

Análise de vigas mistas em concreto e em madeira

Nilson T. Mascia¹, Nádia C. S. Forti², Julio Soriano³, Elias A. Nicolas⁴

Trabalho recebido em 06/06/2007 e aprovado para publicação em 04/10/2007.

Resumo

Estruturas mistas, constituídas pela associação de materiais com diferentes propriedades mecânicas, apresentam-se como uma solução alternativa para estruturas convencionais utilizadas na construção civil. Esses arranjos estruturais buscam obter redução de custos de construção, mantendo também a segurança estrutural com desempenhos arquitetônico e ambiental vantajosos. A integração de uma estrutura mista deve-se, em geral, à eficiência do sistema de ligação, podendo ser do tipo rígido ou flexível. Esse sistema é responsável por transmitir a força de cisalhamento longitudinal na interface dos dois materiais ao longo do comprimento da viga e, também, impedir o desprendimento vertical dos mesmos. Este estudo contribui para a análise do comportamento mecânico de vigas mistas em concreto e em madeira, enfatizando-se a determinação de deslocamentos verticais de três maneiras: via resolução analítica das equações de equilíbrio, via programa de elementos finitos bidimensionais e via a equação do princípio dos trabalhos virtuais. A última abordagem foi concebida em pesquisas de teoria das estruturas, expandindo seus conceitos para vigas mistas. A formulação proposta mostrou-se consistente e seus resultados são condizentes com dados experimentais.

Palavras-chave: Estruturas mistas. Vigas de seção composta de concreto e madeira. Princípio dos trabalhos virtuais. Análise numérica e experimental.

¹ Prof. Associado - Unicap - Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. E-mail: nilson@fec.unicamp.br

² Doutoranda - Unicap - Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. E-mail: nadiacazarm@yahoo.com.br

³ Professor Doutor - Unicap - Faculdade de Engenharia Agrícola. E-mail: julio.soriano@feagri.unicamp.br

⁴ Eng. Doutor - Unicap - Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. E-mail: eli_nicolas@yahoo.com.br

1 Introdução

O desenvolvimento tecnológico de projetos em estruturas de madeira permitiu melhorar o conhecimento das propriedades mecânicas do material e dos sistemas de conexões nessas estruturas. Por sua vez, as estruturas em concreto são de prática corrente tendo em vista ser o concreto um material com suas propriedades físico-mecânicas bem definidas. Por outro lado, a utilização da madeira com concreto em estruturas mistas ainda não é ampla, mas vem se tornando freqüente na construção civil.

Essas estruturas mistas, constituídas por materiais de diferentes propriedades mecânicas associados, podem ser colocadas como uma solução alternativa às estruturas de uso corrente na construção civil. Essa solução busca obter redução de custos de construção mantendo-se também a segurança estrutural com um desempenho arquitetônico e ambiental vantajoso.

A integração de uma estrutura mista deve-se, em linhas gerais, à eficiência do sistema de ligação, podendo ser essa ligação rígida ou flexível. Esse sistema transmite a força de cisalhamento longitudinal na interface dos dois materiais combinados ao longo do comprimento da viga e impede o seu desprendimento vertical.

Nesse contexto, esse estudo visa analisar o comportamento mecânico de vigas mistas de concreto e de madeira atendo-se a deslocamentos verticais considerando-se: a resolução analítica das equações de equilíbrio, o método dos elementos finitos bidimensionais e a equação do princípio dos trabalhos virtuais (PTV). A última análise, PTV, foi concebida a partir de pesquisas de teoria das estruturas, com aplicação de conceitos em vigas mistas. Essa formulação satisfaz às equações de equilíbrio, mostrando-se consistente, e seus resultados são condizentes com dados experimentais. Observa-se também que essa formulação pode ser integrada a códigos de elementos finitos, requerendo apenas elementos unidimensionais.

2 Modelos para análise de vigas mistas

Os modelos matemáticos para a representação do comportamento de estruturas mistas em geral propostos na literatura, apresentados por Ahmadi and Saka (1993), Girhammar and Gopu (1993), são abordados com base no princípio de equações de equilíbrio e no princípio da conservação da energia. Tendo em vista a complexidade que envolve o comportamento das estruturas com seções mistas, algumas simplificações serão assumidas e comentadas a seguir com vistas a uma abordagem geral dos resultados.

2.1 Modelo de Stevanovic para cálculo de estruturas mistas em concreto-madeira com base no princípio de equações de equilíbrio

Stevanovic (1996) utilizou a teoria da elasticidade para a determinação dos esforços em vigas mistas em concreto-madeira, seguindo as concepções básicas: a madeira e concreto são considerados materiais elásticos isotrópicos na direção axial, sendo

válida a lei de Hooke; a hipótese de Bernoulli-Navier é válida, isto é, seções planas permanecem planas e perpendiculares ao eixo da seção após deformação; a madeira e o concreto apresentam deslocamentos verticais iguais em todos os pontos de conexões; os conectores são discretos, porém considerados como conexões equivalentes contínuas com constante elástica.

O deslizamento entre os materiais é representado pela razão entre a tensão de cisalhamento na superfície da ligação T_s e o módulo de deslizamento K , parâmetro obtido em testes de laboratório.

Das condições de equilíbrio e das condições de compatibilidade na interface de ligação entre a madeira e o concreto, conforme a Figura 1 e a Figura 2 (onde o índice c indica concreto e o w madeira), e considerando o deslocamento w para a viga mista de concreto e madeira, resulta a seguinte equação diferencial de quarta ordem:

$$w^{iv} - \alpha^2 w'' = \frac{\alpha^2 M_x}{EI_\infty} - \frac{M_x''}{EI_0} \quad (1)$$

$$\text{com: } \alpha^2 = K \left(\frac{I}{A_b E_b} + \frac{I}{A_d E_d} + \frac{r^2}{EI_0} \right), \beta = \frac{Kr}{EI_0}; EI_\infty = \frac{EI_0}{\alpha^2 - \beta r} \quad EI_0 = E_b I_b + E_d I_d,$$

onde: $E_b I_b$ e $E_d I_d$ são as rigidezes de flexão das seções de concreto e de madeira, respectivamente; EI_∞ representa rigidez de flexão para a composição total e EI_0 representa a rigidez de uma seção não composta; E representa o módulo de elasticidade e I , a inércia. Os esforços internos são escritos por N , T e M (sua segunda derivada M''), indicando a normal, a cortante e o momento fletor, respectivamente. R é a reação de apoio e r distância entre os centros de gravidade da mesa e da alma.

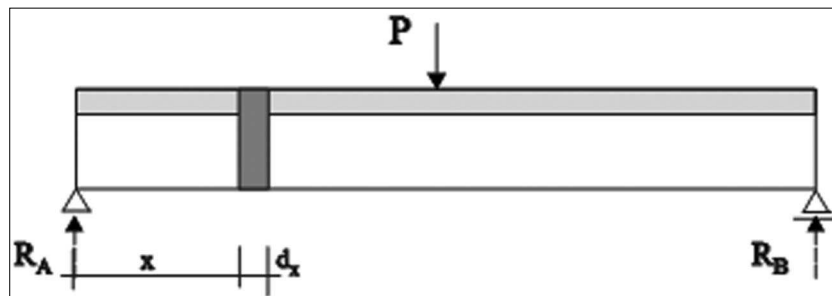


Figura 1: Esquema estático da estrutura mista

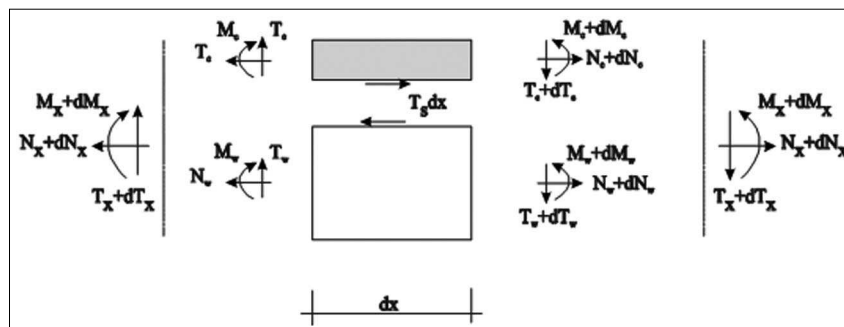


Figura 2: Representação dos esforços internos no concreto e na madeira

Nesse sentido, neste método busca-se a solução geral da Eq. (1), que é escrita por:

$$w = a_1 \sinh(\alpha x) + a_2 \cosh(\alpha x) + a_3 + a_4 + w_p \quad (2)$$

onde: a_1 até a_4 são constantes que dependem das condições de contorno (condições de apoio) e w_p é solução particular que depende do carregamento externo.

2.2 Modelos numéricos de viga compostas

2.2.1 Método de elementos finitos

O método de elementos finitos é uma técnica de resolução aproximada de problemas de valor de contorno. O método envolve o particionamento do domínio num número finito de elementos (os elementos finitos) e, usando conceitos variacionais, envolve a construção de uma aproximação da solução sobre esses elementos.

Uma análise de elementos finitos é, em geral, constituída dos seguintes passos:

- construção de uma formulação variacional para o problema. Em elasticidade, a minimização do funcional de energia de deformação conduz à formulação variacional – o que equivale à formulação do princípio dos trabalhos virtuais;
- definição da geometria do problema, seu domínio e condições de contorno;
- escolha do espaço de aproximação: definição das funções, se polinomiais ou trigonométricas, e sua ordem de interpolação; aplicação do método de Galerkin para o espaço de funções adotado;
- resolução do sistema algébrico $[R] \{u\} = \{F\}$, em que $[R]$ é a matriz de rigidez da estrutura, F é o vetor de força e u é o vetor multiplicador das funções adotadas;
- análise dos resultados.

2.2.2 Modelagem via programa SAP2000

Soriano (2001) e Mascia and Soriano (2004) apresentam uma simulação computacional de uma viga mista em concreto e madeira por meio de um programa de elementos finitos, SAP 2000 (Computers & Structures Inc. 2000). Em razão das características

e dimensões das vigas e painéis ensaiados, optou-se por utilizar elementos de cascas para representar as peças de concreto e de madeira. As malhas de elementos para as mesas em concreto foram definidas nos planos horizontais contidos a meia espessura da mesa, e a espessura atribuída a cada elemento é a espessura real da peça.

As peças de madeira foram modeladas por uma malha no plano vertical da viga, cuja espessura corresponde à da peça de madeira. Com base na área do elemento finito e na sua espessura, o programa considera automaticamente o peso próprio da estrutura.

Os conectores metálicos foram representados por elementos lineares com os respectivos diâmetros dos pregos e parafusos utilizados nas estruturas. Desse modo, o sistema de conexão mantém-se discreto e os espaçamentos são as distâncias reais utilizadas. Os nós do elemento linear unem a face superior da viga de madeira à mesa de concreto.

Para assegurar uma das hipóteses básicas da estrutura mista, os dois nós de uma única barra são restringidos de modo a apresentarem o mesmo deslocamento na direção vertical.

O efeito de não-linearidade do material não é considerado no programa utilizado para a modelagem. Dessa simplificação são efetivamente esperadas diferenças entre os resultados de ensaios e os obtidos da modelagem, como ocorre, por exemplo, com o concreto, que para um determinado nível de tensão passa a comportar-se em regime plástico.

Para validação dos resultados dessa modelagem foram realizadas diversas simulações, como, por exemplo, supor que os conectores representassem um sistema de ligação perfeita com rigidez infinita. Outra simulação foi a da inexistência do sistema de conexão, ou seja, a mesa de concreto estaria sobreposta na madeira e livre para deslizar sobre a peça de madeira.

As seções definidas para a análise dos estados de tensão e deformação em cada estrutura foram localizadas nas seções posicionadas a um terço dos apoios, de forma a evitar a região central das estruturas, onde certamente existem os efeitos da força concentrada. A força concentrada foi considerada como força distribuída equivalente nos elementos da laje próximos à região central da viga. Dessa maneira, foi possível simular a real aplicação da força em laboratório através de uma chapa de aço.

2.2.2.1 Modelo implementado no programa SAP 2000

Os dados utilizados para a elaboração do modelo de viga mista em concreto-madeira implementados no programa SAP 2000 são os descritos na Tab. 1. Soriano (2001) utilizou duas vigas e seus resultados serão comparados com o resultado desse programa, com $K = 15464 \text{ N/mm}$, módulo de deslizamento. Para avaliar o valor de K foi adotado um modelo de corpo-de-prova que consistiu de um elemento central de concreto unido por meio de conectores metálicos a dois elementos de madeira, submetido à compressão e cisalhamento nos conectores. A espécie de madeira utilizada foi a Cupiúba (*Goupia glabra*).

Tabela 1: Propriedades dos componentes da viga mista

Propriedades	Concreto	Madeira
Seção (mm ²)	12000	7500
Inércia (mm ⁴)	1,6x10 ⁶	14,063x10 ⁶
E (N/mm ²)	19300	14700
$f_{ck,médio}$ (MPa)	22	57,47

Os conectores, parafusos de 3/8" (0,95 mm), foram simulados através de elementos de viga, unindo a seção de concreto à de madeira em alguns pontos. Entretanto, buscou-se um comportamento contínuo da conexão. Para isso a rigidez dos elementos de viga foi escolhida de modo a simular a mesma rigidez do módulo de deslizamento obtido em laboratório.

Para efeito de cálculo, considerou-se uma carga uniformemente distribuída, que corresponde ao peso próprio da viga $q = 0,36$ N/mm, e uma força concentrada P_k , aplicada no meio do vão. A Figura 3 e a Figura 4 exibem detalhes das vigas utilizadas por Soriano (2001).

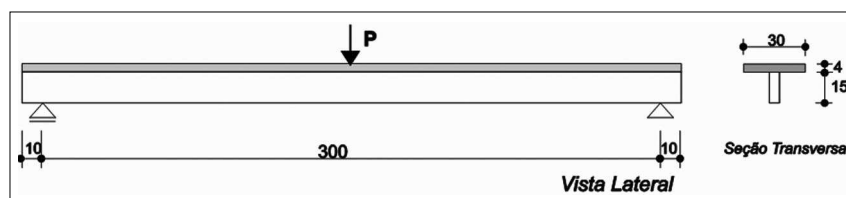


Figura 3: Dimensões da viga mista (cm)

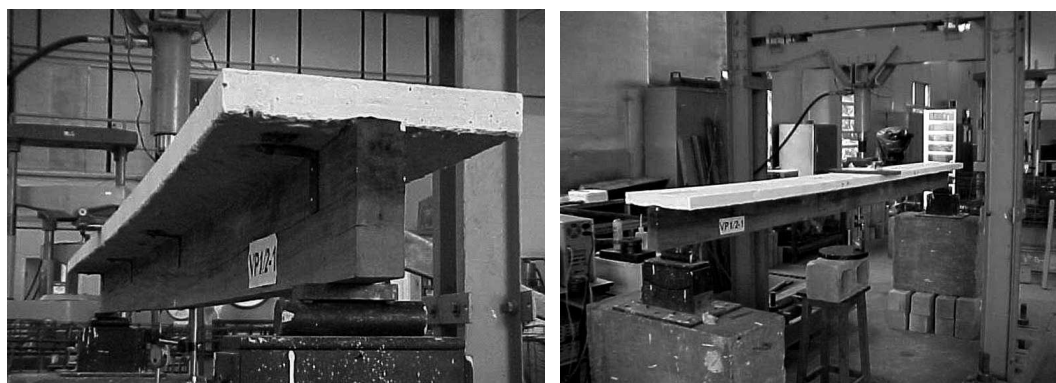


Figura 4: Detalhes da viga mista

A Figura 5, a seguir, apresenta a malha utilizada para o cálculo dos deslocamentos da viga mista. Os elementos finitos adotados para a confecção da malha foram as projeções da viga no plano vertical, para que os esforços T_s (deslizamento) entre a mesa e a alma (conforme a Fig. 2), fossem excêntricos ao centro de gravidade da seção peça, ou seja, simulando a real condição de ensaio da viga mista.

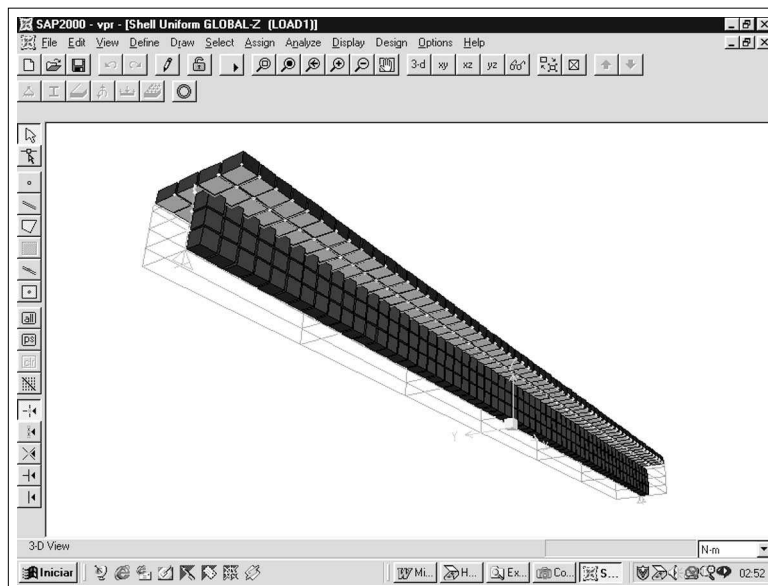


Figura 5: Malha utilizada para caracterizar a viga mista no SAP 2000

2.3 Princípios dos trabalhos virtuais (PTV)

O princípio dos trabalhos virtuais é uma poderosa técnica para a resolução de diversos problemas na engenharia, principalmente na mecânica dos sólidos.

A equação do princípio dos trabalhos virtuais para um estado de forças em equilíbrio e um estado independente de deslocamentos compatíveis com as vinculações da estrutura é escrita por:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_A T_i \delta u_i dA + \int_V F_i \delta u_i dV \quad (3)$$

onde: σ_{ij} são as tensões da estrutura, $\delta \epsilon_{ij}$ são deformações compatíveis com os deslocamentos virtuais δu_i , T_i são forças de superfície em A (área) e F_i , forças de corpo em V (volume).

O lado esquerdo da Eq. (3) representa o trabalho virtual das forças internas (TV_{int}) e o lado direito, o trabalho virtual das forças externas (TV_{ext}).

2.3.1 Aplicação do PTV em Vigas Mistas

Duas teorias para análise de vigas muito conhecidas são a teoria de viga de Euler-Bernoulli e a teoria de viga de Timoshenko, Saada (1974). A diferença entre as duas reside no fato de a teoria de Euler-Bernoulli não considerar a energia de deformação da força cortante, ao passo que a teoria de Timoshenko faz uso da deformação por cortante

para o cálculo dos deslocamentos. Neste trabalho serão tratadas vigas segundo a teoria de Euler-Bernoulli em duas dimensões.

2.3.1.1 Teoria de Euler-Bernoulli

Na teoria de Euler-Bernoulli admite-se que as seções transversais normais ao eixo da viga antes da deformação permanecem planas e ortogonais a esta após a deformação.

O vetor deslocamento u pode ser expresso por:

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (4)$$

com: $u_x = u - \theta y$; $u_y = v$; $\theta = \frac{dv}{dx}$, onde u_x e u_y são deslocamentos nas direções do eixo da viga x e perpendicular ao esse eixo y e θ é o giro da seção transversal.

O tensor de deformações infinitesimais é definido como:

$$\nabla u = \begin{bmatrix} u' - yv'' & v' \\ v' & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{Com: } \varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) = \begin{bmatrix} u' - yv'' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e: } \varepsilon = [\varepsilon_x] = [u' - yv''].$$

O tensor de tensões é escrito por: $\sigma = [\sigma_x] = [E\varepsilon_x]$.

Observa-se que é considerada a hipótese de isotropia tanto para o concreto como para madeira, especificamente na direção do eixo da viga. Os esforços solicitantes num elemento de barra são forças normais, cortantes e momento fletor, ou seja:

$$N = \int_A \sigma_x dA = EAu'; V = \int_A \tau_{xy} dA = 0; M = \int_A y\sigma_x dA = -EIv''.$$

2.3.1.2 Aplicação do princípio dos trabalhos virtuais

O trabalho virtual dos esforços internos de uma barra é igual ao trabalho virtual das ações e, com base na Eq. (3), pode ser escrito como:

$$TV_{int} = TV_{ext} \Rightarrow \int_0^L (EA\delta u' u' + EI\delta v'' v'') ds = \int_0^L q_i \delta u_i ds + P_i \delta u_i \quad (6)$$

A Eq. (6) considera ações de força vertical concentrada e distribuída sobre a viga. A generalização para momentos e forças horizontais pode ser encontrada em Forti (2004) e em Mascia, Forti and Soriano (2006).

2.3.1.3 Formulação da viga mista

A abordagem escolhida para a formulação de uma estrutura mista é a do princípio dos trabalhos virtuais. A viga mista será considerada como duas vigas independentes (uma de concreto e outra em madeira) conectadas. A energia de deformação da estrutura será dada como a soma das energias de deformação das duas vigas com a energia de deformação dos conectores; por isso, o trabalho virtual das forças internas do conjunto será a soma dos três trabalhos virtuais internos individuais. Assim temos que:

$$TV_{int}^C + TV_{int}^W + TV_{int}^S = TV_{ext} \quad (7)$$

onde: S , W e C indicam: conector, madeira e concreto.

Observa-se que as parcelas dos materiais, de comportamentos diferentes, da viga mista estão presentes na Eq. (7).

2.3.1.4 Trabalho virtual das forças internas dos conectores

A conexão entre as duas vigas (concreto e madeira) será tratada como contínua e sua relação tensão *versus* deslizamento, como sendo linear.

Como hipótese assume-se que os deslocamentos verticais das duas vigas são iguais e, por consequência, suas derivadas também o são. Como a abordagem segue a de vigas de Euler-Bernoulli, a derivada do deslocamento vertical é igual ao giro da seção transversal, e as duas vigas têm o mesmo giro.

A tensão de cisalhamento dos conectores é dada por:

$$T_s = K\Delta u \quad (8)$$

onde: K é o coeficiente de deslizamento, Δu é o deslocamento relativo entre a fibra inferior da viga de concreto e a fibra superior da viga de madeira. Na Figura 6 tem-se que u_{cince} e u_{winter} são os deslocamentos totais na face de contato entre as partes de concreto e de madeira.

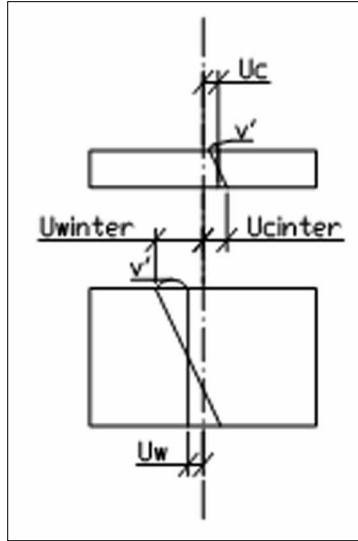


Figura 6: Cinemática de uma viga mista

Da Figura 6 tem-se que:

$$\Delta u = u_c - u_w + v' r \quad (9)$$

com: $r = \left(\frac{h_c + h_w}{2}\right)$, onde os h são as alturas das partes de madeira e de concreto. Assim, o trabalho virtual interno do conector vale de acordo com Forti (2004):

$$\mathcal{T}_{int}^S = \int_0^L T_s \delta u ds = \int_0^L K \Delta u \delta u ds \quad (10)$$

2.4 Método de Rayleigh - Ritz.

O método de Rayleigh - Ritz é uma técnica de resolução aproximada de formulações variacionais, como a do PTV. A solução é aproximada é dada por:

$$sol(x) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \alpha_i^v \varphi 1_i(x) \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i^{u^c} \varphi 2_i(x) \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i^{u^w} \varphi 3_i(x) \end{array} \right\} \quad (11)$$

Os índices v , u^c e u^w representam as variáveis do problema: deslocamento vertical; deslocamento horizontal da fibra média da viga de concreto; deslocamento horizontal da fibra média da viga de madeira e $\varphi 1(x)$, $\varphi 2(x)$ e $\varphi 3(x)$ são as funções aproximantes, podendo ser iguais ou não.

As funções $\varphi(x)$ devem possuir algumas propriedades, de modo a garantir a boa qualidade da aproximação. A primeira propriedade diz respeito à regularidade das funções $\varphi(x)$. Para a aproximação dos deslocamentos horizontais, as funções $\varphi(x)$ devem ser contínuas em todo o domínio; já para a aproximação dos deslocamentos verticais, é necessário que as funções e suas primeiras derivadas sejam contínuas. A restrição da derivada é necessária para garantir que o giro (derivada do deslocamento vertical) seja contínuo em todo o domínio.

Além da restrição de regularidade, é necessário que as funções $\varphi(x)$ satisfaçam às condições de contorno da estrutura, respeitando-se seus vínculos. As condições de contorno impostas nas simulações foram: deslocamentos verticais nulos nos apoios; deslocamento horizontal nulo no meio da estrutura. Devido à simetria da estrutura simulada e da simetria de carregamento, optou-se por impor o deslocamento horizontal nulo no meio das vigas.

Com a imposição dessas condições de contorno, evita-se qualquer tipo de movimento de corpo rígido, o que tornaria a matriz de rigidez singular e dificultaria a resolução do sistema algébrico.

Uma vez escolhidas as funções $\varphi(x)$, substituem-se as funções u_c , u_w e v por:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x) \quad (12)$$

e as funções δu_c , δu_w e δv por $\varphi(x)$.

Fazendo a substituição das variáveis do problema pelas funções tentativas $\varphi(x)$, o sistema de equações advindo do PTV pode ser escrito em formato matricial como:

$$[R]\{\alpha\} = \{F\} \quad (13)$$

em que R é chamada matriz de rigidez; α , a solução do sistema linear e F , o vetor de força.

Observa-se que a matriz de rigidez pode ser dividida em três termos: da viga de concreto, da viga de madeira e a matriz de rigidez da conexão.

$$[R_j] = [R_j^c] + [R_j^w] + [R_j^s] \quad (14)$$

A solução do sistema linear construirá a aproximação da solução da equação do PTV; assim, é possível calcular os deslocamentos da viga.

2.4.1 Escolha das funções aproximantes $\varphi(x)$

Para as simulações deste trabalho foram utilizadas funções senoidais como aproximação da solução. As funções senoidais são contínuas, bem como suas derivadas. Além disso, foram impostas as condições de contorno de deslocamentos verticais nulos nos apoios e deslocamentos horizontais nulos no meio da estrutura.

As funções definidas abaixo foram utilizadas para aproximar o deslocamento vertical. Essas funções são contínuas em todo o domínio, bem como suas derivadas. Além disso, satisfazem às condições de contorno de serem nulas em $x = 0$ e $x = L$.

$$ShapeV[i] = Sen(Pi \cdot x \cdot (2i - 1) / L) \quad (15)$$

As seguintes funções foram utilizadas para aproximar o deslocamento vertical:

$$ShapeU[i] = Sen[Pi \cdot (x - L/2) \cdot (2i - 1) / L] \quad (16)$$

Essas funções são também contínuas em todo o domínio, bem como suas derivadas. Além disso, satisfazem às condições de contorno de serem nulas em $x = L/2$.

3 Resultados e discussões

Os resultados obtidos da formulação proposta (PTV) foram verificados com as equações de equilíbrio enunciadas por Stevanovic (1996). Os resultados obtidos através da resolução analítica dessa formulação foram comparados diretamente com os resultados do PTV. A comparação foi feita via gráficos das duas soluções para os casos de carregamento uniformemente distribuído e carregamento de força concentrada no meio do vão.

Outra análise realizada neste trabalho diz respeito à utilização do programa SAP 2000. Na Tabela 2 estão os valores experimentais de Soriano (2001) com as análises realizadas neste trabalho (SAP 2000, PTV e Stevanovic).

Tabela 2: Resultados dos deslocamentos verticais (mm) a 1/3 da viga

Força (kN)	Exp.vp-1	Exp.vp-2	SAP2	PTV	Stevanovic
0	0	0	0	0,00	0,00
5	4,74	4,63	6,3	7,38	7,38
10	9,64	9,37	11,8	13,73	13,73
15	14,71	14,38	17,3	20,08	20,08
20	21,20	19,68	22,8	26,44	26,44
25	26,68	25,17	28,3	32,79	32,79
30	32,81	32,74	33,8	39,14	39,14

Na Figura 7 estão os valores da Tabela 2.

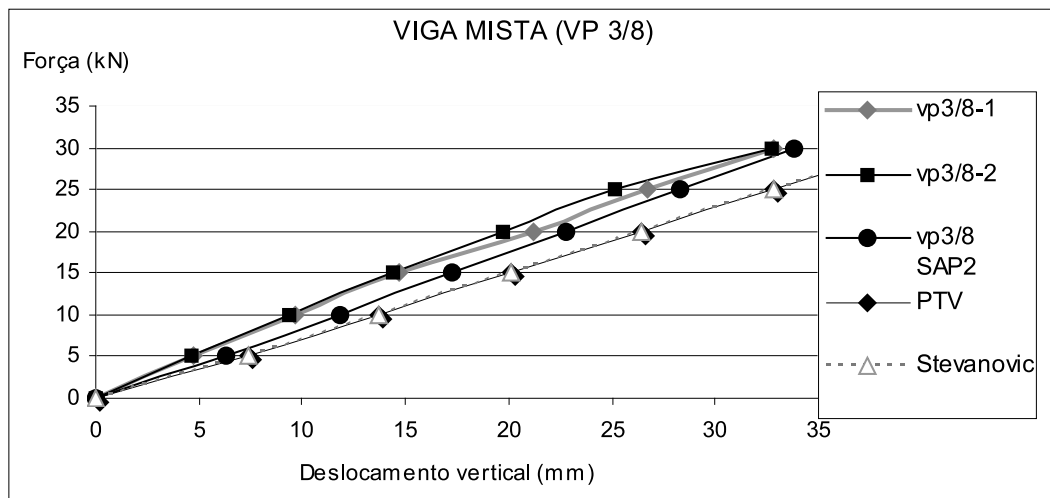


Figura 7: Resultados dos deslocamentos verticais a 1/3 da viga

Observações e legenda do gráfico da Figura 7:

- VP 3/8 –1, VP 3/8 –2 : vigas de concreto e madeira conectadas com parafusos de 3/8" (0,95 mm) ensaiadas em laboratório;
- VP 3/8 SAP2: os conectores foram simulados através de elementos de viga, unindo a seção de concreto à de madeira em alguns pontos. Entretanto, buscou-se um comportamento contínuo da conexão. Para isso a rigidez dos elementos de viga foi escolhida de modo a simular a mesma rigidez do módulo de deslizamento obtido em laboratório;
- PTV: a formulação proposta neste trabalho, a partir do princípio dos trabalhos virtuais. Essa curva praticamente coincide com a curva de Stevanovic;
- Stevanovic: a resolução analítica das equações de equilíbrio da viga mista, conforme formulação proposta pelo autor.

Para avaliação dos resultados da Tabela 2 foi utilizado o procedimento estatístico com base no programa estatístico Minitab e consoante aos conceitos estatísticos de pequenas amostras, como apresentados por Ryan (1994). Assim, pode-se ater à seguinte análise:

- Seja μ_1 a média da 1ª amostra e μ_2 a média da 2ª amostra: para testar se estas duas amostras pertencem a um mesmo universo, emprega-se a seguinte hipótese: $H_0: \mu_1 = \mu_2$ versus $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$, calculando-se a significância através da expressão:

$$t = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \sqrt{s_1^2 / n_1 + s_2^2 / n_2} \leq t_{\phi} \quad (p\%) \quad (17)$$

onde: $\bar{x}_1$: estimativa da média da 1ª amostra; $\bar{x}_2$: estimativa da média da 2ª amostra; s_1 : desvio-padrão da 1ª amostra; s_2 : desvio-padrão da 2ª amostra; n_1 : número de elementos da 1ª amostra; n_2 : número de elementos da 2ª amostra; $t_{\phi}(P\%)$: valor de t'Student' com $P\%$ de confiança; $(P\%)$: nível de confiança adotado. Para $DF = 11$ (graus de liberdade) e $P = 95\%$ amostra tem-se $t_{\phi}(95\%) = 1,796$.

Por outro lado, para se verificar se as médias das amostras são estatisticamente equivalentes, isto é, se o intervalo da diferença das médias μ_2, μ_1 contém o zero, determina-se o seguinte intervalo:

$$\Delta_- = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t^* \sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2} \leq \mu_2 - \mu_1 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t^* \sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2} = \Delta_+ \quad (18)$$

onde t^* é o valor correspondente para $P\%$ de confiança.

Analisando-se os dados da Tab. 3 referentes à análise experimental, com ênfase nos resultados do ensaio mais crítico, conclui-se que, estatisticamente, os resultados satisfazem às hipóteses adotadas.

Tabela 3: Teste Two Sample: $t_{\phi}(95\%) = 1,796$

	Δ_-	Δ_+	$ t^* $	Resultado
Exp.vp3/8-2 x SAP2	-16,0	11,9	0,32	Ok!
Exp.vp3/8-2 x PTV	-19,9	10,3	0,70	Ok!
SAP x PTV	-18,1	12,6	0,39	Ok!

Observa-se ainda que, no geral, as diferenças entre os resultados de deslocamentos experimentais e os do SAP e Stevanovic (PTV) foram, em média, de 13,21 e 31,69%.

4 Conclusões

Este trabalho contribui com a análise de estruturas mistas e propõe uma formulação variacional baseada no princípio dos trabalhos virtuais, que tem sido utilizado em quase todos os campos da engenharia estrutural.

Os resultados obtidos foram plenamente satisfatórios e, em comparação com SAP, sugerem que a hipótese de conexão contínua é superior à discreta. Entretanto, essa análise apresentou uma deficiência. Foi observado que os resultados variam com o tamanho das barras utilizadas para simular a conexão da viga mista, porque as barras são articuladas em uma extremidade e rígida em outra. Na extremidade rígida são transmitidos, além dos esforços horizontais esperados, esforços de momento. Como o valor do momento é proporcional ao comprimento da barra, quanto mais longas, maior o erro.

As análises numérica e analítica, apesar de estarem calibradas uma com a outra, apresentaram diferenças com os resultados da parte experimental. Uma possível contribuição para essas diferenças talvez seja o valor de K , coeficiente de deslizamento medido, que apresenta conforme resultados experimentais de laboratório um coeficiente de variação de 15%.

Observa-se ainda que a formulação proposta satisfaz às equações de equilíbrio mostrando-se consistente e seus resultados são condizentes com dados de laboratório.

Além disso, a integração dessa formulação em códigos de elementos finitos permitiria uma maior divulgação dos procedimentos de cálculo e do comportamento de vigas mistas, o que seria um catalisador do emprego desse tipo de estrutura.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fapesp (Processo 99/03303-5) pelo apoio financeiro na execução da parte experimental que contribuiu para as análises nesse presente estudo.

Referências

- Ahmadi, B. H. and Saka, M. P. (1993) Behavior of composite timber-concrete floors. *J. of Structural Eng., ASCE*, New York, v.119, n. 10, p. 3111-3130.
- Computers & Structures Inc. (2000) *SAP2000 Structural Analysis Program: Static and Dynamic Finite Element Analysis of Structures*, Berkeley, California, USA.
- Forti, N. C. da S. (2004) *Análise de vigas mistas em concreto e madeira*. Mestrado em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Brasil.
- Girhammar, U. A. and Gopu, V. K. A. (1993) Composite beam-columns with interlayer slip-exact analysis. *J. of Structural Eng., ASCE*, New York, v. 119, n. 4, p. 1265-1282.
- Mascia, N. T., Forti, N. C. S. and Soriano, J. (2006) Análise Numérica de Vigas Mistas em Concreto e em Madeira. *Anais do X Encontro Brasileiro em Madeiras e em Estruturas de Madeira*. São Pedro - SP, Brasil, Julho.
- Mascia, N. T. and Soriano, J. (2004) Benefits of timber-concrete composite action in rural bridges. *Materials and Structures, RILEM*, v. 37, n. 266, p. 22-28.
- Mathematica (1997) *Ver. 3.0*, Wolfram Research, Inc. Champaign, IL, USA.
- Ryan, B. F. and Joiner, B. L. (1994) *Minitab Handbook*. Duxbury Press, Belmont, CA, USA.
- Saada, A. S. (1974) *Elasticity: Theory and Applications*. Pergamon, Press, Elmsford, N. Y., USA.
- Soriano, J. (2001) *Estruturas mistas de concreto e madeira: Análise de vigas e painéis e aplicações na construção civil*. Doutorado em Engenharia Engenharia Agrícola, Faculdade de Engenharia Agrícola, Universidade Estadual de Campinas, Brasil.
- Stevanovic, B. Elastically coupled timber-concrete beams (1996). *Proceedings of International Wood Engineering Conference*, New Orleans, Oct.

Analysis of Composite Concrete and Timber Beams

Abstract

Composite structures constituted by associating of materials with different mechanical properties are an alternative solution for current structures used in civil construction. These structural arrangements aim at obtaining a reduction of construction costs and also maintaining the structural safety with advantageous architectural and environmental performances. The integration of a composite structure is, in general, due to the efficiency of the connection system, which can be of the rigid or the flexible type. This system is capable of transferring the longitudinal shear force on the interface of the associated materials along the length of the beam, and is also able to avoid vertical detachment. This research contributes to the analysis of the mechanical performance of the composite beams, focusing on the vertical displacements in three forms: bidimensional finite element program via, analytical solution of the equilibrium equation via and virtual work equation via. The last approach was conceived from structural theory research, applying concepts to composite beams. The proposal formulation fulfils the equilibrium equation showing to be consistent and the results fit reasonably with the experimental data. This formulation can be easily integrated to a finite element procedure requiring one-dimensional elements only.

Key words: Composite structures. Concrete-timber composite beams. Principle of virtual work. Numerical and experimental analysis.

1 Introduction

In general, composite structures consisting of concrete and timber can be used as an alternative solution to structures used in civil construction, especially the crossing-bridge superstructures and bridges of vicinal roads.

In fact, through the constructive technique of the composite structures, it is possible to use timber and concrete in a more rational form, exploring the elasticity and the strength properties of these materials.

In this paper, we carried out the analysis of the mechanical performance of the composite beams in three manners by using: a bidimensional finite element program, an analytical solution of the equilibrium equation (Stevanovic's formulation, 1996) and the virtual work equation. The last approach was conceived from structural theory research and also expanding concepts on the composite beam theory.

2 Modeling the Composite Structures

The modeling of a concrete-timber beam subjected to a concentrated load in the middle of span is developed from both the equilibrium of forces and the compatibility of displacement of the structural element resulting in fourth-order differential equations.

In this model of composite structures, a system of connection must assure the transference of the horizontal shear efforts. This connection system influences the beam structural behavior by affecting the rigidity of the composite beam. Thus, it is necessary to take into consideration the effect of slip in the contact surface between the two materials.

3 Stiffness of the Connection System

The model for the design of composite structures has to consider the rigidity of the connection system, which quantifies the resistance offered against the displacement in the surface of contact between two materials, due to a loading applied to the structure.

In the case of using flexible connection system, the effect of the slip is considered through the slip modulus. The stiffness of a connection system or specifically the slip modulus is experimentally evaluated by a shear connection test.

4 Experimental Procedure and Material Used

The mechanical performance of structures with connection systems by means of screws was verified experimentally by testing prototypes of simply supported beams subjected to a concentrated load in the center of the span.

The slip modulus of each connection system was obtained through shear test-specimen.

Each shear test-specimen was molded with the same materials of the prototypes, containing a pair of connectors for each timber prism, with equal spacing to those used in the structures.

The composite timber-concrete beams, measuring 3.00 m in length, were constituted by a web in timber with the following dimensions: 5 cm x 15 cm, and a cross-section of the flange in concrete, with the dimensions: 30 cm x 4 cm. Screws of 9,50 mm in diameter were used as a connection system. A wood sample of the *Goupia glabra* species was used for the construction of the prototypes.

In summary, the experimental procedure provided results of the vertical displacements of the composite beams in order to compare with analytical and numerical results.

5 Results

The model used to represent the behavior of these beams, through the differential equations or the Finite Element Method, revealed a considerable accuracy in relation to the experimental data. The agreement analytical formulations, Stevanovic's model or virtual work equation, is also statically satisfactory.

In general, the range of differences among the average results was 13,21% to 31,69%, especially in relation to the critical values.

6 Conclusion

This article focused on a theoretical and an experimental analysis of the structural behavior of composite concrete-timber beams.

Through the analysis of the obtained results in bending tests, we can conclude that the numerical model based on Finite Elements Methods following the software SAP 2000 presented results close to the experimental data. Stevanovic's model (1996) of design and also the procedure on the basis of the Principle of Virtual Work indicated no significant differences.