

Dimensionamento ótimo de barras de concreto armado com restrições dadas em índices de confiabilidade

C. G. Nogueira¹, W. S. Venturini²

Trabalho recebido em 23/10/2006 e aprovado para publicação em 22/12/2006.

Resumo

Apresenta-se neste trabalho um modelo para otimização de estruturas de concreto armado com restrições em índices de confiabilidade. A função-objetivo a ser minimizada é o custo do elemento estrutural. Além das equações de equilíbrio e compatibilidade para seções transversais de elementos fletidos de concreto armado, considera-se ainda, uma restrição adicional dada pelo índice de confiabilidade requerido para o estado limite último de ruptura dos materiais. No problema de confiabilidade, a equação de estado limite é definida por um polinômio de segunda ordem no espaço das variáveis aleatórias. No problema da otimização, são utilizadas funções lineares e uma aproximação quadrática para representar a superfície de confiabilidade.

Palavras-chave: confiabilidade estrutural, otimização, concreto armado, elementos finitos.

¹ Doutorando, Departamento de Estruturas, Universidade de São Paulo – São Carlos (USP-SC). Rua do Trabalhador Sancarlense, 400, CEP 13560-000 – São Carlos-SP – Brasil. Tel: +55....., Fax: +55..... E-mail: gorlanog@sc.usp.br

² Prof. Dr., Departamento de Estruturas, Universidade de São Paulo – São Carlos (USP-SC). Rua do Trabalhador Sancarlense, 400, CEP 13560-000 – São Carlos-SP – Brasil. Tel: +55....., Fax: +55..... E-mail:

1. Introdução

Em um projeto estrutural, assim como em qualquer empreendimento de engenharia, procura-se a solução mais econômica e segura possível. Em termos matemáticos, a estrutura deve, durante toda sua vida útil, possuir recursos (resistências) superiores às demandas (ações). Para garantir isso, a NBR 6118 (2003), assim como diversos códigos internacionais, define uma série de restrições que se traduzem em critérios de segurança, que são adotados para projetos de estruturas.

Atualmente, a garantia da segurança estrutural é dada pela utilização de coeficientes parciais de segurança. Entretanto, essa metodologia não permite o conhecimento das probabilidades de se atingir um estado limite da estrutura. Na tentativa de solucionar esses inconvenientes, a Teoria da Confiabilidade é empregada com o objetivo de levar em conta, de uma maneira mais consistente, as incertezas sobre as variáveis envolvidas no projeto estrutural. Dessa forma, as variáveis de projeto são consideradas como aleatórias, com modelagem de suas incertezas por meio de distribuições de probabilidade adequadas.

No âmbito da verificação da segurança de uma estrutura, Mohamed (1996) define confiabilidade estrutural como sendo a probabilidade de sobrevivência de um componente ou sistema estrutural, desde que utilizado de acordo com as especificações do projeto. Com a utilização da confiabilidade pode-se atingir a primeira meta de um projeto de engenharia: estruturas mais confiáveis em função de um melhor conhecimento do seu real nível de segurança. Combinado a isso, cabe, agora, incorporar conceitos que permitam um projeto mais econômico respeitando a segurança especificada. É neste contexto que a otimização matemática pode assumir um papel muito interessante na concepção de um projeto de engenharia: o projeto ótimo. Portanto, na prática, procura-se a solução otimizada que apresente um índice de confiabilidade que seja compatível com a necessidade de cada empreendimento.

2. Fundamentos Teóricos

2.1 O modelo mecânico

No presente trabalho, utiliza-se o Método dos Elementos Finitos com a implementação de um elemento linear de pórtico plano considerando as hipóteses de Bernoulli para elementos fletidos. O concreto é representado através do modelo de dano de Mazars (1984), que penaliza a rigidez em função do grau de fissuração do elemento, a partir de uma variável escalar de dano. Para o aço das armaduras é empregado um modelo elastoplástico com encruamento cinemático. A determinação dos esforços nas seções transversais ao longo dos elementos é feita numericamente com a integração de Gauss. O modelo mecânico permite simular estruturas de barras de concreto armado, ou seja, vigas, pilares e pórticos planos, de modo que também é possível a obtenção

de cargas últimas referentes ao estado limite último de ruptura dos materiais para o efeito de dimensionamento.

A carga última da estrutura, aqui considerada, corresponde à carga de violação de estado limite, ou seja, o nível de carregamento que conduz ao esmagamento do concreto (deformação limite de $-3,5\%$) ou alongamento excessivo do aço (deformação limite de 10%). Isto significa que a carga última obtida aqui não corresponde necessariamente à carga de colapso da estrutura.

As funções de estado limite local para o concreto e para o aço ficam definidas como:

$$G_c = \varepsilon_{c_{LIM}} - \varepsilon_c \quad (1)$$

$$G_s = \varepsilon_{s_{LIM}} - \varepsilon_s \quad (2)$$

onde G_c e G_s representam, respectivamente, os estados limite no concreto e no aço, ε_c e ε_s são as deformações no concreto e no aço e ε_{lim} são os valores limites de deformação para o concreto e o aço.

A carga última da estrutura é determinada a partir da Eq. (3), ou seja:

$$P_{ult} = P \left\{ \min \left[\left(G_c^i \leq 0 \right) \text{ ou } \left(G_s^i \leq 0 \right) \right] \right\} \quad (3)$$

Diante disso, verifica-se que a carga última é obtida quando em algum ponto da estrutura a deformação no aço ou no concreto ultrapassa o respectivo valor limite, o que caracteriza um ponto no domínio de falha. Cada realização de carga última é armazenada para a determinação aproximada da função de estado limite global da estrutura no modelo de confiabilidade.

2.2 Confiabilidade estrutural

O principal objetivo na análise de confiabilidade é determinar a probabilidade de ocorrência de uma falha segundo um estado limite, considerando as incertezas das variáveis de projeto. A Eq. (4) define uma função de estado limite ou de desempenho global de uma estrutura qualquer:

$$G(X) = R(X) - S \quad (4)$$

onde X são as variáveis aleatórias que influem no desempenho da estrutura, $G(X)$ é a função de estado limite global, $R(X)$ é a resistência da estrutura e S é a ação atuante sobre a estrutura.

Neste contexto, o Método das Superfícies de Resposta (RSM) pode ser empregado com sucesso. O RSM aproxima a função de estado limite global real do problema através de funções matemáticas específicas. Soares (2001) emprega o RSM na aplicação

da confiabilidade para pórticos planos de concreto armado utilizando polinômios de segundo grau para aproximar as superfícies de falha em torno do ponto de projeto. O autor afirma que os polinômios de segundo grau já são suficientes para a eficiência do método dentro do contexto abordado. Para construir a superfície de falha via RSM, é necessário que haja um conjunto de situações específicas da estrutura, denominadas de planos de experiência. São os planos de experiência que determinam os valores das variáveis aleatórias para que o modelo mecânico possa determinar as respostas estruturais necessárias (cargas últimas) para a construção da superfície de falha da estrutura. A partir desse conjunto de pontos gerado pelos planos de experiência e das respectivas respostas mecânicas, constrói-se a superfície de resposta, calculando-se os coeficientes de seu polinômio aproximador por meio da técnica dos mínimos quadrados. Assim, a superfície fica escrita em função das variáveis de projeto no espaço normalizado e dos coeficientes do polinômio obtidos na regressão.

Uma vez determinada a superfície aproximada de estado limite, obtém-se o índice de confiabilidade, que é uma medida geométrica da probabilidade de falha. Hasofer e Lind (1974) concluem que o índice de confiabilidade é a distância entre a origem do espaço normal padrão e o ponto de projeto P^* situado sobre a função de estado limite

$$\beta = \min \sqrt{\sum_i (u_i)^2} \text{ sujeito a } G(x_i) \leq 0 \quad (5)$$

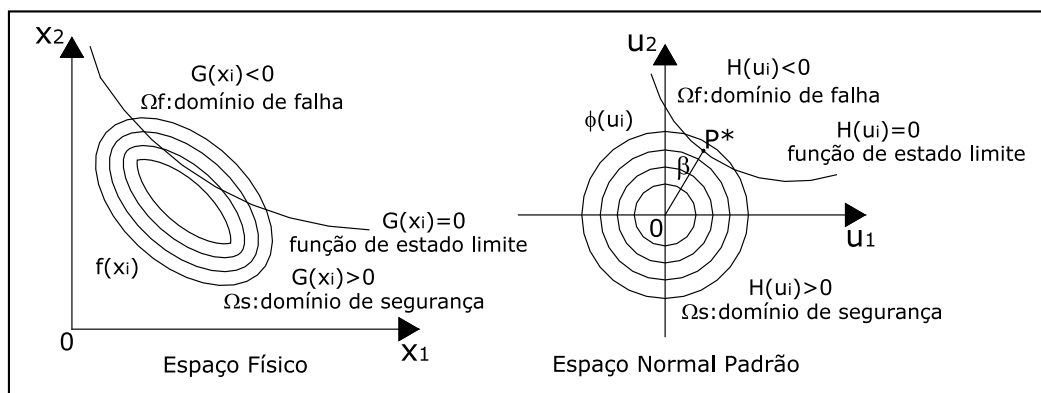


Figura 1: Espaço físico e espaço normal padrão, definição do problema

A Eq. (5) indica que o índice de confiabilidade é obtido a partir da resolução de um problema de otimização restrita. Para a solução desse problema de otimização, um dos algoritmos mais conhecidos no campo da confiabilidade é o algoritmo de Rackwitz and Fiessler (1978). A probabilidade de falha é obtida por uma aproximação em primeira ordem, FORM (*First Order Reliability Method*), que lineariza a função de estado limite no ponto P^* por um hiperplano tangente. Com isso, a probabilidade de falha é determinada por:

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \quad (6)$$

onde $\Phi(\bullet)$ é a função de distribuição normal padrão cumulativa.

2.3 Acoplamento confiabilidade-otimização

Já que o comportamento físico de uma estrutura pode ser escrito em termos de um conjunto de funções matemáticas, técnicas de otimização podem ser empregadas para buscar valores extremos dessas funções.

Atualmente, o interesse da comunidade científica nas áreas de confiabilidade e otimização é muito grande. A segurança estrutural necessita de maior conhecimento por parte dos especialistas já que o avanço dos materiais tem sido notável. Do mesmo modo, os custos envolvidos em projetos também são variáveis decisivas, uma vez que o mundo experimenta aumento de preços de materiais e processos produtivos mais complexos. Assim, a tendência das pesquisas nas áreas de confiabilidade e otimização é procurar alternativas para seu acoplamento (Frangopol 1985; Kaymaz, MacMahon e Meng 1998; Frangopol e Maute 2003; Kharmanda 2003).

O modelo desenvolvido otimiza a seção transversal de um elemento fletido de concreto armado (Fig. 2), a partir da minimização do custo da estrutura, acoplando à formulação uma restrição de confiabilidade. O modelo é dividido em duas etapas: na primeira, a otimização apresenta restrições somente de caráter mecânico; na segunda etapa, a função custo novamente é otimizada, porém sujeita a uma restrição em forma de superfície de confiabilidade. A função-objetivo é o custo aproximado do elemento estrutural, sujeita a restrições de equilíbrio, compatibilidade e construtivas.

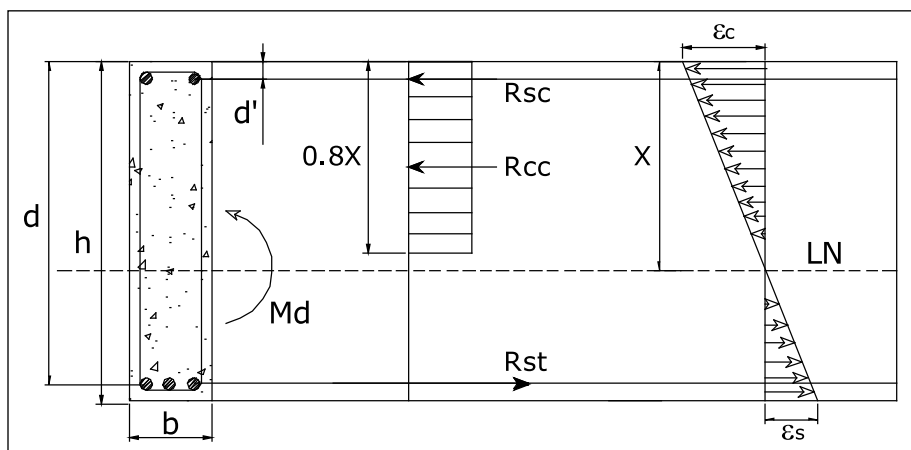


Figura 2: Seção transversal submetida a momento fletor

Minimizar:

$$F(x_1, x_2, x_3) = b \cdot (x_1 + d') \cdot C_c + (b + 2x_1 + 2d') \cdot C_f + (x_2 + x_3) \cdot \gamma_s \cdot C_s \quad (7)$$

Sujeito a:

$$K_1 \cdot x_1 + \sigma_{sc} \cdot x_3 - \sigma_s \cdot x_2 = 0 \quad (8)$$

$$K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2 + \sigma_{sc} \cdot x_3 \cdot (x_1 - d') - M_d = 0 \quad (9)$$

$$\frac{x_2 + x_3}{b \cdot x_1} \leq \%max \quad (10)$$

$$\frac{x_3}{x_2} \leq 0.5 \quad (11)$$

onde $x_1 = d$ (altura útil da seção transversal, cm); $x_2 = A_s$ (armadura tracionada, cm²); $x_3 = A_{sc}$ (armadura comprimida, cm²), b é a largura da seção transversal (cm); d' é a distância da borda mais comprimida até a armadura comprimida (cm); γ_s é o peso específico do aço (kN/cm³); C_c, C_f, C_s são, respectivamente, os custos unitários do concreto (R\$/cm³), da madeira (R\$/cm²) e do aço (R\$/kg); σ_s é a tensão na armadura tracionada (kN/cm²); σ_{sc} é a tensão na armadura comprimida (kN/cm²); M_d é o momento fletor solicitante de cálculo (kN.cm); $\%max$ é a taxa máxima de armadura permitida na seção. Os parâmetros K_1 e K_2 são constantes que reúnem os termos provenientes das equações de equilíbrio e de compatibilidade. São dadas por:

$$K_1 = 0,8 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} \cdot 0,85 \cdot b \cdot \frac{f_{ck}}{1,4} \quad (12)$$

$$K_2 = 1 - 0,4 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} \quad (13)$$

onde ε_c corresponde à deformação na fibra mais comprimida do concreto, ε_s é a deformação na armadura tracionada e f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto. Na primeira etapa, o problema de otimização restringe-se à resolução do sistema de equações gerado a partir do lagrangeano, obtido mediante as Eq. (7) e (11) e suas derivadas em relação às variáveis de projeto (x_1, x_2, x_3). Esta fase do modelo é direta, pois a resolução do sistema de equações é analítica. Após a obtenção do ponto ótimo na primeira etapa, parte-se para a construção da superfície de confiabilidade. Essa superfície é construída de maneira análoga à superfície de estado limite via RSM.

A partir do ponto ótimo obtido na primeira etapa e de variações em torno desse ótimo mediante um plano de experiência, é obtido um conjunto de índices de confiabilidade. Com o conjunto das variáveis de projeto e dos índices de confiabilidade, é feita uma regressão via método dos mínimos quadrados e, com isso, são obtidos os coeficientes da superfície de confiabilidade aproximada. Essa superfície de confiabilidade corresponde a uma restrição para a segunda fase do problema de otimização. Destaca-se que para a segunda etapa, a armadura comprimida é fixada a partir de uma equação de equilíbrio em momentos fletores, sendo colocada na formulação como uma letra c .

Minimizar:

$$F(x_I, x_2) = b \cdot x_I \cdot C_c + (b + 2x_I) \cdot C_f + (x_2 + c) \cdot \gamma_s \cdot C_s \quad (14)$$

Sujeito a:

$$K_I \cdot (x_I - d') + \sigma_{sc} \cdot c - \sigma_s \cdot x_2 = 0 \quad (15)$$

$$\beta_o - (a_o + a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot x_2^2 + a_3 \cdot x_I + a_4 \cdot x_I^2) \leq 0 \quad (16)$$

onde β_o é o índice de confiabilidade requerido para a estrutura e a_i é o i -ésimo coeficiente do polinômio aproximador da superfície de confiabilidade. Vale ressaltar que nesta segunda etapa do modelo, a variável x_I corresponde ao valor da altura total da seção. Esse procedimento foi adotado para que a superfície de confiabilidade fosse determinada em função da altura total da seção, ao invés da altura útil. Na segunda etapa, o processo torna-se iterativo, ou seja, ao se obterem os novos valores das variáveis de projeto, deve-se montar o plano de experiência em torno desses valores e determinar novamente a superfície de confiabilidade até que o índice de confiabilidade obtido em uma iteração seja igual, a menos de uma tolerância, ao índice obtido da iteração sucessiva.

3. Exemplos numéricos

3.1 Viga isostática

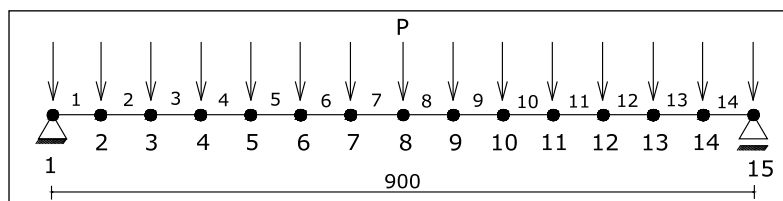


Figura 3: Discretização da estrutura

A Figura 3 ilustra o modelo estrutural discretizado para a viga em análise. Trata-se de uma viga isostática com 9 m de comprimento e seção transversal com largura de 15 cm e altura a determinar. O índice de confiabilidade requerido para esse caso é de 3,8.

São utilizados 6 pontos de Gauss no comprimento dos elementos e 20 pontos de Gauss na altura para a integração numérica. O carregamento é aplicado em cada nó com valor de 5,66 kN.

Tabela 1: Associação estatística das variáveis aleatórias.

Parâmetro	Média (kN/cm ²)	Desvio-padrão (kN/cm ²)	Distribuição
Concreto	2,705	0,55	Normal
Aço	50,00	3,00	Normal

O estado limite último é definido por valores limites de deformação dos materiais, ou seja, 3,5‰ e 10‰ para o concreto e aço, respectivamente.

Tabela 2: Parâmetros usados no modelo de otimização

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
ϵ_c	0,0035	E_s	19600 kN/cm ²
d'	3,0 cm	C_c	R\$ 230,00/m ³
%Max. de armadura	4,0	C_f	R\$ 32,00/m ²
γ_s	0,000075 kN/cm ³	C_s	R\$ 2,80/kg

Tabela 3: Ponto ótimo ao fim da primeira etapa

M_k (kN.cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	A_{sc} (cm ²)	$V_{conc.}$ (m ³)	Custo (R\$/m)	Custo _{TOT.} (R\$)	Função-objetivo	β
8860,0	44,93	8,77	1,03	0,60655	69,65	626,85	0,696507	3,783

Tabela 4: Ponto ótimo ao fim da segunda etapa

M_k (kN.cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	A_{sc} (cm ²)	$V_{conc.}$ (m ³)	Custo (R\$/m)	Custo _{TOT.} (R\$)	Função-objetivo	β
8860,0	45,13	8,81	1,03	0,60912	69,99	629,91	0,699103	3,802

Assim, a configuração final da estrutura satisfaz aos requisitos requeridos de segurança para o estado limite último. Para a convergência do processo, neste caso, foi necessária somente uma iteração do modelo, pois se trata de uma viga isostática. Para verificar o comportamento da estrutura dimensionada, foi realizada uma análise mecânica em regime não-linear. A carga de 5,66 kN/nó foi aplicada em 25 incrementos iguais. A Figura 4 indica que as deformações nos materiais, para o carregamento aplicado, ficaram abaixo dos limites especificados tanto para o concreto quanto para o aço. Isto significa que a carga de serviço é inferior à capacidade resistente da viga, refletindo a condição de segurança desejada no projeto. O índice de confiabilidade do projeto ótimo foi de 3,802, equivalente a uma probabilidade de falha da ordem de $7,081E^{-5}$.

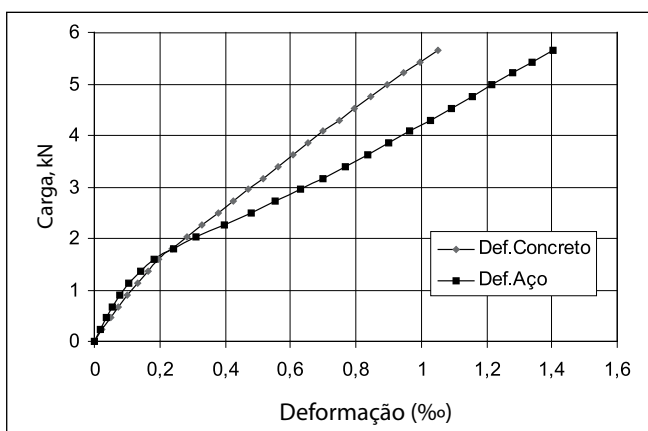


Figura 4: Evolução das deformações nos materiais na seção mais solicitada

1.1 Viga hiperestática

A estrutura foi discretizada em 16 elementos finitos e submetida a duas cargas concentradas de 50 kN nos pontos indicados na Figura 5.

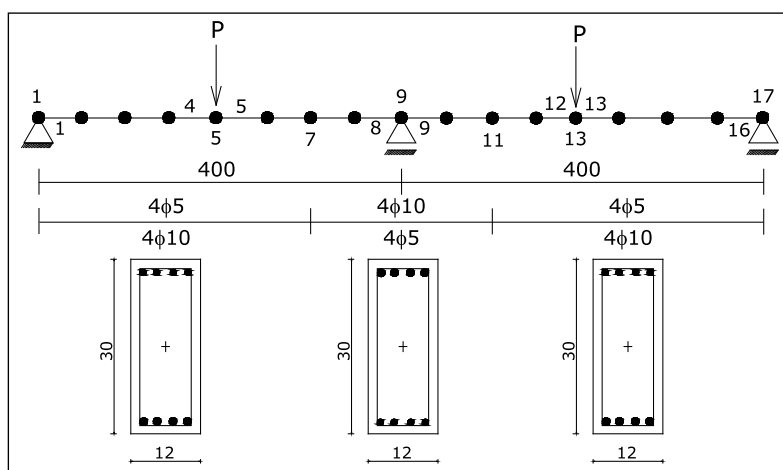


Figura 5: Discretização da estrutura

Para o modelo de otimização, adotou-se um concreto com $f_{CK} = 23\text{MPa}$, o que corresponde a uma resistência média à compressão de 30 MPa e desvio-padrão de 4,2 MPa. As armaduras foram simuladas com CA-50 e módulo de elasticidade longitudinal 210000 MPa. A associação estatística para o aço foi feita considerando resistência média de 500 MPa e desvio-padrão de 30 MPa. Tanto o concreto quanto o aço foram adotados respeitando a distribuição normal de probabilidades. Os valores dos custos unitários dos materiais, bem como taxa máxima de armadura são exatamente os mesmos do

exemplo anterior. O índice de confiabilidade requerido aqui é de 3,9. A Tabela 5 mostra o desempenho do modelo aplicado à viga hiperestática. Observa-se que não houve a convergência logo na primeira iteração do método como ocorreu para a estrutura isostática do exemplo anterior. Isto se deve ao processo de absorção de esforços que ocorre na estrutura hiperestática. Assim, nas estruturas hiperestáticas existe uma capacidade maior de absorção de esforços por conta das possíveis redistribuições de momentos fletores, que ocorrem dos engastes para os vãos adjacentes.

Tabela 5: Dimensões ótimas da viga hiperestática e respectivos índices de confiabilidade

Engaste (nó 9)			Vão (nó 5 e 13)		
Iteração	h (cm)	A_s (cm ²)	h (cm)	A_s (cm ²)	β
1	32,11	5,78	32,11	3,92	7,102
2	25,45	6,44	25,45	5,78	5,096
3	23,64	6,00	23,64	6,19	4,278
4	23,06	5,86	23,06	6,34	3,908

Na primeira iteração, o índice de confiabilidade resultou num valor elevado, indicando um alto nível de segurança para a estrutura. Este fato é justificável, uma vez que a armadura foi a principal responsável pela falha na estrutura. Assim, como o aço é um material produzido com elevado controle de qualidade, seu coeficiente de variação é baixo comparado com o concreto. Com isso, as cargas últimas da estrutura apresentaram baixo nível de dispersão, melhorando a confiabilidade da estrutura. Já na última iteração, o comportamento geral da viga foi diferente. Para que o índice de confiabilidade se aproximasse do valor requerido, foi necessário diminuir a altura da seção transversal e, ao mesmo tempo, aumentar pouco a área de armadura na seção do engaste. Esta atitude fez com que as deformações na armadura da seção do engaste resultassem maiores do que as mesmas deformações para a estrutura da primeira iteração. Dessa forma, a perda de capacidade resistente na seção do engaste deu-se mais rapidamente transferindo os esforços para as seções dos vãos adjacentes, que, por sua vez, possuíam armadura suficiente. Diante desse cenário, o concreto passou a representar papel fundamental na resistência da estrutura. Com isso, o índice de confiabilidade diminuiu, já que o concreto apresenta maior dispersão em suas propriedades do que o próprio aço. É interessante destacar que o modelo de confiabilidade é avaliado considerando somente o primeiro modo de falha. Significa que o primeiro modo de falha ocorrerá justamente na seção de maior esforço. Portanto, em estruturas hiperestáticas, para que o índice de confiabilidade diminua, é preciso que nessas seções a capacidade resistente também diminua.

Tabela 6: Ponto de projeto e sensibilidades das soluções ótimas

Iteração	β	u_c^*	u_s^*	α_c	α_s	P_f
1	7,102	-1,257	-6,991	0,176	0,984	9,298 e ⁻¹³
4	3,908	-3,866	-0,571	0,989	0,145	4,711 e ⁻⁵

Para a verificação do comportamento estrutural da viga mediante os resultados da primeira e quarta iteração, foi realizada uma análise mecânica não-linear com o objetivo de avaliar as deformações dos materiais. O carregamento de 50 kN foi aplicado em 20 passos de carga com o registro das deformações dos materiais na seção do engaste (nó 9) e na seção do vão (nó 5). A legenda utilizada na Figura 6 possui o seguinte significado: C (concreto); A (aço); v (vão); e (engaste); iter1 (iteração 1) e iter4 (iteração 4). As deformações máximas dos materiais nas seções do engaste e do vão da estrutura refletem o comportamento global da viga mediante o carregamento de serviço.

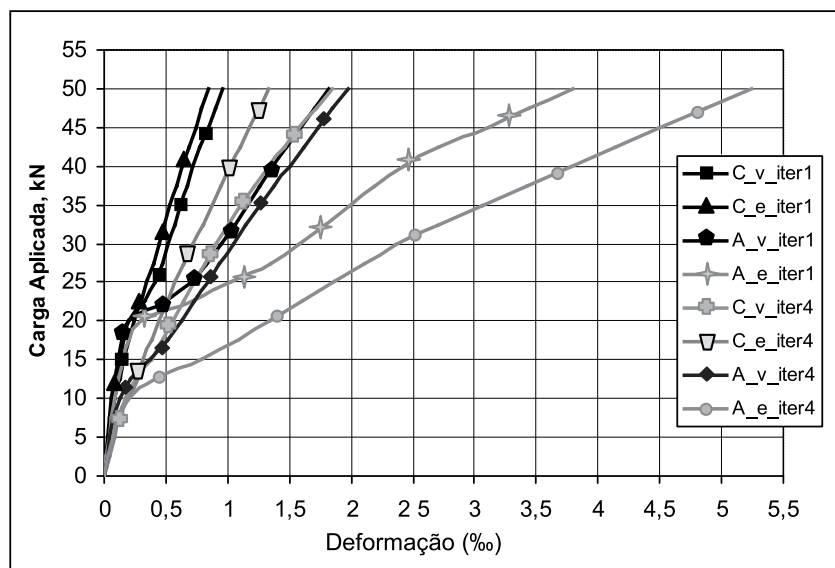


Figura 6: Deformações nos materiais nas seções do engaste e do vão da estrutura

4. Conclusões

O modelo de confiabilidade acoplado à otimização, apesar de simples, pois considera apenas o estado limite último de resistência à flexão simples, conduziu a resultados bastante satisfatórios do ponto de vista de dimensionamento de vigas de concreto armado. É possível nesse tipo de abordagem ativar ou desativar a restrição de confiabilidade, de modo a obter o índice de confiabilidade requerido ou um valor maior que o requerido. O modelo mostrou-se compatível com a natureza da estrutura, adequando-se ao mecanismo de absorção de esforços internos de acordo com a capacidade das seções. Verificou-se que na viga hiperestática, após a otimização fixando a confiabilidade, ocorreu uma mudança total dos cenários de falha, uma vez que as seções foram modificadas para atender a confiabilidade requerida. Tal fato produziu grandes alterações nos processos de transmissão de esforços. Diante disso, em estruturas otimizadas, pode haver a total mudança de mecanismos de falha convencionais em relação às estruturas simplesmente dimensionadas. Ressalta-se que não foram consideradas restrições em

deslocamentos referentes ao estado limite de serviço, assim como em força cortante no estado limite último. Para que o modelo possa ser empregado na prática do dimensionamento de vigas em concreto armado, torna-se necessária a incorporação desses estados limites no processo de otimização, que, neste caso, apresentaria mais uma restrição em confiabilidade para cada novo estado limite.

Referências

- Associação Brasileira de Normas Técnicas (2003). *Projeto de estruturas de concreto - Procedimento*. NBR 6118. Rio de Janeiro.
- Mohamed, A. (1996). RYFES Theoretical manual version 1.0. LaRAMA – *Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée*. Clermont Ferrant, France.
- Mazars, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6, Paris.
- Soares, R.C. (2001). *Um estudo sobre modelos mecânico-probabilísticos para pórticos de concreto armado*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Hasofer, A.M. and Lind, N.C. (1974). Exact and invariant second moment code format. *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, v.100, n. EM1, p.111-121.
- Rackwitz, R and Fiessler, B. (1978). Structural reliability under combined random load sequences. *Computer and Structures*, v.9, p.489-494.
- Frangopol, D.M. (1985). Sensitivity of reliability-based optimum design. *J. Struct. Eng. ASCE*, v.111, n. 8, p. 1703-1721.
- Kaymaz, I.; McMahon, C. and Meng, X. (1998). Reliability based structural optimization using the response surface method and Monte Carlo simulation. In: *8th International Machine Design and Production Conference*, Ankara, Turkey.
- Frangopol, D.M. and Maute, K. (2003). Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures. *Computers & Structures*, v.81, p. 397-410.
- Kharmanda, M.G. (2003). *Optimization et CAO des structures fiables*. European Ph.D. Thesis, Ecole Doctorale Sciences pour L'Ingenieur de Clermont Ferrant, Université Blaise Pascal – Clermont II.

Optimum reinforced concrete beam design based on reliability index constraints

Abstract

A reliability based optimization model for reinforced concrete beam design is presented in this work. The objective function to be minimized is given by a simplified reinforced concrete element cost model. The constraints adopted for the optimization process is given by the equilibrium and compatibility equations of the cross section, and the reliability index recommended by the ultimate limit state regarding the rupture of the materials. Second order approximation functions in the random variable space obtained by using the least square method are considered to approach locally the limit state surface. Linear functions are considered for the optimization problem, while the approximations of the reliability index surface, required to couple the two problems, are given by using quadratic functions.

Key words: structural reliability, optimization, reinforced concrete, finite elements.

1. Introduction

The aim of any structural design is to find the most economical structure that preserves an acceptable degree of safety. During the structure lifetime the amount of resources (R) measured in terms of resistances must be larger than the requirements (S) due to actions within a defined probability.

In this paper, the reliability concepts are employed to find the required dimension of a reinforced concrete beam. The solution of this problem is not unique; there will be many acceptable solutions, since some random variable will be assumed free, i.e. assumed as degrees of freedom. We may try to improve the solution by minimizing the global cost of producing the reinforced concrete element. Of course, there are many production and operating costs that can be taken into account to find the objective function to be minimized. For simplicity but without losing the generality we are considering only the costs related to the required material to build up the structural component.

2. Fundamentals

In this work, a non-linear finite element formulation is used to compute internal forces and displacement along the reinforced concrete beam. The Mazars' damage me-

chanics model is adopted to govern the concrete behaviour, while the reinforcement behaviour is given by a simple one-dimension elasto-plastic model with kinematic hardening. The stiffness matrix is obtained by integrating numerically the virtual work principle equation written in terms of stresses. A Gauss' scheme with stations distributed along the beam axis and across the beam cross-section is employed to compute the stiffness coefficients already reduced according to the developed damage. The implemented model is able to analyse beams, columns and two-dimensional frames and to find the limit load within a given tolerance, according the CEB or the Brazilian code of practice ultimate limit states. We have used therefore conventional strain limits for concrete and steel, $\varepsilon_{c_{LIM}}$ and $\varepsilon_{s_{LIM}}$. To consider the strain limits the following limit state function are defined: $G_c = \varepsilon_{c_{LIM}} - \varepsilon_c$ and $G_s = \varepsilon_{s_{LIM}} - \varepsilon_s$, in which, ε_c and ε_s are the actual strains at the Gauss points and t the steel bar positions. Thus, one may build up the ultimate load given by Eq. (3).

3. Reliability based optimization model

In this work the reliability model has been combined with a simple optimization scheme to reduce the amount of costs given by the required material: steel, concrete and wood casting forms. In fact, the reliability index for the structure is specified and the optimization is carried out on basis of reliability index constraint.

The optimization is applied to the reinforced concrete beam element. Initially the optimization process is applied without specifying any reliability index; then, a reliability index surface can be constructed to be taken into account as an additional optimization process constraint. Thus, the objective function is the structural element material cost subjected to equilibrium, compatibility, particular size specification and also the reliability index constraint.

Figure 2 given in the full text of this paper resumes the main variables of the beam element cross-section and also the simplifications assumed for this analysis.

The function to be minimized is given by Equation 14. The adopted constraints are given in Equations (8), (9), (10) and (11).

In the first step the optimization solution in terms of (x_p, x_g, x_s) is analytically obtained; therefore one has the first prediction to start the reliability based optimization process. Then, a reliability index can be built using a second degree polynomial. To obtain this approximation several sets of design variables around the optimum point is taken and the polynomial is found by applying the least square method.

For the second phase, the objective function is the same. However, for the optimization process we have to add the constraint given by Equation (16), where β_o is the reliability index limit specified for the analysis, and the second term of the above expression is the assumed approximation.

For the second step the procedure is iterative. The reliability surface has to be rebuilt at each iteration around the new optimum point.

3. Conclusions

The proposed reliability-based optimization model leads to quite satisfactory results for the analyzed reinforced concrete beam design. In this approach, switching on or off the reliability constraint is possible to reach the specified reliability index. The model has been shown to be appropriate with the nature of the reinforced concrete structure analysis. The application of the reliability-based optimization to the continuous beam has shown a total change of the failure modes; along the process, the sections were modified according to the required reliability target. This led to great modifications in the internal forces redistribution mechanism. Therefore, for an optimized structure, a complete change of conventional failure mechanisms regarding the conventional design procedure can be observed.