no modelo constitutivo proposto para o concreto danificado. Como critério geral, admite-se que tais deformações surgem após o início da danificação. Limita-se neste trabalho a proposta apenas aos casos uniaxiais, pois se tratando de um modelo de dano com anisotropia induzida, as deformações plásticas em estados mais complexos de sollicitação devem ser melhor avaliadas.

Sendo, por hipótese, a deformação plástica dependente do processo de danificação, obtém-se para um dado $\dot{\epsilon}^p$ que:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}^p(D, \dot{D}) \quad (60)$$

Portanto, podem-se estabelecer duas hipóteses simplificadoras: na primeira, a taxa de deformação plástica é função exclusiva do estado de danificação no instante da análise; na segunda, a taxa de deformação plástica depende diretamente da evolução da danificação do material. Os dois tratamentos não são explorados independentemente, servindo, então, de base para a proposição de uma regra direta para $\dot{\epsilon}^p$, considerando-se genericamente a dependência indicada pela Eq. (60).

Nesse contexto, e tendo-se em vista a bimodularidade, propõe-se uma lei de evolução não-associativa para as deformações residuais, inspirada na proposta de Comi (2000), dada por:

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\partial g_T}{\partial \sigma} \dot{D}_T + \frac{\partial g_C}{\partial \sigma} \dot{D}_C \quad (61)$$

onde g_T e g_C são potenciais anelásticos.

Admitindo-se, ainda por simplificação, pois se trata de um modelo em fase inicial de estudos, que as deformações plásticas são compostas exclusivamente por deformações volumétricas, o que é razoável para a simulação do comportamento de materiais frágeis como o concreto, os potenciais podem ser expressos por:

$$g_T = \beta_T(D_T)I_1; \quad g_C = \beta_C(D_C)I_1 \quad (62)$$

sendo I_1 o primeiro invariante do tensor de tensões. Segue daí que a Eq. (61) assume a forma:

$$\dot{\epsilon}^p = \beta_T(D_T) \dot{D}_T + \beta_C(D_C) \dot{D}_C \quad (63)$$

As funções de dano $\beta_T(D_T)$ e $\beta_C(D_C)$ são dependentes do material. No caso do modelo proposto para aplicação ao concreto, assumem-se as seguintes funções:

$$\beta_T(D_T) = \frac{\beta_1}{(1 - D_1)^2}; \quad \beta_C(D_C) = \frac{\beta_2}{(1 - D_2)^2} \quad (64)$$

Finalmente, a lei de evolução para as deformações plásticas resulta:

$$\dot{\epsilon}^p = \left(\frac{\beta_1}{(1 - D_1)^2} \dot{D}_1 + \frac{\beta_2}{(1 - D_2)^2} \dot{D}_2 \right) \mathbf{I} \quad (65)$$

Observa-se que nesta proposta, β_1 e β_2 são parâmetros diretamente relacionados às evoluções das deformações plásticas induzidas pelo dano em tração e em compressão.

Resultados do emprego do modelo com e sem a consideração de deformações residuais na simulação de ensaios uniaxiais de tensão realizados por Kupfer *et al.* (1969)

em espécimes de concreto podem ser encontrados em Pituba (2003). Nos ensaios de compressão uniaxial, o modelo apresentou bons resultados concluindo-se que as deformações residuais passam a desempenhar um papel importante no comportamento do concreto na região próxima à tensão de pico (Fig. 1).

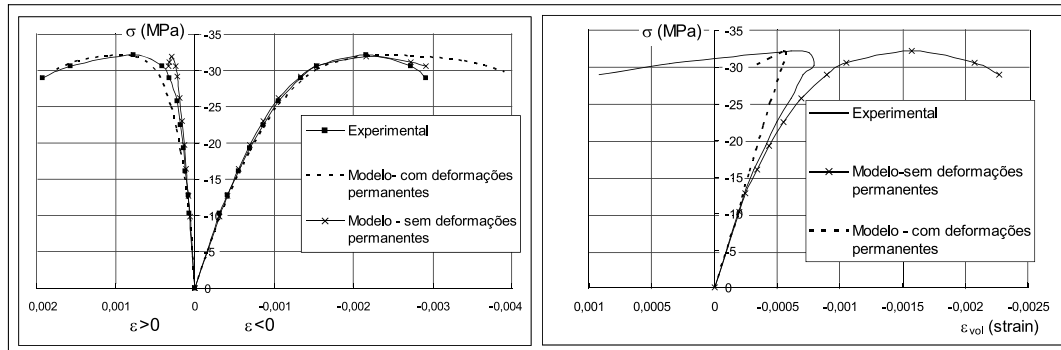


Figura 1: Simulação do teste de compressão uniaxial (Pituba 2003).

5. Exemplos numéricos

O objetivo dos exemplos numéricos apresentados a seguir é validar o emprego da versão inicial do modelo em situações básicas, tais como: análises unidimensionais e bidimensionais de vigas com carregamento monotônico crescente de modo a incentivar o autor na melhoria da formulação matemática do modelo, além, obviamente, de ilustrar as suas potencialidades. Vale ressaltar que o modelo tem a capacidade de analisar estruturas submetidas a cargas com inversão de sinal, porém aplicações numéricas deste tipo, dentre outras, serão objeto de futuros trabalhos.

5.1. Análises unidimensionais

A versão unidimensional do modelo constitutivo foi implementada num programa para análise de estruturas de barras discretizadas com elementos finitos estratificados em camadas (EFICoS – *Eléments Finis à Couches Superposées*). Para o concreto vale o modelo de dano com deformações plásticas induzidas e, para as barras de aço longitudinais, admite-se um comportamento elasto-plástico perfeito. Na seção transversal em concreto armado discretizada, uma certa camada pode conter aço e concreto. Admitindo-se perfeita aderência entre os materiais, definem-se, para a camada em questão, um módulo elástico e uma deformação anelástica equivalentes, utilizando-se de regra de homogeneização.

Na confecção das vigas (Fig. 2) foi utilizado um concreto com $E_c = 29200$ MPa e aço das armaduras com $E_a = 196000$ MPa e tensão de escoamento de 420 MPa. Maiores

detalhes sobre a resposta experimental das vigas encontram-se em Álvares (1993).

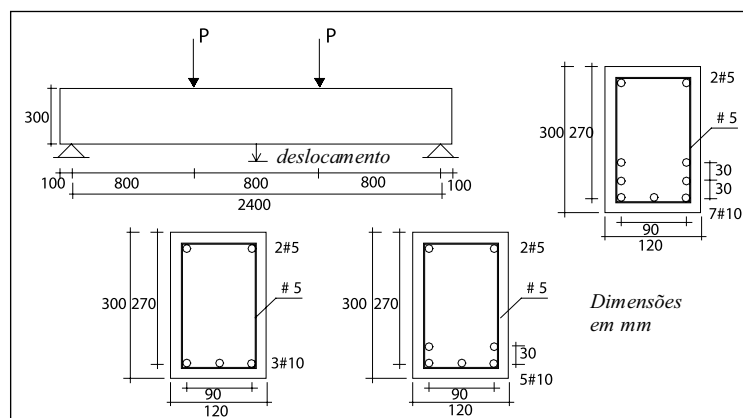


Figura 2: Geometria e armação das vigas

Os parâmetros de compressão do modelo foram identificados a partir das medições de ensaios experimentais em corpos-de-prova submetidos à compressão uniaxial, realizados por Álvares (1993). Já os parâmetros de tração foram identificados sobre uma resposta em tração uniaxial descrita pelo modelo de Mazars (1984) e proposta por Álvares para o concreto das vigas. A obtenção dos parâmetros (Tab. 1) se dá pelo ajuste das curvas experimentais através de um código computacional desenvolvido pelo autor, utilizando o método dos mínimos quadrados.

Tabela 1: Parâmetros do modelo constitutivo.

Tração	Compressão
$Y_{01} = 0,72 \times 10^{-4} \text{ MPa}$	$Y_{02} = 0,5 \times 10^{-3} \text{ MPa}$
$A_1 = 49$	$A_2 = -0,91$
$B_1 = 6560 \text{ MPa}^{-1}$	$B_2 = 0,38 \text{ MPa}^{-1}$
$\beta_1 = 1 \times 10^{-6} \text{ MPa}$	$\beta_2 = 2 \times 10^{-4} \text{ MPa}$

Fazendo-se uso das simetrias de carregamento e de geometria, analisaram-se apenas as metades das vigas, impondo-se incrementos de deslocamentos. Nas análises foram utilizados 20 elementos finitos, discretizaram-se as seções transversais em 15 camadas, sendo uma camada de aço e concreto na viga com 3#10.0 mm, duas na viga com 5#10.0 mm e três na viga 7#10.0 mm.

Observa-se na Figura 3 que as respostas numéricas são consideradas satisfatórias. Contudo, a incorporação de deformações plásticas na formulação do modelo não implicou mudanças significativas da curva carga-deslocamento quando comparadas com Pituba (2003). Logo, neste tipo de modelo, plastificação induzida, deformações permanentes não implicam dissipação adicional de energia, ou seja, a plastificação do concreto não tem influência marcante na rigidez da estrutura.

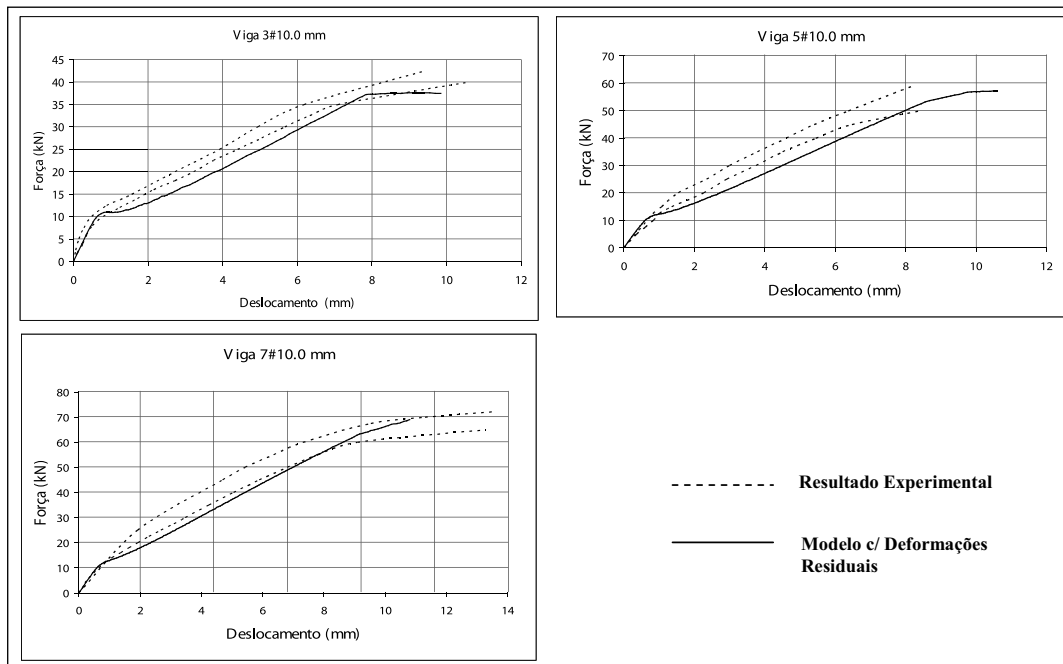


Figura 3: Resultados numéricos da análise unidimensional

5.2. Análises bidimensionais

A versão bidimensional do modelo foi implementada num código em elementos finitos para análise plana. Aqui, assume-se o modelo de dano para o concreto, enquanto que o aço comporta-se como meio elástico linear. Elementos quadrilaterais com deformação constante (4 nós) foram utilizados. As simetrias de carregamento e de geometria foram empregadas nas análises. Esta aplicação numérica foi inicialmente realizada por Perego (1989), usando o modelo proposto por Mazars (1984). As respostas do modelo de Mazars e do proposto neste trabalho estão ilustradas na Figura 4. O concreto utilizado na confecção da viga tem módulo de elasticidade $E_c = 24700$ MPa; o aço tem $E_a = 210000$ MPa. A Tabela 2 contém os valores dos parâmetros dos modelos empregados.

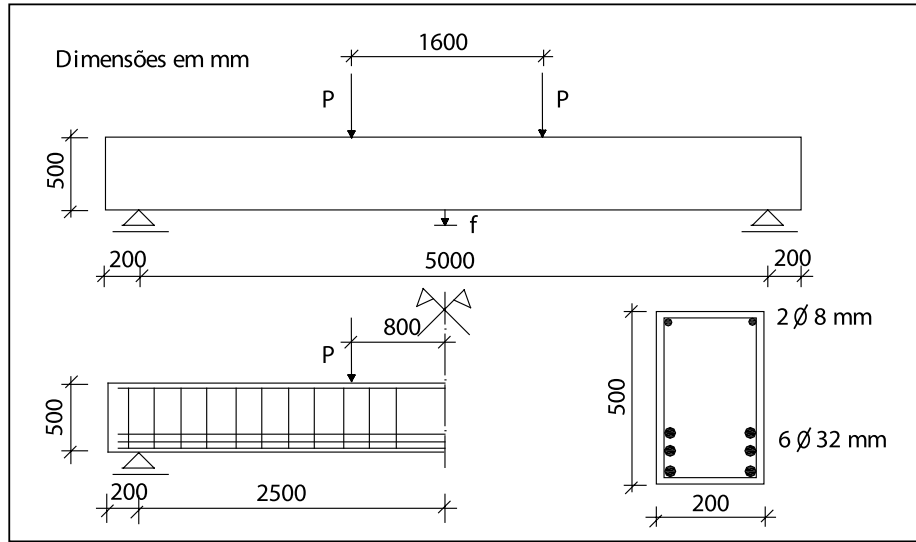


Figura 4: Detalhes da geometria e da armadura

Tabela 2: Valores dos parâmetros dos modelos

Mazars (1984)		Modelo		
Tração	Compressão	Tração	Compressão	
$A_T = 0.995$	$A_C = 1.13$	$Y_{01} = 0.72 \times 10^{-4} \text{ MPa}$	$Y_{02} = 0.5 \times 10^{-3} \text{ MPa}$	$Y_{03} = 0.5 \times 10^{-3} \text{ MPa}$
$B_T = 8000$	$B_C = 1643.5$	$A_I = 50$	$A_2 = -0.9$	$A_3 = -0.6$
$\epsilon_{d0} = 0.000067$		$B_I = 6700 \text{ MPa}^{-1}$	$B_2 = 0.4 \text{ MPa}^{-1}$	$B_3 = 70000 \text{ MPa}^{-1}$

Alguns comentários devem ser feitos em relação à discretização e idealização adotadas. Com relação ao comportamento elástico-linear para o aço, tal hipótese é justificável no caso de vigas que possuem alta taxa de armadura, onde o colapso acontece, sobretudo, pelo comprometimento do concreto.

A discretização da viga foi efetuada utilizando-se uma malha constituída por 100 e 160 elementos finitos. A altura da viga foi subdividida em 5 e 8 camadas de elementos, respectivamente, onde uma única camada representa a armadura, com área equivalente disposta no baricentro geométrico das barras de aço.

A resposta obtida em termos da curva carga-deslocamento (Fig. 5) mostra, em sua maior parte, uma ótima coerência com os resultados experimentais apresentados em Perego (1989). De fato, o modelo proposto é capaz de colher com boa precisão a não-linearidade da curva. Uma instabilidade numérica surge na resposta com 100 elementos devido aos altos níveis de danificação na região inferior da viga. Mostra-se que o emprego de uma malha mais refinada em tal região contorna o problema. Por outro lado, na análise efetuada por Perego (1989), com o modelo de Mazars, apresentou-se a instabilidade numérica já por volta da força de 120 kN.

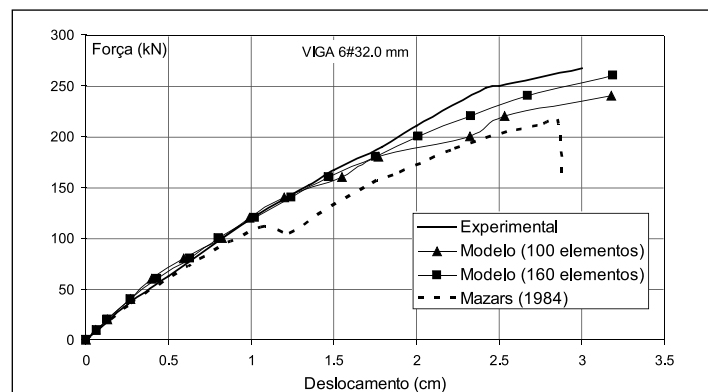


Figura 5: Viga 6#32.0 mm: resultados numérico e experimental

Observa-se que o modelo proposto penaliza seletivamente a rigidez do material de acordo com a direção considerada. Isso não ocorre com o modelo de Mazars, que, por danificar exageradamente a rigidez do material em todas as direções em torno de um ponto, acaba por apresentar problemas de ordem numérica devido ao mau condicionamento da matriz de rigidez global da estrutura, logo, num nível intermediário de carga. É possível dar uma explicação plausível para a instabilidade observada. O modelo numérico, na verdade, procura reproduzir uma situação de danificação fortemente localizada, que seria equivalente à formação de uma zona de fissuração intensa. Fisicamente, essa zona se manifesta efetivamente entre as forças aplicadas.

6. Conclusões

Neste trabalho apresentou-se uma extensão da formulação de modelos para materiais elásticos anisótropos que possuem diferentes comportamentos em tração e em compressão, proposta por Curnier *et al.* (1995), para os casos onde o dano induz anisotropia e comportamento bimodular.

Embora a ênfase tenha sido dada à isotropia transversal induzida pelo dano num meio inicialmente isotrópico, a formulação desenvolvida também pode ser aplicada para casos mais complexos de danificação em meios inicialmente isotrópicos ou anisótropos.

Para demonstrar a utilidade da proposta de formulação, um modelo constitutivo foi elaborado segundo o formalismo deste trabalho. Versões iniciais do modelo foram usadas em ensaios de corpos-de-prova de concreto e na análise uni e bidimensional de vigas em concreto armado. Os resultados mostraram-se bastante satisfatórios, incentivando a investigação em análises planas mais refinadas com a consideração do fenômeno de localização de deformações, das variáveis ligadas ao cisalhamento, além de simulações que evidenciem as potencialidades do modelo em situações de inversão de carga. Acredita-se que pode ser importante a identificação das leis de evolução das variáveis de dano D_4 e D_5 que influenciam o comportamento do concreto quanto ao cisalhamento. Esta característica está disponível no modelo, porém não foi tratada aqui.

Já no âmbito da formulação para meios danificados, esta pode dar origem a modelos constitutivos para vários materiais dependendo dos fenômenos envolvidos, constituindo-se, assim, numa ferramenta para trabalhos futuros.

Agradecimentos

À Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (Fapesp) e ao Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT) – Université Paris VI pelo apoio para a realização deste trabalho.

Referências

- Álvares, M. S. (1993). *Estudo de um Modelo de Dano para o Concreto: Formulação, Identificação Paramétrica e Aplicação com o Emprego do Método dos Elementos Finitos*. Dissertação de Mestrado, EESC – Universidade de São Paulo.
- Brünig, M. (2004). An Anisotropic Continuum Damage Model: Theory and Numerical Analyses. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 1, p. 185-218.
- Comi, C. (2000). A Nonlocal Damage Model with Permanent Strains for Quasi-Brittle Materials. Continuous Damage and Fracture, Ed.: Ahmed Benallal, p. 221-232.
- Curnier, A.; He, Q. and Zysset, P. (1995). Conewise Linear Elastic Materials. *Journal of Elasticity*, v. 37, p. 1-38.
- Dragon, A.; Halm, D. and Désoyer, Th. (2000). Anisotropic Damage in Quasi-Brittle Solids: Modelling, Computational Issues and Applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 183, p. 331-352.
- Kupfer, H.; Hilsdorf, H. K. and Rusch, H. (1969). Behavior of Concrete under Biaxial Stresses. *ACI Journal*, v. 66, p. 656-666.
- La Borderie, C. (1991). *Phénomènes Unilatéraux dans un Matériau Endommageable: Modélisation et Application à l'Analyse de Structures en Béton*. Thèse de Doctorat de L'université Paris.
- Lemaitre, J. (1996). *A Course on Damage Mechanics*. Springer Verlag.
- Lemaitre, J.; Desmorat, R. and Sauzay, M. (2000). Anisotropic Damage Law of Evolution. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, v.19, p. 187-208.
- Mazars, J. (1984). *Application de la Mécanique de l'Endommagement au Comportement Non Linéaire et à la Rupture du Béton de Structure*. Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6.
- Perego, M. (1989). *Danneggiamento dei Materiali Lapidei: Leggi Constitutive, Analisi per Elementi Finiti ed Applicazioni*. Tesi di Laurea, Politécnico de Milano.
- Pietruszczak, S. and Mroz, Z. (2001). On Failure Criteria for Anisotropic Cohesive-Frictional Materials. *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 25, p. 509-524.
- Pituba, J. J. C. (2003). *Sobre a Formulação de um Modelo de Dano para o Concreto*. Tese de Doutorado, EESC – Universidade de São Paulo.
- Proença, S. P. B. and Pituba, J. J. C. (2003). A Damage Constitutive Model Accounting for Induced Anisotropy and Bimodular Response. *Latin American J. of Solids and Struct.*, v. 1, p. 101-117.
- Van Mier, G. M. (1984). *Strain-Softening of Concrete under Multiaxial Loading Conditions*. PhD Thesis, Eindhoven Tech. Univ.

Formulation of damage models for bimodular and anisotropic media

Abstract

This work deals with the formulation of constitutive laws for elastic media that start to present different behaviors in tension and compression as well as some anisotropy degree when damaged. Initially, a formulation for bimodular and anisotropic elastic media is reviewed; then it is extended to take into account the damage processes. Fourth-order anisotropic tensors are requested by the formulation depending on the class of anisotropy that is assumed. According to the proposed formulation, a constitutive model is obtained for the concrete presenting anisotropy, bimodularity and permanent strains induced by damage evolution. The model is employed in the numerical analyses of reinforced concrete beams. In general way, the formulation described in this work has a wide employment in the development of constitutive models for damaged media.

Keywords: damage mechanics, constitutive model, anisotropy, bimodular materials.

1. Formulation for anisotropic elastic media with damage and bimodular response

Curnier *et al.* (1995) proposed a formulation for anisotropic and bimodular media considering a bimodular hyperelastic material, being defined an elastic potential energy density (see Eq. 12, 13 and 14) which must be once continuously differentiable (whole wise), but only piecewise twice continuously differentiable. The stress-strain relationship derived from this potential is piecewise continuously differentiable leading to an elasticity tensor discontinuous referred to a hypersurface that contains the origin and divides the strain space into a compression and tension sub-domains (see Eq. 10).

In this work, the damage processes are incorporated in the Curnier's formulation. The coefficients named bulk and shear modulus are influenced by damage variables. Moreover, the hypersurface $g(\boldsymbol{\epsilon}, D_i)$ taken as the criterion for the identification of the constitutive responses in compression or tension is also influenced by the damage variables. Then, the expressions for the potential energy function and the derived relationships to stress, rigidity modulus and variables associated to damage are given by Eq. (16), (17), (18) and (19). It can be observed that bimodular character implies that bulk coefficients depend of $g(\boldsymbol{\epsilon}, D_i)$.

In order to illustrate the employment of the proposed formulation, a damage model for the concrete is obtained. This model is used in one and two-dimensional analyses of reinforced concrete beams. The results of the numerical analyses have shown quite accurate (Fig. 3 and 5).

2. Conclusions

In this work has been shown the formulation of constitutive models for anisotropic elastic materials presenting damage processes and bimodular response.

Although, it has been taken as example a formulation for initially isotropic media with transverse isotropy and bimodularity induced by the damage, it must be pointed out that the general formulation can also be applied to more complex damage processes and level of anisotropy.

In order to show the usefulness of the proposed formulation, a constitutive model it was obtained according to the formalism of this work. The employment of the one and two-dimensional initial versions of the model were presented. The high performance of the proposed model has been demonstrated by comparing the numerical solutions of reinforced concrete beams with their experimental results. The high accuracy of the results encourages the author to extend further the proposed damage model to two-dimensional analyses with the consideration of the strain localization phenomenon and numerical analyses that evidence the potentiality of the model to simulate the behavior structures submitted to load with inverse sign. It is believed that it can be important the identification of evolution laws for damage variables D_4 and D_5 which influence the shear concrete behaviour. This asset is available by the model, but it was not explored in this work.

Finally, in the context of the formulation for damaged media, the formalism of this work can be taken as basis of constitutive models for several materials depending on the involved phenomena. Thus, that formalism should be a tool for future works.