

COMPORTAMENTO DE PÓS-ENCURVADURA DE BARRAS E PÓRTICOS DE AÇO: APLICAÇÃO DA TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS (GBT)

Cilmar Basaglia, Dinar Camotim, Nuno Silvestre*

*Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura, ICIST/IST, Instituto Superior Técnico,
Universidade Técnica de Lisboa, Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal*

Resumo

Neste trabalho são apresentados o desenvolvimento e a aplicação de duas formulações de elementos finitos baseadas na Teoria Generalizada de Vigas (GBT) que permitem analisar o (i) comportamento de pós-encurvadura local e global de perfis de aço com secção de parede fina aberta, os quais podem exibir restrições localizadas, e (ii) o comportamento de pós-encurvadura global de pórticos metálicos constituídos por perfis de parede fina. Começa-se por fazer uma breve revisão dos principais conceitos e procedimentos envolvidos no estabelecimento do sistema de equações diferenciais de equilíbrio não lineares da GBT. Em seguida, abordam-se as etapas envolvidas (i) na discretização dessas equações em elementos finitos de barra que incorporam a influência de condições de apoio “não-convencionais” (barras isoladas) ou o comportamento das ligações (pórticos), e (ii) na solução do correspondente sistema de equações (algébricas) não lineares. Finalmente, a aplicação e as potencialidades dos elementos finitos desenvolvidos são ilustradas através da apresentação e discussão de resultados numéricos relativos ao comportamento de pós-encurvadura (i) local e global de colunas com e sem restrições localizadas (de deslocamentos) e (ii) global, plano e espacial, de um pórtico simples formado por duas barras ortogonais dispostas em “L”. A maioria dos resultados fornecidos pelas análises baseadas na GBT são validados através da comparação com valores obtidos através de análises de elementos finitos de barra ou casca efectuadas no programa ANSYS.

Palavras-chave: Elementos finitos de barra, Formulação geometricamente não linear, Teoria Generalizada de Vigas, Pós-encurvadura local/global, Perfis de aço com secção de parede fina, Pórticos metálicos de parede fina.

* Autor para contacto: Tel.: +351 21 8418403; fax: +351 21 8497650; E-mail: dcamotim@civil.ist.utl.pt

1 INTRODUÇÃO

Uma avaliação adequada e rigorosa da eficiência estrutural de um pórtico constituído por perfis com secção de parede fina requer um conhecimento aprofundado sobre os seus comportamentos de estabilidade e pós-encurvadura, o que envolve (i) identificar os modos de instabilidade relevantes, (ii) calcular as tensões de bifurcação que lhes estão associadas e (iii) determinar as correspondentes trajectórias de pós-encurvadura e capacidades resistentes. No entanto, como os perfis com secção de parede fina exibem baixa rigidez à torção e uma elevada susceptibilidade a deformações locais (locais de placa e distorcionais) e globais, a avaliação do comportamento estrutural do pórtico constitui uma tarefa bastante complexa (*e.g.*, Kim e Kang 2002). De facto, esta tarefa só pode ser executada rigorosamente (i) recorrendo a técnicas numéricas sofisticadas, nomeadamente o método dos elementos finitos, e (ii) discretizando as barras e ligações do pórtico em malhas finas de elementos de casca (*e.g.*, Boissonnade e Degée 2005). Apesar de conceptualmente possível, este tipo de abordagem tem ainda custos computacionais proibitivos para aplicações correntes (não esquecendo as dificuldades envolvidas na modelação do pórtico e na interpretação dos resultados obtidos).

Uma metodologia alternativa e muito promissora consiste na utilização de elementos finitos de barra baseados na Teoria Generalizada de Vigas (GBT – “Generalised Beam Theory” em inglês), a qual foi originalmente formulada por Schardt (1989) e tem tido desenvolvimentos significativos nos últimos anos (*e.g.*, Camotim *et al.*, 2004,2006,2008a) – em particular, é agora possível analisar os comportamentos linear e de estabilidade (bifurcação) de barras e pórticos com secções transversais (geometria e dimensões), condições de apoio e carregamentos arbitrários, e (ii) o comportamento de pós-encurvadura de barras isoladas. No entanto, note-se que as análises de pós-encurvadura efectuadas até hoje envolveram apenas barras isoladas com (i) condições de apoio “convencionais” (*i.e.*, secções de extremidade encastradas ou articuladas) e (ii) secção transversal aberta não ramificada (*e.g.*, Silvestre e Camotim 2003,2006) – assim, os autores estão actualmente alargando o domínio de aplicação da formulação não linear da GBT existente, de forma a cobrir o comportamento de pós-encurvadura de (i) barras com secções transversais ramificadas e condições de apoio arbitrárias, nomeadamente restrições de deslocamento localizadas (*e.g.*, Camotim *et al.*, 2008b), e (ii) pórticos constituídos por perfis de parede fina. No que diz respeito à aplicação da GBT (como de qualquer outro modelo de barra) a pórticos, a maior dificuldade está associada com a modelação das ligações, a qual envolve a consideração simultânea (i) da transmissão do empenamento devido à torção, distorção e

deformação por corte, e (ii) da compatibilidade entre os deslocamentos transversais (de membrana e flexão) das secções de extremidade das barras ligadas. No entanto, estas dificuldades foram já parcialmente superadas pelos autores, no âmbito de trabalhos relativos ao desenvolvimento de elementos finitos baseados na GBT e destinados a analisar a instabilidade local e global de pórticos planos e espaciais (*e.g.*, Basaglia *et al.*, 2008,2009).

O objectivo deste trabalho consiste em apresentar o estado actual de uma investigação em curso que visa alargar o domínio de validade da GBT, tornando-a aplicável à análise dos comportamentos de (i) *pós-encurvadura local e global* de barras (de secção aberta arbitrária, ramificada ou não) com restrições localizadas e (ii) de *pós-encurvadura global* de pórticos constituídos por esse tipo de perfis metálicos¹. Em particular, descrevem-se os procedimentos que conduzem à obtenção da matriz de rigidez tangente (incorporando a influência das ligações e das condições de apoio) e a estratégia incremental-iterativa adoptada para resolver o sistema de equações não lineares de equilíbrio. Finalmente, ilustram-se a aplicação e o potencial dos elementos finitos desenvolvidos através do estudo (i) da *pós-encurvadura local e global* de perfis isolados com secções em C e I reforçadas e possuindo ou não restrições localizadas, e (ii) da *pós-encurvadura global*, plana e espacial, de um pórtico simples formado por duas barras ortogonais (de secção em U) dispostas em “L” – validam-se alguns dos resultados obtidos através da sua comparação com valores fornecidos por análises de elementos finitos de casca e de barra efectuadas no programa ANSYS (SAS 2004).

2 ANÁLISE DA SECÇÃO: BREVE REVISÃO

Devido ao facto de a aproximação do campo de deformações da secção transversal ser expressa como uma combinação linear de “modos de deformação” previamente identificados (*e.g.*, extensão, axial, flexão, torção, etc), as análises da GBT conduzem à resolução de equações de equilíbrio escritas de uma forma modal muito conveniente. Esta característica tem grande utilidade prática, na medida em que permite compreender, de uma forma muito clara, a natureza de diversos fenómenos estruturais. Por outro lado, o facto de alguns modos de deformação não participarem (ou terem uma participação desprezável) na configuração deformada da estrutura torna possível não os incluir nas análises – esta possibilidade, a qual conduz a economias computacionais apreciáveis, só é oferecida pelas análises baseadas na GBT.

¹ Devido às actuais limitações do programa utilizado para implementar os sistemas de equações não lineares da *pós-encurvadura* (as quais serão superadas num futuro próximo), neste trabalho são efectuadas somente análises de *pós-encurvadura global* de pórticos.

Considere-se uma barra prismática com a secção transversal de parede fina aberta genérica representada na Figura 1, a qual mostra também os sistemas de eixos coordenados globais (X, Y, Z) e locais (x, s, z) , onde (i) x e s definem a superfície média da barra (direcção longitudinal e linha média da secção) e (ii) z é medida na direcção da espessura da parede. Ao formular a GBT, as três componentes do campo de deslocamentos do plano médio de cada parede $u(x, s)$, $v(x, s)$ e $w(x, s)$ são dadas por

$$\begin{aligned} u(x, s) &= u_k(s)\phi_{k,x}(x) & v(x, s) &= v_k(s)\phi_k(x) & w(x, s) &= w_k(s)\phi_k(x) \end{aligned} \quad (1)$$

onde (i) $(.)_{,x} \equiv d(.) / dx$, (ii) $u_k(s)$, $v_k(s)$ e $w_k(s)$ são os campos de deslocamentos relativos ao modo de deformação k , obtidos através de análise da secção, e (iii) $\phi_k(x) \equiv \phi_k(X)$ é a função que fornece a variação longitudinal da amplitude desse mesmo modo de deformação.

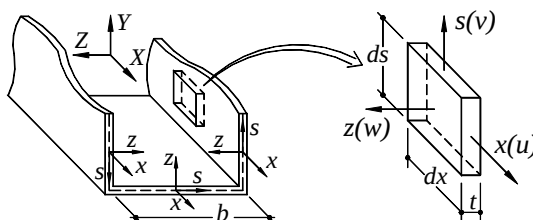


Figura 1 – Geometria, deslocamentos e sistema de eixos locais de uma secção de parede fina aberta arbitrária

A análise da secção envolve a execução de um conjunto de operações relativamente complexo, cuja descrição detalhada pode ser encontrada nos trabalhos (i) de Silvestre e Camotim (2002) e Dinis *et al.* (2006), para análises de estabilidade (bifurcação), e (ii) de Silvestre e Camotim (2003), para análises de pós-encurvadura. Porém, vale a pena referir alguns aspectos respeitantes à identificação e determinação dos diferentes conjuntos de modos de deformação envolvidos nas análises da GBT:

- (i) A secção transversal é discretizada em (i₁) n nós *naturais* (localizados nas extremidades das paredes que formam a secção transversal) e (i₂) m nós *intermédios* (localizados no interior dessas paredes). Em secções abertas ramificadas, onde existem nós naturais partilhados por mais de duas paredes, é ainda necessário fazer a distinção entre nós naturais *dependentes* e *independentes*.
- (ii) Existem três grupos de modos de deformação: modos (ii₁) *convencionais* (presentes na formulação original da GBT devida a Schardt, 1986), (ii₂) de *corte*² e (iii₃) de *extensão transversal* – os dois últimos conjuntos de modos de deformação foram originalmente propostos por Silvestre e Camotim (2003).

² Em Portugal, *corte* tem o significado de *cisalhamento*, termo usado no Brasil.

- (iii) Os modos *convencionais* constituem o núcleo da GBT e satisfazem as hipóteses de Vlasov (distorções e extensões transversais de membrana nulas na linha média da secção – $\gamma_{xs}^M = \varepsilon_{ss}^M = 0$). Este conjunto de modos de deformação pode ainda subdividir-se em (iii₁) modos *globais* (associados a movimentos de corpo rígido da secção – extensão axial, flexão em torno dos eixos de maior e menor inércia e torção), (iii₂) modos *distorcionais* (envolvem deslocamentos de nós naturais interiores no plano da secção e deformação da secção com empenamento das suas paredes) e (iii₃) modos *locais de placa* (envolvem deformação da secção sem empenamento nem deslocamento de nós naturais interiores).
- (iv) Os modos de *corte* baseiam-se na hipótese de se ter $v(s)=w(s)=0$, o que significa que envolvem apenas deslocamentos axiais $u(s)$ e, portanto, violam obrigatoriamente as hipóteses de Vlasov. Os campos de deslocamentos obtêm-se directamente a partir da imposição de deslocamentos axiais unitários em cada nó natural e intermédio, não sofrendo a secção qualquer deformação no seu plano. Desta maneira, estes modos de deformação permitem, essencialmente, capturar a variação não linear dos deslocamentos axiais (de empenamento) ao longo da linha média de cada parede da secção.
- (v) Os modos de *extensão transversal* baseiam-se na hipótese de se ter $u(s)=0$, i.e., envolvem apenas deslocamentos transversais de membrana $v(s)$ e de flexão $w(s)$. Os campos de deslocamentos são obtidos a partir da imposição de deslocamentos transversais de membrana unitários em cada nó natural e intermédio, o qual pode implicar a ocorrência de deslocamentos de flexão em segmentos das paredes adjacentes. Estes modos permitem contabilizar a deformação da secção associada à extensão transversal das suas paredes e, tal como os modos de corte, também violam as hipóteses de Vlasov.

A Figura 2 mostra as dimensões, as propriedades do material e as discretizações da GBT das secções transversais das barras utilizadas neste trabalho: C, I reforçado (I_R) e U. Estas discretizações conduzem a (i) $N=50$ modos de deformação para a secção C (17 convencionais, 14 de corte e 19 de extensão transversal), (ii) $N=51$ para a secção I_R (19 convencionais, 16 de corte e 16 de extensão transversal) e (iii) $N=4$ para a secção U (4 modos globais) – as configurações dos modos de deformação mais relevantes para as análises efectuadas neste trabalho são apresentados nas Figuras 3 a 5.

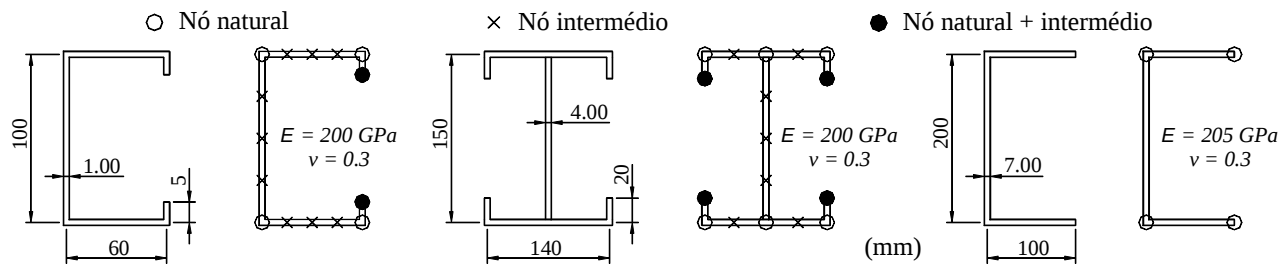


Figura 2 – Secções transversais em C, I_R e U: geometrias e discretizações da GBT

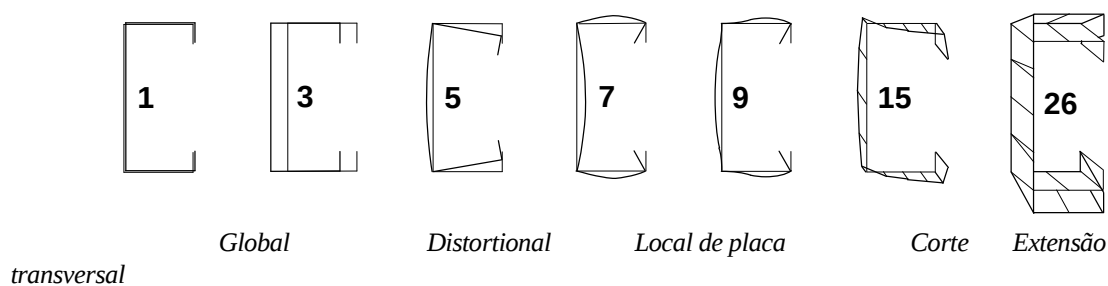


Figura 3 – Modos de deformação mais relevantes da secção em C

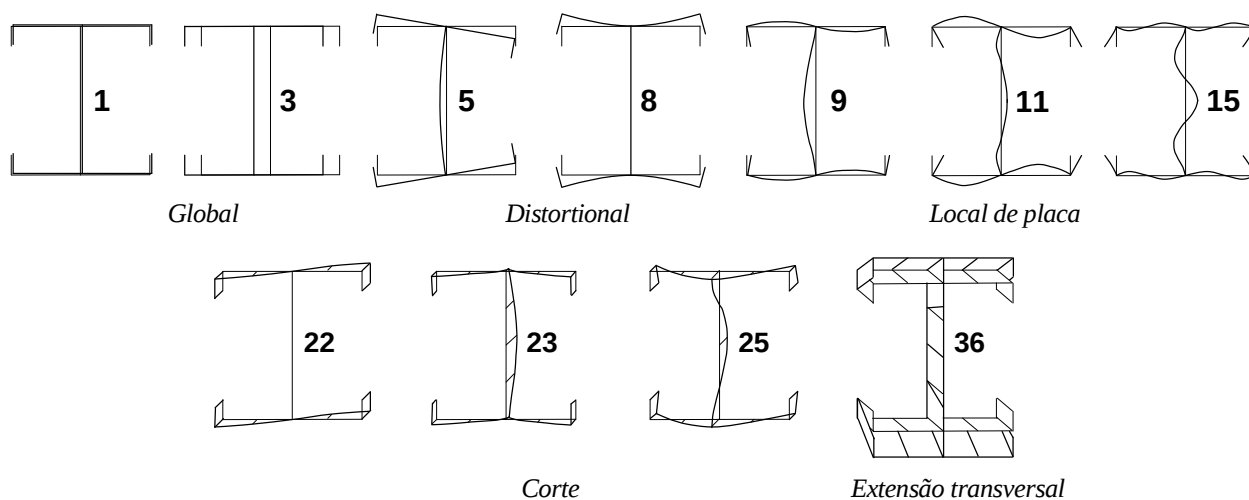


Figura 4 – Modos de deformação mais relevantes da secção em I_R

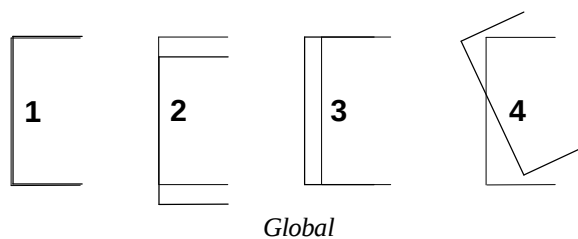


Figura 5 – Modos de deformação mais relevantes da secção em U

3 ANÁLISE DE PÓS-ENCURVADURA LOCAL/GLOBAL DE BARRAS

Após efectuar a análise da secção, *i.e.*, identificar os seus modos de deformação e determinar as correspondentes propriedades mecânicas modais, é possível expressar a equação de equilíbrio da barra de forma *modal*. De facto, designando por δU e $\delta \Pi$ as primeiras variações da energia de deformação e do potencial das forças exteriores, a aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais fornece a expressão

$$\delta U + \delta \Pi = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \delta \Pi_q + \delta \Pi_Q = \sum_{p=1}^3 (\delta U_p - \delta \bar{U}_p) + \delta \Pi_q + \delta \Pi_Q = 0 \quad (2)$$

onde (i) V é o volume compreendido pelas n paredes que constituem o elemento estrutural, (ii) as “barras superiores” identificam os termos associados às imperfeições geométricas iniciais, (iii) σ_{ij} e ε_{ij} são as componentes dos tensores das tensões e das deformações, (iv) δU_p é a primeira variação do termos linear ($p=1$), quadrático ($p=2$) e cúbico ($p=3$) da energia de deformação, e (v) $\delta \Pi_q$ e $\delta \Pi_Q$ são os trabalhos virtuais realizados pelas forças exteriores distribuídas e concentradas. Os termos δU_p e $\delta \bar{U}_p$ são dados por expressões do tipo (a título ilustrativo, apresentam-se apenas os primeiros termos³)

$$\begin{aligned} \delta U_1 &= \int_L (C_{kh} \phi_{k,xx} \delta \phi_{h,xx} + B_{kh} \phi_k \delta \phi_h + D_{kh} \phi_{k,x} \delta \phi_{h,x} + \dots) dx \\ \delta U_2 &= \int_L (C_{kjh} \phi_{k,xx} \phi_{j,x} \delta \phi_{h,x} + \frac{1}{2} C_{hjk} \phi_{k,x} \phi_{j,x} \delta \phi_{h,xx} + \dots) dx \\ \delta U_3 &= \int_L (\frac{1}{2} C_{kijh} \phi_{k,x} \phi_{i,x} \phi_{j,x} \delta \phi_{h,x} + \dots) dx \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \delta \bar{U}_1 &= \int_L (C_{kh} \bar{\phi}_{k,xx} \delta \phi_{h,xx} + B_{kh} \bar{\phi}_k \delta \phi_h + D_{kh} \bar{\phi}_k \delta \phi_{h,xx} + \dots) dx \\ \delta \bar{U}_2 &= \int_L (C_{kjh} \bar{\phi}_{k,xx} \phi_{j,x} \delta \phi_{h,x} + \frac{1}{2} C_{hjk} \bar{\phi}_{k,x} \bar{\phi}_{j,x} \delta \phi_{h,xx} + \dots) dx \\ \delta \bar{U}_3 &= \int_L (\frac{1}{2} C_{kijh} \bar{\phi}_{k,x} \bar{\phi}_{i,x} \phi_{j,x} \delta \phi_{h,x} + \dots) dx \end{aligned} \quad (4)$$

onde as componentes dos tensores C , B e D são as propriedades mecânicas da secção associadas com as resistências (i) às extensões longitudinais, (ii) às extensões transversais e (iii) às deformabilidades por torção e corte, respectivamente. Enquanto as componentes dos tensores de 2ª ordem (C_{kh} , D_{kh} , B_{kh}) caracterizam o comportamento linear da secção transversal, as

³ As expressões relativas a todos os termos estão incluídas no trabalho Silvestre e Camotim (2003).

componentes dos tensores de 3ª (C_{kjh} , etc), 4ª (C_{kijh} , etc) e ordem superior (*h.o.t.*, não apresentados em (3)-(4)) dizem respeito ao comportamento geometricamente não linear. Note-se que os modos globais **1** (extensão axial – $C_{11} \equiv EA$ é a rigidez axial), **2** e **3** (flexões rectas principais – $C_{22} \equiv EI_I$ e $C_{33} \equiv EI_{II}$ são as correspondentes rigidezes de flexão) e **4** (torção – $C_{44} \equiv EI_w$ é a rigidez de empenamento e $D_{44} \equiv GJ$ é a rigidez de torção de Saint-Venant) são caracterizados por $B_{kh} = 0$, o que se deve à ausência de deformação da secção no seu próprio plano (modos de “corpo rígido”). Quanto aos restantes modos de deformação ($k \geq 5$) exibem (i) deslocamentos de empenamento primário e secundário e/ou (ii) deformação no plano da secção transversal, o que faz com que as respectivas componentes C_{ik} , D_{ik} e B_{ik} sejam não nulas.

O trabalho virtual realizado pelas forças exteriores que actuam na barra ($\delta \Pi$), as quais podem ser distribuídas ($\delta \Pi_q$) ou concentradas ($\delta \Pi_Q$), é dado pelas expressões⁴

$$\delta \Pi_q = - \int_L \int_b (q_x \delta u + q_s \delta v + q_z \delta w) ds dx \quad (5)$$

$$\delta \Pi_Q = -Q_i \delta \phi_{i,x} \Big|_{x=0}^{x=L} - Q'_i \delta \phi_i \Big|_{x=0}^{x=L} \quad (6)$$

onde (i) q_x , q_s e q_z são as componentes das forças distribuídas segundo as componentes de deslocamento δu , δv e δw , (ii) Q_1 , Q_2 , Q_3 e Q_4 são forças axiais, momentos flectores (em torno dos eixos de maior e menor inércia) e bi-momentos, e (iii) Q'_2 , Q'_3 e Q'_4 são cargas transversais (segundo os eixos de maior e menor inércia) e momentos torsores.

Por fim, note-se que o uso da forma variacional (2) conduz trivialmente à obtenção do sistema de equações diferenciais de equilíbrio não lineares da GBT (uma por cada modo de deformação)

$$C_{kh}(\phi_k - \bar{\phi}_k)_{,xxxx} - D_{kh}(\phi_k - \bar{\phi}_k)_{,xx} + B_{kh}(\phi_k - \bar{\phi}_k) - C_{kjh}(\phi_{k,xx}\phi_{j,x} - \bar{\phi}_{k,xx}\bar{\phi}_{j,x})_{,x} + \\ + \frac{1}{2}C_{hjk}(\phi_{k,x}\phi_{j,x} - \bar{\phi}_{k,x}\bar{\phi}_{j,x})_{,xx} + \frac{1}{2}C_{kijh}(\phi_{k,x}\phi_{i,x}\phi_{j,x} - \bar{\phi}_{k,x}\bar{\phi}_{i,x}\bar{\phi}_{j,x})_{,x} + h.o.t. = q_h \quad (7)$$

onde (i) a configuração das imperfeições geométricas iniciais é expressa de forma modal e (ii) (q_h) são as forças distribuídas (modais) – tem-se $q_h = 0$ para $h > 3$.

⁴ Nestas expressões consideram-se apenas cargas associadas aos modos de deformação de “corpo rígido”. Para além disso, (i) não se consideram momentos distribuídos, (ii) todas as cargas actuam nas secções de extremidade e (iii) admite-se que as cargas transversais estão aplicadas no centro de corte da secção.

3.1 Formulação do Elemento Finito de Barra

Em barras isoladas com condições de apoio arbitrárias (de extremidade, intermédias e localizadas), a solução do sistema (7) pode obter-se através de uma formulação de elementos finitos de barra baseada na GBT e análoga à desenvolvida e implementada por Silvestre e Camotim (2003) – as funções de amplitude modal $\phi_k(x)$ são aproximadas por combinações lineares (i) de primitivas dos polinómios cúbico de Lagrange (modos de corte e de extensão axial) e (ii) de polinómios cúbicos de Hermite (modos de extensão transversal e os restantes modos convencionais). Assim, tem-se

$$\phi_k(x) = \psi_\alpha(x) d_{k\alpha} \quad \bar{\phi}_k(x) = \psi_\alpha(x) \bar{d}_{k\alpha} \quad (8)$$

onde (i) ψ_α são os polinómios de Hermite ou as primitivas dos polinómios de Lagrange, (ii) $d_{k\alpha}$ são os deslocamentos generalizados e (iii) as “barras superiores” identificam de novo os termos relativos às imperfeições geométricas iniciais. Então, o sistema de equações algébricas não lineares (da estrutura discretizada) é resolvido numericamente por meio de uma técnica incremental-iterativa baseada no método de *Newton-Raphson* e numa estratégia de “controle de deslocamento”, a qual permite determinar as sucessivas *configurações de equilíbrio* associadas a pontos localizados sobre a trajectória de pós-encurvadura⁵ – a correspondente matriz de rigidez tangente $T^{(e)}$ (simétrica) obtém-se diferenciando as várias componentes do vector de forças internas do elemento finito $f^{(e)}$ em ordem a cada deslocamento generalizado. Assim, tem-se

$$T^{(e)} = \frac{\partial f_1^{(e)}}{\partial d_k^{(e)}} + \frac{\partial}{\partial d_k^{(e)}} (f_2^{(e)} + f_3^{(e)} - \bar{f}_2^{(e)} - \bar{f}_3^{(e)}) \quad (9)$$

onde

$$f_p^{(e)} = \frac{\partial U_p^{(e)}}{\partial d_{k\alpha}^{(e)}} \quad \Leftrightarrow \quad f^{(e)} = f_1^{(e)} + f_2^{(e)} + f_3^{(e)} - \bar{f}_1^{(e)} - \bar{f}_2^{(e)} - \bar{f}_3^{(e)} \quad (10)$$

Então, o vector global das forças internas f_M e a matriz de rigidez T_M da barra obtêm-se por meio (i) da assemblagem destes elementos finitos e (ii) da adequada imposição das diversas condições de apoio, as quais obviamente reduzem o número de graus de liberdade envolvidos na análise – dimensão do vector d_M .

⁵ Deste modo, não é possível detectar a ocorrência do fenómeno designado por “snap-back”. Esta limitação será superada em breve, quando se completar a implementação de uma estratégia de controle do comprimento de arco.

3.2 Condições de Apoio: Restrições de Deslocamento Localizadas

Com o intuito de incorporar na análise condições de apoio não convencionais, nomeadamente restrições de deslocamento localizadas, é necessário impor *condições de restrição* que variam de caso para caso (*e.g.*, Camotim *et al.*, 2008b). A título de exemplo, considere-se a restrição total do deslocamento transversal (de flexão) $\tilde{\delta}_Z$ (ver fig. 6) de um ponto P localizado na superfície média de uma parede interna da barra, *i.e.*, correspondente a um nó *intermédio* da secção transversal (ver Fig. 2) cuja localização é definida por $x=x_P$ e $s=s_P$. Tem-se, então,

$$\tilde{\delta}_Z(x_P, s_P) = \sum_{j=1}^N w_j(s_P) \phi_j(x_P) = 0 \quad (11)$$

onde $w_j(s_P) \phi_j(x_P)$ é a contribuição do modo j para o deslocamento que se está a restringir.

As condições de restrição são incluídas no vector das forças internas e na matriz de rigidez da barra através das operações

$$\tilde{f}_M = [\Omega_M]^T f_M \quad \tilde{T}_M = [\Omega_M]^T T_M [\Omega_M] \quad (12)$$

onde a matriz de transformação da barra $[\Omega_M]$, definida por

$$\{\tilde{d}_M\} = [\Omega_M]^T \{d_M\} \quad (13)$$

traduz a redução dos graus de liberdade ($d_M \Rightarrow \tilde{d}_M$) decorrente da imposição das condições de restrição – a matriz $[\Omega_M]$ incorpora os valores do campo de deslocamentos no ponto P associados aos vários modos de deformação: $u_k(s_P)$, $v_k(s_P)$ ou $w_k(s_P)$.

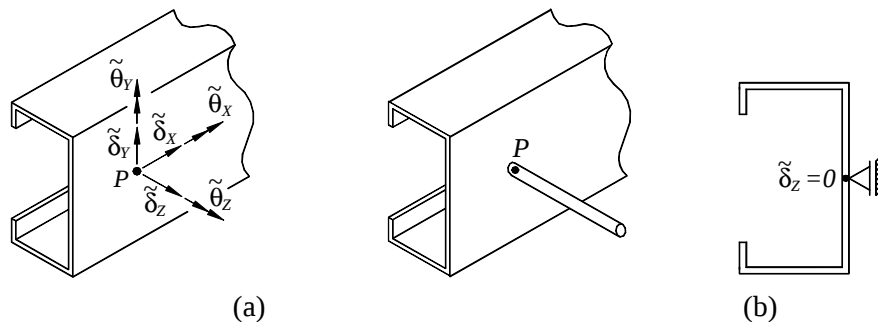


Figura 6 – (a) Rotações e deslocamentos do ponto P e (b) restrição total do deslocamento transversal (de flexão) na direcção Z

Após definir a matriz de rigidez tangente e o vector das forças internas, a execução da análise de pós-encurvadura da barra envolve soluções sucessivas do sistema de equações não lineares

$$\Delta \tilde{\mathbf{f}}_M = \tilde{\mathbf{T}}_M \Delta \tilde{\mathbf{d}}_M \quad (14)$$

o qual descreve o equilíbrio incremental da barra (a partir de um estado de equilíbrio conhecido) – $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_M$ e $\Delta \tilde{\mathbf{d}}_M$ são os vectores das forças e deslocamentos generalizados incrementais. Conforme foi mencionado anteriormente, este sistema incremental é resolvido utilizando uma técnica iterativa que combina o método de Newton-Raphson com uma estratégia de controle de deslocamento. Após cada iteração, determina-se o vector dos deslocamentos incrementais $\Delta \mathbf{d}_M$, o que permite actualizar a configuração deformada da barra e obter a matriz de rigidez tangente a utilizar na iteração seguinte – assim, é indispensável efectuar a transformação $\Delta \tilde{\mathbf{d}}_M \Rightarrow \Delta \mathbf{d}_M$ (i.e., a inversa de (13)). A técnica incremental-iterativa utilizada neste trabalho para determinar a trajectória de equilíbrio não linear (de pós-encurvadura) não será abordada aqui em detalhe – uma descrição pormenorizada pode ser encontrada no trabalho de Silvestre e Camotim (2003).

3.3 Exemplos Ilustrativos: Colunas com e sem Restrições Localizadas

Analisa-se o comportamento de pós-encurvadura de colunas (i) simplesmente apoiadas (secções extremas articuladas local e globalmente e com empenamento livre), (ii) submetidas a compressão uniforme e (iii) com ou sem o deslocamento transversal (de flexão) do ponto médio da alma da secção de meio vão restringido – as colunas são constituídas por perfis de aço com secção transversal em C ou I_R (ver Fig. 2). Finalmente, tanto nas análises baseadas na GBT como nas efectuadas no programa ANSYS se admite que as colunas contêm imperfeições geométricas iniciais com a forma do modo crítico de instabilidade.

3.3.1 Coluna com secção transversal em C

Estuda-se o comportamento de colunas com secção transversal em C e comprimento $L=300mm$, cuja estabilidade, analisada através da GBT, é caracterizada por (i) carga crítica $P_{cr}=17.44kN$ e modo de instabilidade praticamente distorcional puro (97% de participação do modo 5 – ver fig. 3), no caso não restringido, e (ii) $P_{cr,R}=19.56kN$ e modo de instabilidade

“misto” distorcional/local de placa (64.3% de contribuição do modo 5 e 35.7% de participação conjunta dos modos 7+9 – ver fig. 3), no caso restringido.

A Figura 7 mostra as trajetórias de pós-encurvadura (P vs. v , onde v é o deslocamento vertical dos reforços da secção de meio vão) referentes às colunas restringidas e não restringidas, as quais foram obtidas através de análises geometricamente não lineares baseadas na GBT (elementos finitos de barra) e efectuadas no ANSYS (elementos finitos de casca). As colunas contêm imperfeições iniciais na forma do modo crítico de instabilidade e amplitudes $v_0 = \pm 0.15\text{mm}$, onde v_0 é o valor inicial do máximo deslocamento vertical dos reforços (ocorre na secção de meio vão) – note-se que as imperfeições iniciais definidas por $v_0 = +0.15\text{mm}$ e $v_0 = -0.15\text{mm}$ correspondem a movimentos dos conjuntos banzo-reforço “para fora” (i.e., a coluna “abre”) e “para dentro” (i.e., a coluna “fecha”) das secções. No caso das colunas restringidas, procurou-se não só validar os resultados fornecidos pela GBT, mas também (e sobretudo) avaliar a influência que a discretização da secção (i.e., o número e o tipo dos modos de deformação incluídos na análise) exerce na precisão dos resultados obtidos. Assim, efectuaram-se análises que incluíam os seguintes modos de deformação: (i) 1+3+5+7, (ii) 1+3+5+7+9, (iii) 1+3+5+7+9+15 e (iv) 1+3+5+7+9+15+26. Para além disso, as Figuras 8(a)-(b) mostram as configurações deformadas das colunas não restringidas e restringidas com as secções “a fechar” e “a abrir”, obtidas no programa ANSYS para $P = 22.0\text{kN}$.

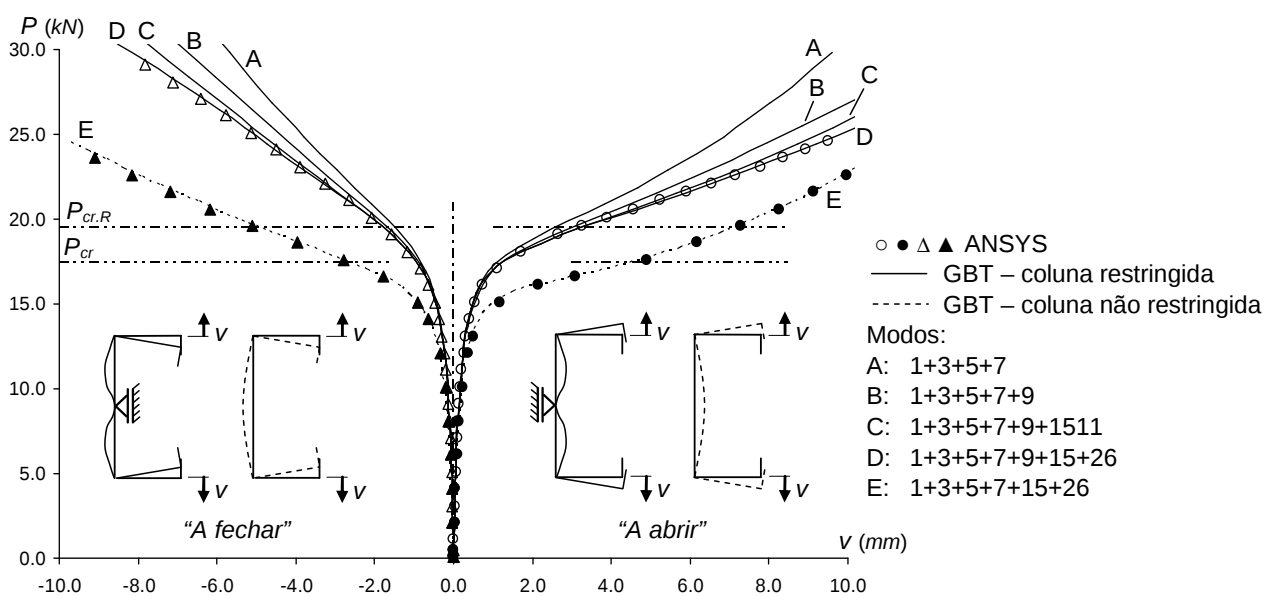


Figura 7 – Trajetórias de pós-encurvadura das colunas não restringidas e restringidas com secção em C

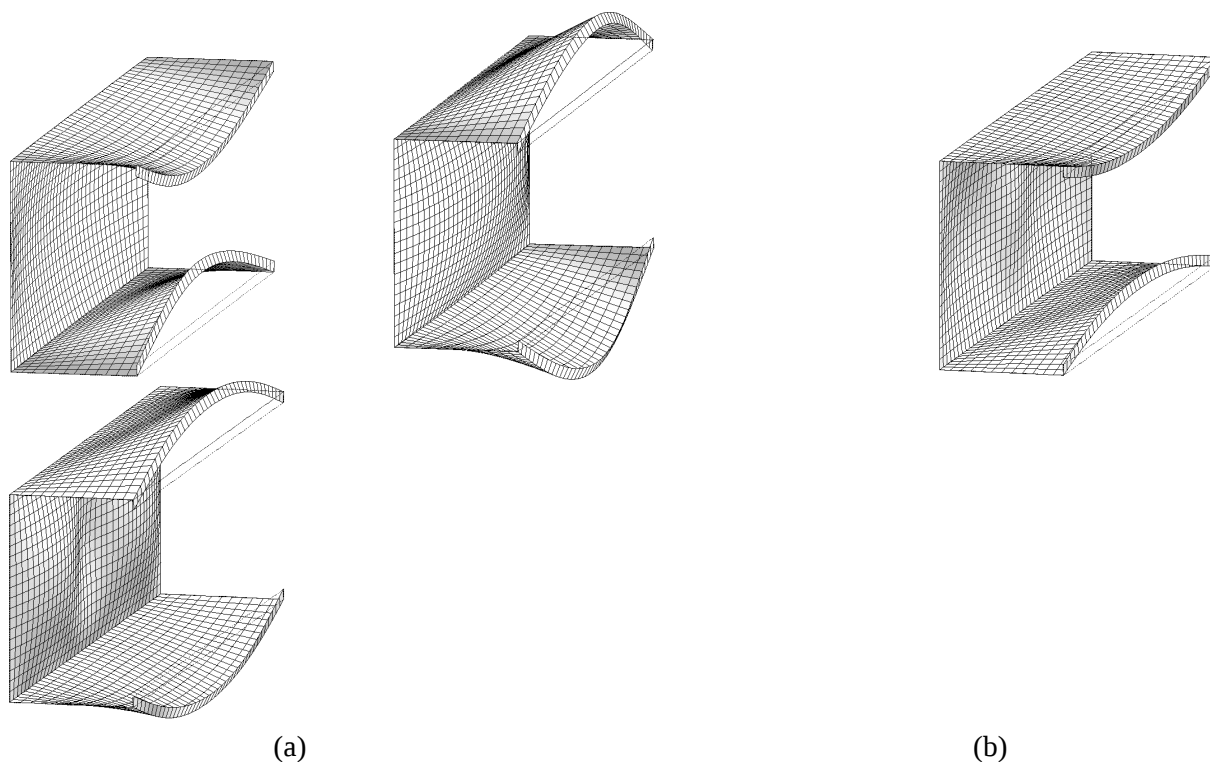


Figura 8 – Configurações deformadas fornecidas pelo ANSYS para colunas (a) não restringidas e (b) restringidas com as secções a “fechar” e a “abrir”, correspondentes a $P=22.0kN$

A observação dos resultados de pós-encurvadura apresentados nas Figuras 7 e 8(a)-(b) conduz aos seguintes comentários:

- (i) As análises baseadas na GBT fornecem trajectórias de pós-encurvadura praticamente “exactas” (*i.e.*, coincidentes com as obtidas através do programa ANSYS) quando incluem os modos de deformação (i_1) **1+3+5+7+15+26**, no caso das colunas não restringidas, e (i_2) **1+3+5+7+9+15+26**, no caso das colunas restringidas – para $-10 < v < +10mm$, as diferenças nunca excedem 3.0%. Note-se, no entanto, que enquanto as análises da GBT envolvem cerca de 84 (colunas não restringidas) ou 95 (colunas restringidas) graus de liberdade, as efectuadas no ANSYS requerem mais de 11300 graus de liberdade.
- (ii) Nas colunas restringidas, as análises que incluem somente os modos convencionais **(1+3+5+7+9)** apenas permitem obter uma boa aproximação da trajectória de equilíbrio até valores da carga aplicada próximos de $P_{cr.R}$. No entanto, a adição do modo de corte **15** à combinação anterior permite melhorar significativamente a precisão dos resultados – as diferenças entre os valores fornecidos pela GBT e pelo ANSYS passam então a ser razoavelmente pequenas (inferiores a 4.5%) até $P \leq 1.2P_{cr.R}$.
- (iii) A Figura 7 mostra que, para $P=22.0kN$, a restrição reduz os deslocamentos máximos dos bordos longitudinais banzo-reforço para 43.8% (secção a “fechar”) e 67.3% (secção a

“abrir”) dos valores que ocorrem nas colunas não restringidas. Note-se ainda que a existência de uma semi-onda distorcional nos banzos “força” a alma das colunas restringidas a deformarem-se simetricamente (ver Fig. 8(b)).

- (iv) A comparação entre as curvas correspondentes às colunas não restringidas que exibem “abertura” e “fechamento” das suas secções mostra a existência de uma clara assimetria do comportamento de pós-encurvadura em relação ao sinal de v – a coluna cujas secções “fecham” tem um comportamento um pouco mais rígido. Esta assimetria foi originalmente detectada por Prola e Camotim (2002), no contexto de resultados de pós-encurvadura distorcional determinados através de análises por faixas finitas com funções “B₃-Spline”. Mais recentemente, esta assimetria foi estudada em profundidade por Camotim e Silvestre (2004), tendo estes autores concluído, a partir dos resultados de análises de pós-encurvadura baseadas na GBT, que é sobretudo devida às diferentes contribuições dos modos de corte nos dois casos – estes modos são responsáveis por consideráveis alterações que ocorrem, ao longo das trajectórias de pós-encurvadura das colunas, no perfil dos deslocamentos axiais e na distribuição das tensões normais instaladas no conjunto banzo-reforço.
- (v) A assimetria do comportamento de pós-encurvadura é bastante mais pronunciada nas colunas restringidas, conforme se pode ver na Figura 7. Muito provavelmente, este facto resulta de a alma se encontrar restringida (*i.e.*, enrijecida), o que faz com que exiba duas semi-ondas (ver a Fig. 8(b) e torna a deformação dos banzos e reforços mais relevante (estas paredes passam a ter menor rigidez relativa) – recorde-se que a deformação por corte dos conjuntos banzo-reforço é precisamente o principal motivo da assimetria do comportamento de pós-encurvadura distorcional destas colunas (Prola e Camotim 2002, e Camotim e Silvestre 2004).

3.3.2 Coluna com secção transversal em I_R

Analisa-se agora colunas com (i) secção transversal em I_R e (ii) comprimento $L=560mm$. Tal como no caso anterior, começou-se por estudar o seu comportamento de estabilidade, através da GBT, tendo-se obtido (i) $P_{cr}=1250.75kN$ e modo de instabilidade praticamente distorcional puro (96.3% de participação do modo 5), no caso das colunas não restringidas, e (ii) $P_{cr,R}=1485.84kN$ e modo de instabilidade “misto” que combina uma participação fortemente dominante do modo 5 (84.1%) com uma contribuição não desprezável do modo 9 (15.9%), no caso das colunas restringidas. Tal como antes, também se incluem nestas

análises imperfeições geométricas iniciais com a forma do modo crítico de instabilidade – no entanto, adopta-se agora uma amplitude igual a $v_0=0.6mm$ ⁶.

As Figuras 9(a)-(c) e 10(a)-(c) mostram os resultados fornecidos pelas análises de pós-encurvadura das colunas não restringidas e restringidas, respectivamente. Nas Figuras 9(a) e 10(a) as curvas a traço cheio e a pontilhado correspondem aos deslocamentos verticais dos conjuntos banzo-reforço, “a abrir” (v_1) e “a fechar” (v_2), na secção de meio vão. Tal como no caso anterior, apresentam-se trajectórias de equilíbrio fornecidas pelo ANSYS (“exactas”) (ii) e pelas análises baseadas na GBT – para além disso, no caso de v_1 , estuda-se a influência do conjunto de modos de deformação incluídos na análise da GBT na precisão dos resultados obtidos. As figuras 9(a) e 10(a) incluem também as configurações deformadas das colunas associadas a $P/P_{cr}=1.40$ e $P/P_{cr,R}=1.40$, obtidas através do ANSYS. Por outro lado,

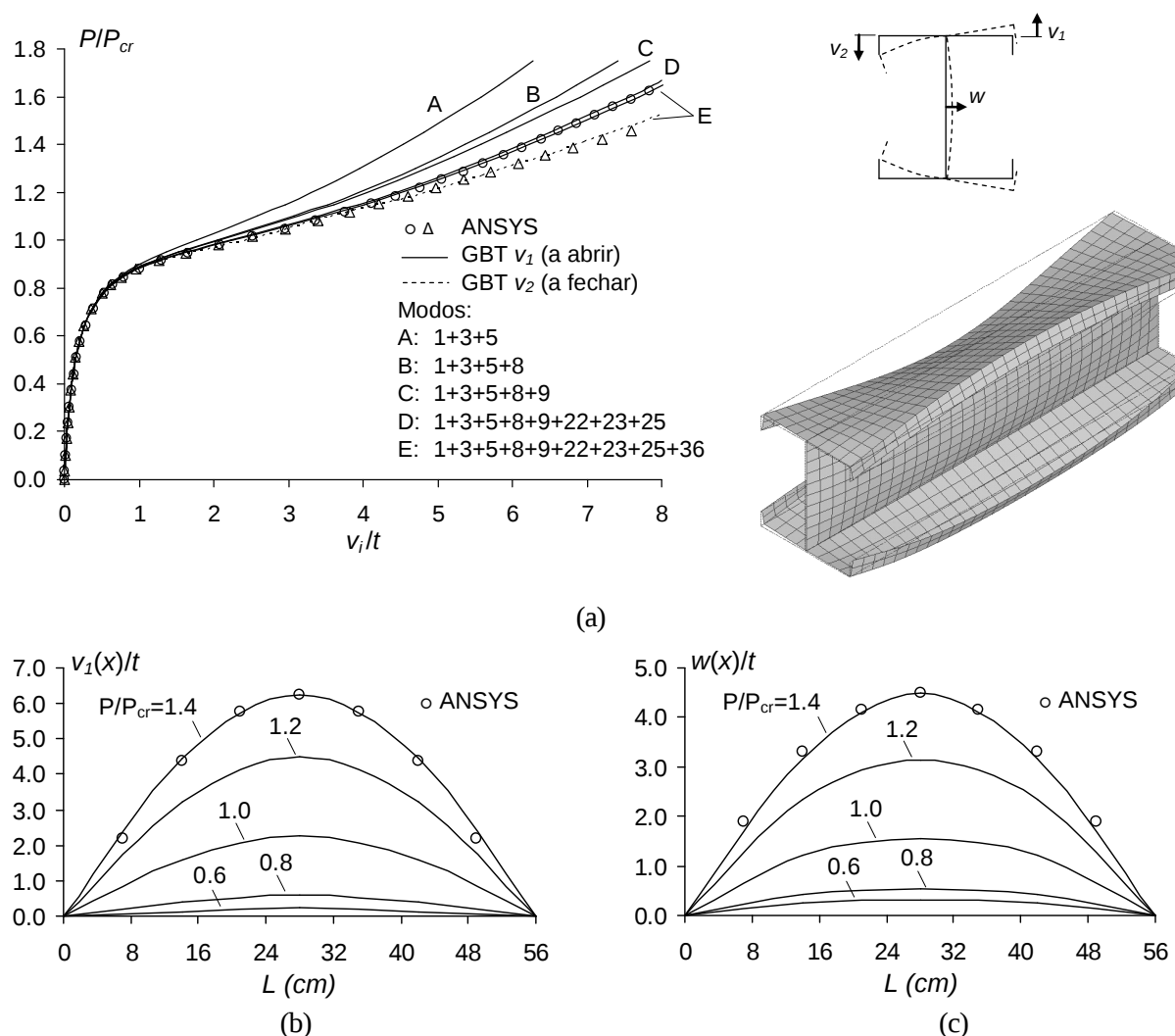


Figura 9 – Coluna em I_R não restringida: (a) trajectórias de equilíbrio e configuração deformada ($P/P_{cr}=1.40$), e evolução dos perfis longitudinais dos deslocamentos (b) v_1 (borda mesa-enrijecedor) e (c) v (eixo axial da coluna)

⁶ Por se tratar de uma secção bissimétrica, o sentido das imperfeições geométricas iniciais não é relevante (basta considerar um deles).

as Figuras 9(b)-(c) e 10(b)-(c) mostram a evolução (i) dos deslocamentos verticais (v_1) do bordo longitudinal banzo-reforço que “abre” (Figs. 9(b) e 10(b)) e (ii) dos deslocamento horizontais (w) do eixo longitudinal da coluna (meia altura da alma – Figs. 9(c) e 10(c)). A análise destes resultados mostra que:

- (i) Em ambas as colunas, a inclusão de apenas os modos convencionais (**1+3+5+8+9**) nas análises da GBT conduz boas aproximações das trajectórias de equilíbrio “exactas” até à vizinhança da carga crítica.
- (ii) A adição dos modos de corte (**22+23+25**) melhora significativamente a precisão das trajectórias de pós-encurvadura da GBT – as diferenças relativamente aos valores “exactos” (ANSYS) são agora muito pequenas em todo o domínio analisado (*e.g.*, na coluna restringida tem-se $v_1/t=4.36$ para $P=1.3P_{cr,R}$, o que corresponde sobrestimar o valor da carga em 4%).
- (iii) Uma nova adição, agora do modo de extensão transversal **36**, conduz a trajectórias de pós-encurvadura praticamente coincidente com as fornecidas pelo ANSYS – de facto, a máxima diferença no valor da carga diz respeito à coluna não restringida, vale 3.4% e ocorre para $v_2/t=7.6$. Faz-se notar de novo a grande eficiência computacional da GBT: as análises envolvem apenas 108 graus de liberdade, enquanto as análises por elementos finitos de casca (ANSYS) requerem mais de 6750.
- (iv) Nas colunas não restringidas observou-se uma diferença surpreendente entre os andamentos das trajectórias de pós-encurvadura relativas aos deslocamentos verticais dos bordos banzo-reforço que “abrem” e “fecham” – de facto, para $P > P_{cr}$, a curva respeitante à “abertura” afasta-se gradualmente da curva relativa ao “fechamento”, *i.e.*, os valores de v_2 tornam-se maiores que os de v_1 . Esta diferença resulta de dois efeitos, traduzidos pelas participações dos modos de deformação **8** (convencional) e **36** (extensão transversal) – enquanto (iv₁) o primeiro é um modo distorcional simétrico em relação à alma (ver Fig. 4), o que significa que faz “aumentar” v_2 e “reduzir” v_1 , (iv₁) o segundo contabiliza o “efeito de arco” devido à flexão transversal da alma, o que faz também “aumentar” v_2 e “reduzir” v_1 . Este último efeito parece ser preponderante, na medida em que a diferença entre as trajectórias de pós-encurvadura relativas a v_1 e v_2 quase não existe nas colunas restringidas – note-se que a restrição localizada diminui consideravelmente a flexão da alma e, portanto, também o “efeito de arco”.

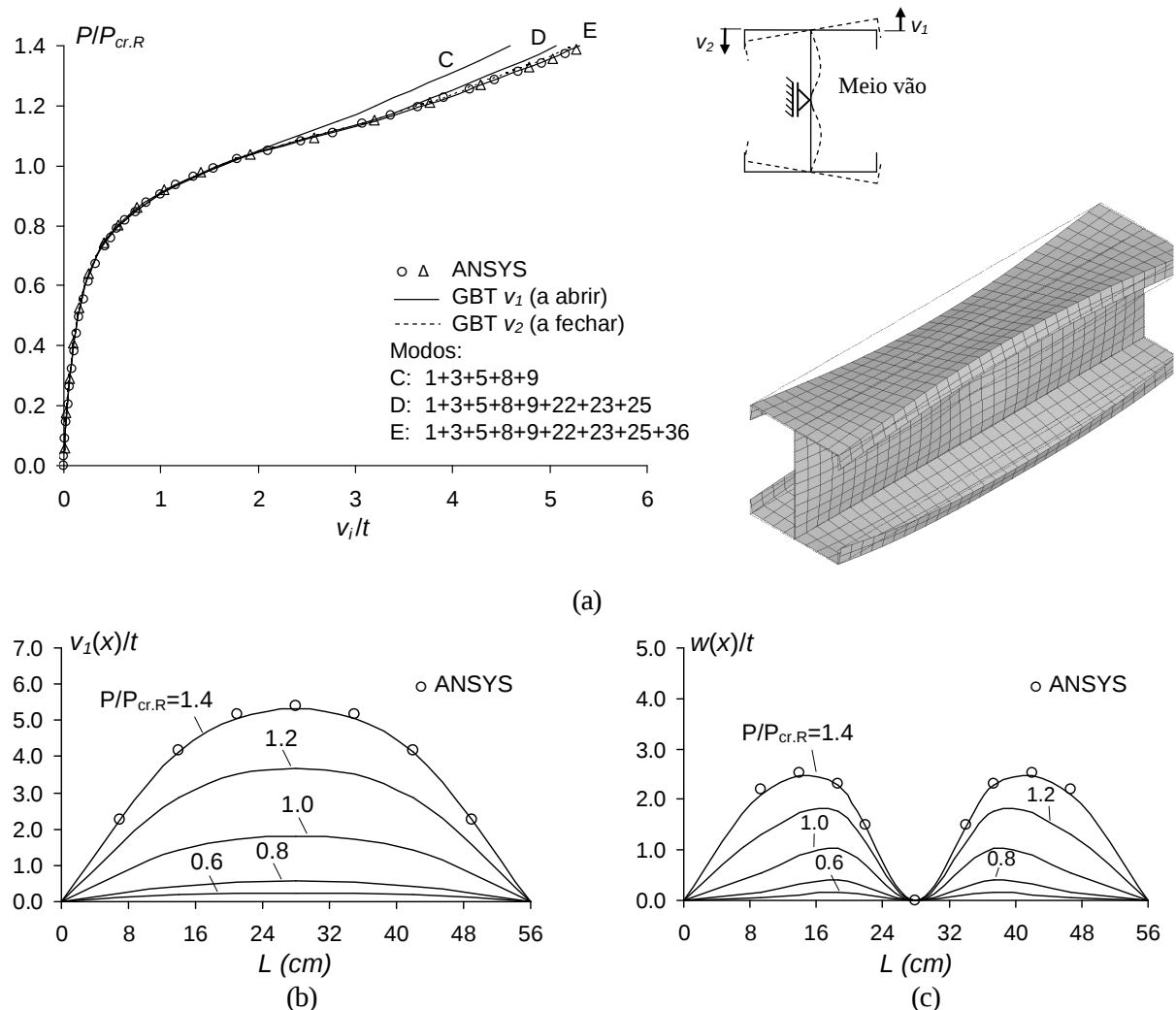


Figura 10 – Coluna em I_R restringida: (a) trajetórias de equilíbrio e configuração deformada ($P/P_{cr,R}=1.40$), e evolução dos perfis longitudinais dos deslocamentos (b) v_1 (bordo banzo-reforço) e (c) v (eixo axial da coluna)

(v) A comparação entre as Figuras 9(b)-(c) e 10(b)-(c) mostra que a restrição diminui em 13.9% e 43.6% os valores máximos dos deslocamentos (v_1) verticais das bordos banzo-reforço que “abrem” e (w) horizontais do eixo axial da coluna (meia altura da alma) – comparação feita para $P=1.4P_{cr}$ e $P=1.4P_{cr,R}$, sem considerar a diferença das cargas críticas. Tal como anteriormente, a dominância do comportamento distorcional (uma semi-onda) “força” a alma da coluna restringida a deformar-se simetricamente.

4 ANÁLISE DE PÓS-ENCURVADURA GLOBAL DE PÓRTICOS

Em análises de pós-encurvadura global baseadas na GBT apenas se consideram os quatro primeiros modos de deformação (os modos de “corpo rígido”) – isto significa que, de entre todas as matrizes C , D e B que figuram no sistema (7), apenas as duas primeiras são

incluídas na formulação, já que as secções não se deformam nos seus próprios planos. Assim, tem-se

$$C_{kh}(\phi_k - \bar{\phi}_k)_{,xxxx} - D_{kh}(\phi_k - \bar{\phi}_k)_{,xx} - C_{kjh}(\phi_{k,xx}\phi_{j,x} - \bar{\phi}_{k,xx}\bar{\phi}_{j,x})_{,x} + \frac{1}{2}C_{hjk}(\phi_{k,x}\phi_{j,x} - \bar{\phi}_{k,x}\bar{\phi}_{j,x})_{,xx} + \frac{1}{2}C_{kijh}(\phi_{k,x}\phi_{i,x}\phi_{j,x} - \bar{\phi}_{k,x}\bar{\phi}_{i,x}\bar{\phi}_{j,x})_{,x} + h.o.t. = q_h \quad (15)$$

sendo de referir que, por incluir apenas modos de deformação globais, esta formulação não linear da GBT pode ser encarada como uma nova aplicação da teoria clássica de Vlasov, utilizando uma “linguagem modal” que proporciona uma visão original e clarificadora sobre vários aspectos do comportamento estrutural⁷.

Uma vez discretizado o pórtico, tratam-se separadamente os nós interiores das barras e os nós de ligação (onde convergem elementos finitos não co-lineares). Nos primeiros, a compatibilização dos graus de liberdade envolve os modos de deformação da GBT (valores e derivadas das suas funções de amplitude $\phi_k(x)$) e é assegurada de forma convencional (*e.g.*, Silvestre e Camotim 2003). O mesmo não sucede no caso dos nós associados às ligações do pórtico, onde garantir a compatibilidade entre os graus de liberdade da GBT dos vários elementos finitos que neles convergem não constitui uma tarefa de fácil solução – este facto advém da natureza modal da GBT e de os graus de liberdade se referirem a sistemas de eixos locais distintos. Para superar esta dificuldade, começa-se por transformar os graus de liberdade *modais* em deslocamentos generalizados do ponto onde se supõe materializada a ligação, em regra o ponto definido pela intersecção dos eixos baricêntricos das várias barras (graus de liberdade *nodais*), uma tarefa realizada com recurso ao conceito de “elemento de nó” (Basaglia *et al.*, 2008). Em seguida, descrevem-se os conceitos e procedimentos envolvidos na obtenção do vector de forças f_F e da matriz de rigidez tangente T_F do pórtico, a partir de matrizes de rigidez elementares *baseadas na GBT*:

- (i) Para assegurar a compatibilidade dos deslocamentos no “elemento de nó”, usa-se a matriz de transformação $[\Omega_F]$, a qual relaciona os graus de liberdade da GBT (barra) e os deslocamentos generalizados nodais (ligação), e é definida pelas expressões

$$\{\tilde{\xi}\} = [\Omega_F]^T \{d_F\} = \begin{bmatrix} [R_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}][R_X][L] \\ 1 \end{bmatrix}^T \{d_F\}$$

$$\{\tilde{\xi}\} = [U_{\tilde{X}} \ U_{\tilde{Y}} \ U_{\tilde{Z}} \ \Theta_{\tilde{X}} \ \Theta_{\tilde{Y}} \ \Theta_{\tilde{Z}} \ \Theta'_{\tilde{X}}]^T \quad (16)$$

⁷ Os autores estão a trabalhar na inclusão de modos de deformação locais na formulação não linear da GBT para pórticos. Os resultados deste trabalho serão divulgados num futuro próximo.

onde (i₁) $\{\tilde{\xi}\}$ é o vector dos deslocamentos generalizados do nó (eixos $\tilde{X}-\tilde{Y}-\tilde{Z}$), (i₂) as componentes do vector $\{d_F\}$ são os graus de liberdade da GBT, (i₃) a matriz $[R_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}]$ descreve a transformação associada a duas rotações sucessivas, a primeira em torno do eixo $\tilde{Z}$ e a segunda em torno do eixo $\tilde{Y}$, definida pelas matrizes $[R_{\tilde{Y}}]$ e $[R_{\tilde{Z}}]$ (ver Fig. 11(a)), (i₄) $[R_X]$ é a matriz de transformação relativa à rotação em torno do eixo da barra X (ver Fig. 11(b)) e (i₅) $[L]$ é a matriz de translação que contabiliza os efeitos da transferência dos eixos que passam nos centros de gravidade (G) e corte (S) para um ponto comum $\tilde{O}$ (ver Fig. 11(b)). As componentes das matrizes $[R_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}]$, $[R_X]$ e $[L]$ são dadas por

$$[R_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}] = \begin{bmatrix} [R_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}]' \\ [R_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}]' \end{bmatrix}$$

$$[R_{\tilde{Y}+\tilde{Z}}]' = [R_{\tilde{Y}}]' \cdot [R_{\tilde{Z}}]' = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{\tilde{Y}} & 0 & -\sin\alpha_{\tilde{Y}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_{\tilde{Y}} & 0 & \cos\alpha_{\tilde{Y}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha_{\tilde{Z}} & -\sin\alpha_{\tilde{Z}} & 0 \\ \sin\alpha_{\tilde{Z}} & \cos\alpha_{\tilde{Z}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[R_X] = \begin{bmatrix} [R_X]' \\ [R_X]' \end{bmatrix} \quad [R_X]' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_X & -\sin\alpha_X \\ 0 & \sin\alpha_X & \cos\alpha_X \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_Z & S_Y & 1 & 0 & 0 \\ C_Z & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -C_Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

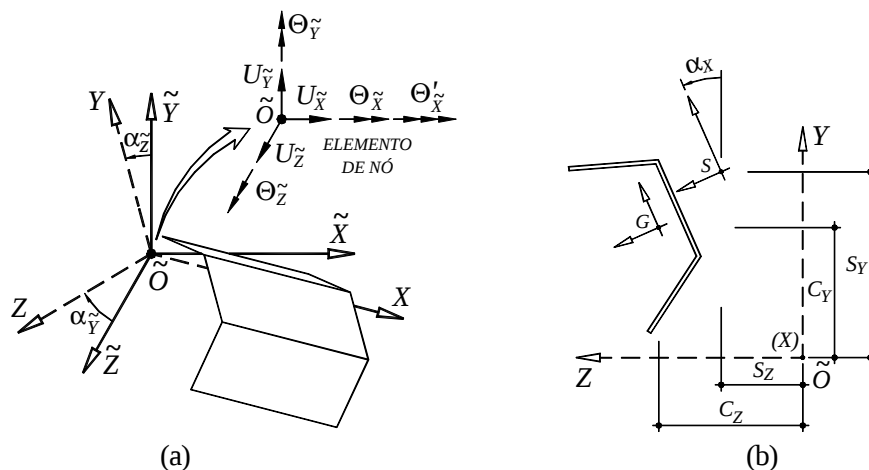


Figura 11 – Sistema de coordenadas (a) global (elemento de nó) e (b) local da barra

Note-se que as componentes do vector $\{\tilde{\xi}\}$ têm origem nos graus de liberdade da GBT $\{d_F\}$ e são obtidas através de uma sequência de rotações: a primeira em torno do eixo da barra X , a segunda em torno do eixo global $\tilde{Z}$ e a última em torno do eixo global $\tilde{Y}$ – refira-se ainda que a alteração da ordem destas rotações pode conduzir a resultados incorrectos.

- (ii) Através da utilização da matriz de transformação definida em (16), obtêm-se, no caso mais geral, 7 graus de liberdade em cada extremidade de barra correspondente ao nó de ligação. Esses dois conjuntos de graus de liberdades satisfazem as relações

$$\{\tilde{\xi}\}_{b_r} = \begin{bmatrix} [I]_{6 \times 6} & \\ & \Gamma \end{bmatrix} \{\tilde{\xi}\}_{a_{r+1}} \quad (20)$$

onde (ii₁) $[I]$ é a matriz identidade e (ii₂) a constante Γ quantifica a “transmissão do empenamento”, *i.e.*, relaciona as derivadas da rotação de torção (para explicação detalhada sobre este conceito, ver Basaglia *et al.*, 2007)⁸.

- (iii) Efetuam-se as operações

$$\tilde{f}_F = [\Omega_F]^T f_F \quad \tilde{T}_F = [\Omega_F]^T T_F [\Omega_F] \quad (21)$$

as quais permitem obter (iii₁) o vector das forças internas $\tilde{f}_F$ e (iii₂) a matriz de rigidez tangente do pórtico, a qual inclui os efeitos da compatibilização dos graus de liberdade em todos os seus nós e está associada a “graus de liberdade mistos” – graus de liberdade da GBT (d_{ki}) nos nós interiores das barras e deslocamentos generalizados “convencionais” ($\tilde{\xi}_i$) nos nós de ligação entre elas.

Após definir o vector das forças internas e a matriz de rigidez tangente, a execução da análise de pós-encurvadura do pórtico envolve sucessivas soluções do sistema de equações não lineares

$$\Delta \tilde{f}_F = \tilde{T}_F \Delta \tilde{d}_M \quad (22)$$

o qual descreve o equilíbrio incremental do pórtico (a partir de um estado de equilíbrio conhecido) – $\Delta \tilde{f}_M$ é o vector das forças incrementais e $\Delta \tilde{d}_M$ é um vector que combina incrementos de (i) deslocamentos nodais da ligação com (ii) graus de liberdade da GBT. Para resolver (22) adopta-se a técnica já utilizada no caso das barras isoladas: iteração baseada no método de Newton-Raphson e numa estratégia de controle de deslocamento. No entanto, como (i) as componentes de $\Delta \tilde{d}_M$ são “mistas” (deslocamentos nodais+modais) e (ii) se pretendem representações *modais* da

⁸ Embora os conceitos de transmissão de empenamento tenham sido desenvolvidos no contexto da análise de estabilidade global de pórticos, eles permanecem válidos quando se realizam análises de pós-encurvadura.

configuração deformada do pórtico (no final de cada incremento), é indispensável voltar a transformar os deslocamentos generalizados relativos aos nós do pórtico em graus de liberdade da GBT – para isso, efectua-se uma operação inversa da definida em (16).

4.1 Exemplo Ilustrativo: Pórtico Simples (em Forma de “L”)

Ilustra-se agora a aplicação da GBT às análises dos comportamentos de pós-encurvadura global plana e espacial do pórtico bi-encastado representado na Figura 12, o qual é formado por duas barras *A* e *B* iguais (secção em U apresentada na Fig. 2 e comprimento $L_A=L_B=500\text{cm}$), dispostas ortogonalmente em forma de “L” e ligadas entre si com os banzos no mesmo plano. O pórtico é actuado por uma carga vertical *P* aplicada no nó de ligação e os resultados fornecidos pela GBT são (i) obtidos com uma discretização em 6 elementos finitos por barra e (ii) validados através da comparação com valores de análises efectuadas no programa ANSYS, discretizando o pórtico em elementos finitos de barra BEAM3 (análise plana) e casca SHELL181 (análise espacial).

Começa-se por apresentar o comportamento de pós-encurvadura do pórtico no seu plano, o qual envolve apenas contribuições dos modos de deformação **1** (extensão axial) e **3** (flexão em torno do eixo de menor inércia) da GBT – os valores da carga crítica obtidos através da GBT e do ANSYS são praticamente idênticos: $P_{cr,GBT}=682.7\text{kN}$ e $P_{cr,ANSYS}=680.8\text{kN}$ (0.28% de diferença). A Figura 13(a) mostra as trajectórias de equilíbrio P/P_{cr} vs. w/L_A (*w* é o deslocamento horizontal a meio vão da coluna) para dois pórticos que só diferem no “sinal” da imperfeição geométrica inicial (forma do modo de instabilidade crítico): é positivo ($w_0=+2.0\text{cm}$) ou negativo ($w_0=-2.0\text{cm}$) consoante a coluna *A* se mova para a direita ou para a esquerda. Para além disso, a Figura 13(b) mostra as configurações deformadas fornecidas pela GBT para $P/P_{cr}=0.91$.

A observação dos resultados apresentados nas Figuras 13(a)-(b) sugere os seguintes comentários:

- (i) O comportamento de pós-encurvadura do pórtico (no seu plano) é assimétrico, estando a trajectória “mais horizontal” associada a valores positivos de *w* (flexão da coluna para a direita).
O comportamento

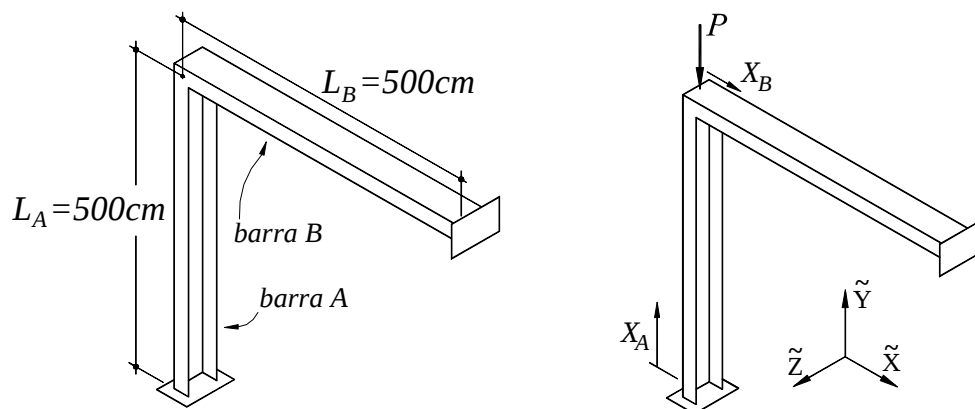


Figura 12 – Geometria, carregamento e condições de apoio do pórtico simples em forma de “L”

de pós-encurvadura assimétrico é uma característica do bem conhecido “pórtico de Roorda” (“Roorda’s frame” – *e.g.*, Rooda 1965 e Silvestre e Camotim 2005), o qual difere do aqui analisado apenas nas condições de apoio (é bi-apoiado, e não bi-encastado). No entanto, a assimetria é mais pronunciada no “pórtico de Roorda”, apresentando uma das trajectórias um ponto limite – esta diferença deve-se, muito provavelmente, à menor rigidez de flexão das barras.

- (ii) Os resultados da GBT e do ANSYS praticamente coincidem, tanto para $w_0 > 0$ como para $w_0 < 0$.

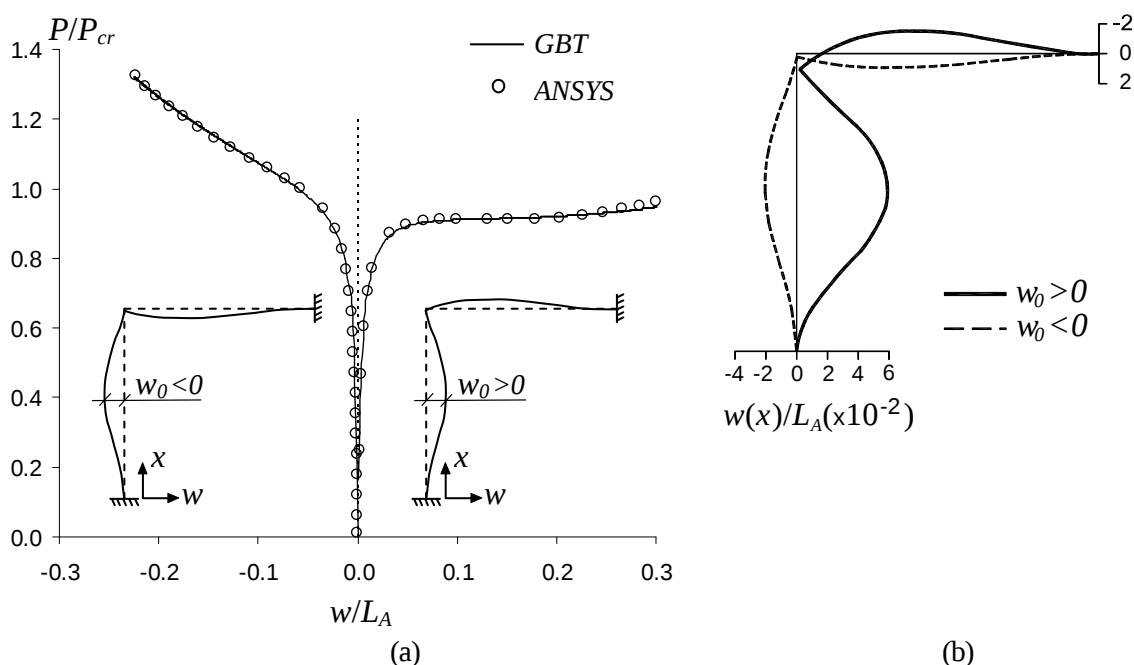


Figura 13 – Comportamento de pós-encurvadura no plano do pórtico: (a) trajectórias de equilíbrio e (b) configurações deformadas ($P/P_{cr}=0.91$)

Em seguida, estuda-se o comportamento de pós-encurvadura do mesmo pórtico no espaço tridimensional. Como as barras se podem agora deformar para fora do plano do pórtico, é

necessário incluir nas análises da GBT todos os modos de deformação globais – aos modos **1** e **3**, incluídos anteriormente, juntam-se os modos **2** (flexão em torno do eixo de maior inércia) e **4** (torção). Nota-se que, devido à presença do modo **4**, é indispensável incorporar nas análises o efeito da transmissão do empenamento na ligação do pórtico – neste caso essa transmissão é *completa e directa*, o que significa tomar $\Gamma=1$ em (20) (ver Basaglia *et al.*, 2008). No que respeita à estabilidade do pórtico, mais uma vez existe uma coincidência quase absoluta entre os valores das cargas críticas fornecidos pela GBT e pelo ANSYS: $P_{cr,GBT}=603.4kN$ e $P_{cr,ANSYS}=606.1kN$ (diferença de 0.44%), tendo o correspondente modo de instabilidade (i) uma elevada contribuição do modo **2** (93%) e (ii) uma participação não desprezável do modo **4** (7%).

A figura 14 mostra as trajectórias de equilíbrio P/P_{cr} vs. w , onde w é agora o deslocamento do nó de ligação do pórtico para fora do seu plano⁹, de dois pórticos que, tal como anteriormente, apenas diferem no “sinal” da imperfeição geométrica inicial, cuja forma é a do modo crítico de instabilidade: positivo ($w_0=+1.0cm$) ou negativo ($w_0=-1.0cm$), consoante o deslocamento seja “para fora” ou “para dentro” do plano do papel (ver a Fig. 14). Finalmente, a Figura 15 mostra os seguintes resultados fornecidos pelas análises baseadas na GBT: (i) as configurações deformadas e (ii) as participações modais relativas às secções de ligação e de meio vão de ambas as barras, relativas ao pórtico com $w>0$ e para um nível de carregamento $P/P_{cr}=0.76$. A observação destes resultados permite extrair as seguintes conclusões:

- (i) O comportamento de pós-encurvadura espacial do pórtico é claramente simétrico instável, com a ocorrência de pontos limite para $P/P_{cr}=0.76$.
- (ii) As trajectórias de equilíbrio fornecidas pela GBT coincidem novamente com os valores obtidos através do ANSYS.
- (iii) Conforme mostra a Figura 15, o comportamento de pós-encurvadura do pórtico envolve flexão-torção em ambas as barras. É importante notar ainda que existe uma contribuição relevante do modo **3** (sobretudo na região de meia altura da coluna), apesar de este modo de deformação não participar no modo crítico de instabilidade do pórtico (e, portanto, não estar incluído na configuração das suas imperfeições geométricas iniciais).
- (iv) A comparação entre as configurações deformadas das secções de meio vão da coluna (barra A) e da viga (barra B) mostra claramente que a configuração deformada do pórtico envolve primordialmente a coluna – este facto não surpreende, na medida em que apenas a coluna se encontra comprimida, o que significa que as deformações da viga se devem quase exclusivamente à compatibilidade no nó.

⁹ Mais precisamente, do ponto de intersecção entre os eixos baricêntricos da coluna e da viga.

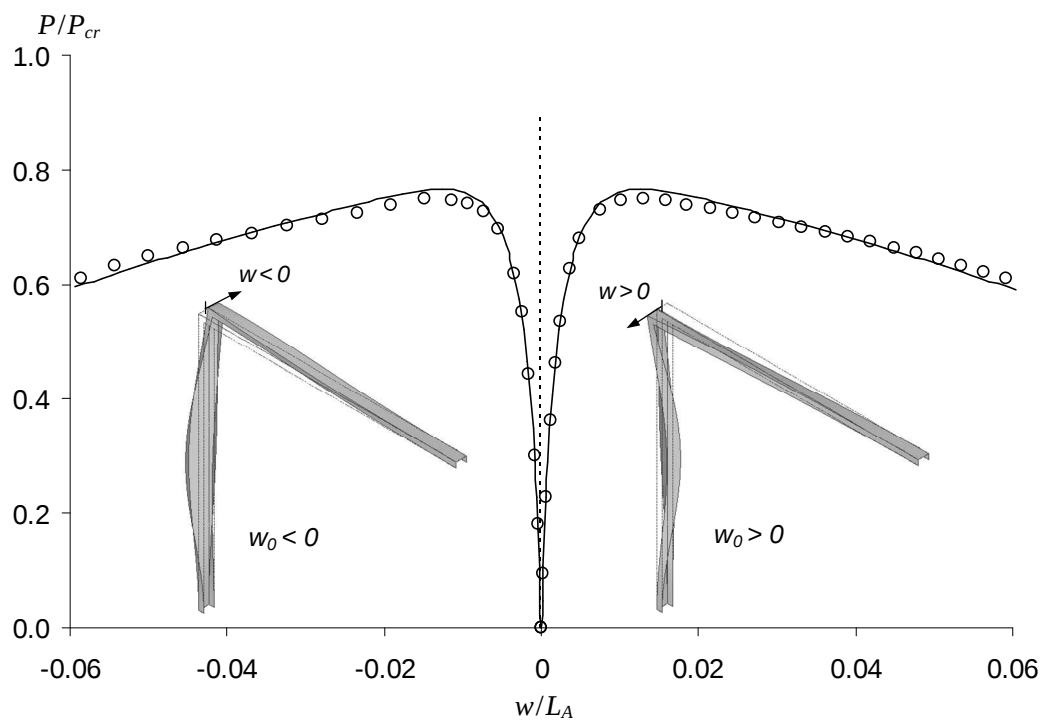
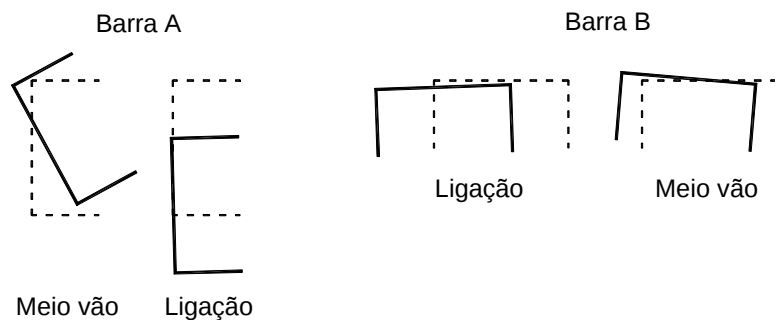


Figura 14 – Comportamento de pós-encurvadura espacial do pórtico: trajetórias de equilíbrio e configurações das imperfeições geométricas iniciais



Barra	Secção transversal	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
A	Meio vão	5.46%	64.76%	23.02%	6.76%
	Ligação	9.87%	89.22%	0.64%	0.27%
B	Meio vão	0.46%	90.07%	7.46%	2.01%
	Ligação	0.64%	89.14%	9.87%	0.35%

Figura 15 – Configurações deformadas e participações modais nas secções de ligação e a meio vão de ambas as barras (%), para $P/P_{cr}=0.76$ e $w>0$ (GBT)

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentaram-se as principais etapas e procedimentos envolvidos na formulação e implementação numérica de dois elementos finitos de barra não lineares, os quais permitem analisar os comportamentos de pós-encurvadura (i) local e global de barras isoladas constituídas com seção de parede fina aberta arbitrária e contendo restrições de deslocamento localizadas e (ii) global de pórticos metálicos formados por barras com seção de parede fina aberta – em ambos casos se contabilizou a influência de inevitáveis imperfeições geométricas iniciais. Abordou-se o estabelecimento dos sistemas de equações de equilíbrio não lineares da GBT, bem como as suas discretizações em elementos finitos de barra, incorporando os efeitos de condições de apoio “não-convencionais” (barras isoladas) ou do comportamento das ligações (pórticos). As soluções destes sistemas de equações não lineares foram obtidas numericamente por meio de uma técnica incremental-iterativa baseada na utilização do método de Newton-Raphson e de uma estratégia de controle de deslocamento.

Para ilustrar a aplicação e as potencialidades dos elementos finitos desenvolvidos, apresentaram-se e discutiram-se resultados numéricos relativos aos comportamentos de (i) pós-encurvadura local e global de barras isoladas com seções em C e I reforçada e exibindo ou não restrições de deslocamento localizadas, e (ii) pós-encurvadura global plana e espacial de um pórtico simples formado por duas barras ortogonais de seção em U dispostas em “L”. A grande maioria dos resultados fornecidos pelas análises baseadas na GBT foram validados através da sua comparação com valores obtidos através de análises de elementos finitos “convencionais” de casca ou barra efectuadas no programa ANSYS – apesar de os números de graus de liberdade envolvidos nas aplicações da GBT serem menores que os requeridos pelas análises do ANSYS (sobretudo no caso das discretizações em elementos de casca), obtiveram-se sempre resultados praticamente coincidentes.

Finalmente, é importante referir que os autores se encontram presentemente a trabalhar na implementação numérica, em linguagem FORTRAN, das formulações dos elementos finitos de barra não lineares baseados na GBT que foram apresentados neste trabalho. Essa nova implementação irá substituir a implementação simbólica, efectuada no programa MAPLE, que tem sido utilizada até agora. Esta substituição permitirá melhorar substancialmente a capacidade de cálculo, tornando possível analisar o comportamento de pós-encurvadura local e global de pórticos formados por várias barras com seção de parede fina e exibindo condições de apoio e carregamentos arbitrários – os resultados deste trabalho em curso serão divulgados num futuro próximo.

AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece o apoio financeiro da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) do Brasil, através da bolsa nº BEX 3932/06-0.

REFERÊNCIAS

Basaglia C, Camotim D e Silvestre N (2008). Global buckling analysis of plane and space thin-walled frames in the context of GBT, *Thin-Walled Structures*, **46**(1), 79-101.

Basaglia C, Camotim D e Silvestre N (2009). GBT-Based local, distortional and global buckling analysis of thin-walled steel frames, *Thin-Walled Structures*, **47**(11), 1246-1264.

Boissonnade N e Degée H (2005). Analysis of tapered steel frames using beam elements and comparison with shell modelling, *Proceedings of 4th European Conference on Steel and Composite Structures* (EUROSTEEL 2005 – Maastricht, 8-10/6), B. Hoffmeister e O. Hechler (eds.), 1.4-33–1.4-40.

Camotim D e Silvestre N (2004). GBT distortional post-buckling analysis of cold-formed steel lipped channel columns and beams, *Program and Book of Abstracts of 17th ASCE Engineering Mechanics Conference* (EM2004 – Newark, 13-16/6), 38-39, 2004. (artigo completo em CD-ROM).

Camotim D, Silvestre N, Gonçalves R e Dinis PB (2004). GBT analysis of thin-walled members: new formulations and applications, *Thin-Walled Structures: Recent Advances and Future Trends in Thin-Walled Structures Technology* (International Workshop – Loughborough, 25/6), J. Loughlan (Ed.), Canopus Publishing Ltd., 137-168.

Camotim D, Silvestre N, Gonçalves R e Dinis PB (2006). GBT-based structural analysis of thin-walled members: overview, recent progress and future developments, *Advances in Engineering Structures, Mechanics and Construction* (SMCD 2006 – Waterloo, 14-17/5), M. Pandey, W.-C. Xie, L. Chu (Eds.), Springer, 187-204.

Camotim D, Basaglia C e Silvestre N (2008a). GBT buckling analysis of thin-walled steel frames, *Proceedings of Fifth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures* (CIMS 2008), K. Rasmussen, T. Wilkinson (eds.), Sydney, 1-18.

Camotim D, Silvestre N, Basaglia C e Bebiano R (2008b). GBT-based buckling analysis of thin-walled members with non-standard support conditions, *Thin-Walled Structures*, **46**(7-9), 800-815.

Dinis PB, Camotim D e Silvestre N (2006). GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrarily ‘branched’ open cross-sections, *Thin-Walled Structures*, **44**(1), 20-38.

Kim SE e Kang KW (2002). Large-scale testing of space steel frame subjected to non-proportional loads, *International Journal of Solids and Structures*, **39**(26), 6411-6427.

Prola LC e Camotim D (2002). On the distortional post-buckling behavior of cold-formed lipped channel steel columns, *Proceedings of Structural Stability Research Council Annual Stability Conference*, (Seattle 24-26/4), 571-590.

Roorda J (1965). Stability of structures with small imperfections, *Journal of the Engineering Mechanics Division* (ASCE), **91**(1), 87-106.

Schardt R (1989). *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*, Springer-Verlag, Berlin. (alemão)

Silvestre N e Camotim D (2002). First-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials, *Thin-Walled Structures*, **40**(9), 755-789.

Silvestre N e Camotim D (2003). Non-linear generalised beam theory for cold-formed steel members, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **3**(4), 461-490.

Silvestre N e Camotim D (2005). An asymptotic-numerical method to analyze the post-buckling behavior, imperfection- sensitivity and mode interaction in Frames”, *Journal of Engineering Mechanics* (ASCE), **131**(6), 617-632.

Silvestre N e Camotim D (2006). Local-plate and distortional postbuckling behavior of cold-formed steel lipped channel columns with intermediate stiffeners, *Journal of Structural Engineering* (ASCE), **132**(4), 529-540.

Swanson Analysis Systems Inc (2004). *ANSYS Reference Manual* (version 8.1), Canonsburg, PA, USA.

Post-buckling behaviour of thin-walled steel members and frames: application of generalised beam theory (gbt)

Abstract

This paper presents the development and illustrates the application of two beam finite element formulations based on Generalised Beam Theory (GBT) that are intended to analyse the (i) local and global post-buckling behaviour of thin-walled steel isolated members, possibly exhibiting localised restraints, and (ii) the global post-buckling behaviour of thin-walled steel frames. One begins by briefly reviewing the main concepts and procedures involved in establishing the GBT system of non-linear equilibrium equations. Then, one addresses the steps involved in (i) discretising these equations by means beam finite elements that incorporate the influence of either non-standard support conditions (isolated members) or the joint behaviour (frames), and (ii) solving the ensuing system of non-linear (algebraic) equations. Finally, the application and capabilities of the proposed GBT beam finite elements are illustrated through the presentation and discussion of numerical results concerning (i) the local and global post-buckling behaviour of columns with and without localised displacement restraints and (ii) the in-plane and spatial global post-buckling behaviour of a simple “L-shaped” frame. For validation purposes, most of the results obtained are also compared with values yielded by beam and shell finite element analyses carried out in the commercial code ANSYS.

Key words: Beam finite elements, Geometrically non-linear formulation, Generalised Beam Theory, Local/global post-buckling behaviour, Thin-walled steel members, Thin-Walled steel frames.

1 INTRODUCTION

The structural efficiency of slender steel frames built from also slender (locally and globally) thin-walled members can only be adequately assessed after acquiring in-depth information concerning its buckling and post-buckling behaviour, which involves (i) identifying the relevant buckling modes, (ii) evaluating the associated bifurcation stress and (iii) determining the corresponding post-buckling equilibrium paths and ultimate strengths. However, since these frames are often formed by open-section thin-walled members, which exhibit a very low torsional stiffness and are highly susceptible to local (local-plate and/or distortional) and global deformations, the assessment of their structural behaviour constitutes a very complex task (*e.g.*, Kim and Kang 2002). Indeed, in the context of numerical analysis, this task can only be rigorously performed by resorting to shell finite element analysis (*e.g.*, Boissonnade and Degée 2005), an approach that requires an enormous computational effort (including the data input and result interpretation).

It is now well established that one-dimensional (beam finite element) models based on GBT (Generalised Beam Theory) provide a very illuminating and computationally efficient tool to perform elastic analyses of thin-walled members and frames – GBT is a beam theory enhanced with folded-plate concepts that was originally conceived by Schardt (1989) and has been extensively

upgraded in the last few years (*e.g.*, Camotim *et al.* 2004, 2006, 2008a). In particular, it is now possible to assess (i) the first-order and buckling behaviours of members and frames with arbitrary cross-section shapes, support conditions and loadings, and (ii) the post-buckling behaviour of unrestrained isolated members (*e.g.*, Silvestre and Camotim 2003, 2006).

The objective of this work is to provide the current state of an ongoing investigation aimed at extending the above GBT approach to encompass also local and global *post-buckling* analyses of thin-walled steel members with localised restraints and global *post-buckling* analyses of thin-walled steel frames. In order to provide a better grasp of the concepts and procedures involved in the proposed GBT-based approach, one presents and discusses numerical results concerning (i) the local and global post-buckling behaviour of unrestrained and restrained columns, and (ii) the in-plane and spatial global post-buckling behaviour of a simple “L-shaped” frame built from channel members. For validation purposes, most GBT-based results are compared with values yielded by beam and shell finite element analyses carried out in the code ANSYS (SAS, 2004).

2 CROSS-SECTION ANALYSIS: BRIEF OVERVIEW

This section includes a brief overview of the most important concepts involved in the performance of a GBT *cross-section analysis*: (i) identification of the deformation modes and (ii) evaluation of the corresponding modal mechanical properties (see Figs. 3-5). The cross-section analysis involves a set of fairly complex sequential operations, already described in detail by (i) Silvestre and Camotim (2002) and Dinis *et al.* (2006), for buckling analysis, and (ii) Silvestre and Camotim (2003), for post-buckling analysis.

3 MEMBER LOCAL AND GLOBAL POST-BUCKLING ANALYSIS

This section reports the main concepts, steps and procedures involved in the post-buckling analysis of thin-walled members exhibiting arbitrary support conditions. Moreover, one presents and discusses numerical results concerning the local and distortional post-buckling behaviour of restrained and unrestrained simply supported thin-walled steel columns.

3.1 Beam finite element formulation

After performing the cross-section analysis, one obtains the member GBT system of non-linear equilibrium equation (one per deformation mode), expressed in terms of modal

amplitude functions (see Eq. (7)). While the second-order tensor components (C_{kh} , D_{kh} , B_{kh}) characterise the cross-section linear behaviour, the third (C_{kjh} , etc.), fourth (C_{kijh} , etc.) and higher-order (*h.o.t.*, not shown in (3)-(4) and (8)) ones are associated with its geometrically nonlinear behaviour. Note that the global modes **1** (axial extension – C_{11} is the axial stiffness), **2+3** (major and minor axis bending – C_{22} and C_{33} are the bending stiffness values) and **4** (torsion – C_{44} and D_{44} are the warping and St. Venant torsion stiffness values) are characterised by $B_{kh}=0$, since they involve only cross-section rigid-body motions. On the other hand, all the remaining deformation modes ($k \geq 5$) exhibit (i) primary and secondary warping displacements and/or (ii) cross-section in-plane deformation, thus leading to non-null C_{ik} , D_{ik} , B_{ik} components, with no obvious mechanical interpretation – this feature lack is shared by all higher-order mechanical properties (even the rigid-body mode ones).

The solution of the system of non-linear equilibrium equation can be obtained by means of a GBT-based beam finite element formulation analogous to the one developed and implemented by Silvestre and Camotim (2003). The ensuing (discretised) system of non-linear algebraic equations is numerically solved by means of an incremental-iterative technique based on Newton-Raphson's method and adopting a displacement control strategy.

3.2 Support conditions: localised displacement restraints

In order to incorporate the restraints into the analysis, one must impose appropriate *constraint conditions* that vary from case to case (*e.g.*, Camotim *et al.* 2008b) and are included in the member global internal force vector and stiffness matrix through the operations defined by Eqs. (12) and (13).

3.3 Illustrative examples

In order to validate and illustrate the application and capabilities of the derived GBT-based beam finite elements, in this subsection one presents and discusses numerical results concerning the local, distortional and global post-buckling behaviour of simply supported lipped channel and lipped I-section columns with and without the mid-span mid-web flexural displacement restrained. These uniformly compressed columns (i) exhibit the cross-section dimensions shown in Figure 2, (ii) have length $L=300mm$ (lipped channel) and $L=560mm$ (lipped I-section), and (iii) contain critical-mode initial geometrical imperfections.

Figures 7, 9(a) and 10(a) display post-buckling equilibrium paths concerning the unrestrained and restrained columns and determined by means of geometrically non-linear (i) *shell* (ANSYS) and (ii) *beam* (GBT) finite element analyses. It is worth noting that the GBT results were obtained by means of analyses including five selected deformation mode sets.

4 FRAME GLOBAL POST-BUCKLING ANALYSIS

This section reports the determination of the overall frame non-linear finite stiffness matrices, which incorporate the frame joints. Since one deals exclusively with *global* post-buckling analysis, only the first four (rigid-body) deformation modes have to be considered. This means that, out of matrices $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ and $\mathbf{B}$ appearing in system (7), only the first two need to be retained (there is no cross-section in-plane deformation).

After performing the (beam) finite element discretisation of the frame, one must handle separately the degrees of freedom associated with (i) the member internal nodes or end supports and (ii) the nodes corresponding to frame joints. In the former, one considers always GBT (modal) degrees of freedom – this can be done because the compatibility between them is trivially ensured, as in isolated member (Silvestre and Camotim 2003). The same is not true for the joint nodes, where guaranteeing the compatibility between the GBT degrees of freedom of the converging finite element end sections it is not a straightforward matter – this stems from their modal nature and the fact that they are referred to distinct (member) coordinate systems. In order to overcome this difficulty, one must first “transform” the modal degrees of freedom into *nodal* generalised displacements of the point where the joint is assumed to take place a task carried out by resorting to a “*joint element*” concept (*e.g.*, Basaglia *et al.* 2008).

Once the frame global internal force vector and tangent stiffness matrix are obtained (through the operations defined by Eq. (21)), the determination of the frame post-buckling equilibrium paths requires the successive solution of non-linear equation systems describing the frame incremental equilibrium from a known equilibrium state (see Eq. (22)).

4.1 Illustrative examples

In order to validate and illustrate the application and capabilities of the proposed GBT-based non-linear beam finite element approach, in this subsection one presents and discusses numerical results concerning the global elastic post-buckling behaviour of the simple “L-shaped”

frame depicted in Figure 12, which is formed by two fixed-ended equal-length orthogonal plain channel members (i) with identical cross-sections (dimensions given in Fig. 2) and (ii) connected with flange continuity. The frame is acted by a vertical load (P) applied at the joint and one analyses both the in-plane (see Fig. 13) and spatial (see Figs. 14-15) global post-buckling behaviours – in all the cases, account was taken for the presence of unavoidable initial geometrical imperfections.

5 CONCLUSION

Besides providing a quick overview of the paper content, one highlighted the very high numerical efficiency of the proposed non-linear GBT beam finite element formulations. Indeed, virtually exact post-buckling results were obtained with rather small numbers of degrees of freedom (orders of magnitude below those required to perform equally accurate ANSYS analyses) – note that the maximum difference between the GBT and ANSYS values never exceeded 3.5%.