

DESENVOLVIMENTO DE UMA CONSTANTE PARA O CÁLCULO DE CONCENTRAÇÕES DE TENSÕES EM VIGAS COM FURO CENTRAL SUBMETIDAS À FLEXÃO NÃO UNIFORME

Júlio Alves da Silva Neto¹, Guilherme Oliveira Rabelo², Andressa Lena Mota Palhano³,
Victor Levi de Melo Oliveira⁴, Daniel Barbosa Mapurunga Matos⁵, Ítalo Linhares Salomão^{6†}.

Resumo: Singularidades que geram concentração de tensão são comuns de serem encontradas no nosso dia-a-dia e, muitas vezes, não recebem o devido tratamento para esse efeito. Estudos mostram coeficientes capazes de determinar os valores desse acúmulo de tensão, mas, em sua maioria, para peças submetidas à flexão pura. No entanto, esse tipo de solicitação não é a mais presente em situações reais, portanto, buscando trabalhar uma situação mais corriqueira, estudou-se o efeito da flexão não uniforme atuando em vigas e os efeitos gerados quando existem aberturas na mesma. Através do programa *Robot Structural Analysis*, que utiliza o método dos elementos finitos, foram feitas diversas modelagens de vigas para determinar-se os mapas de tensões, foi visto, então, que a flexão não uniforme produz três pontos de concentração e, a partir desses valores, buscou-se um padrão entre os valores de tensão, as alturas das vigas e o tamanho das aberturas, obtendo-se equações capazes de determinar os valores críticos de tensão para que possa ser feita a devida armadura auxiliar dessa inconstância geométrica. Estas equações, entretanto, não estão restritas apenas ao intervalo de alturas em que as modelagens foram produzidas.

Palavras-chave: Concentração de tensão; Flexão não uniforme; elementos finitos.

1. INTRODUÇÃO

A distribuição de tensão em um componente estrutural é determinante para a escolha adequada, tanto da geometria como do material da peça que será utilizada. Descontinuidades geométricas acarretam na redistribuição das linhas de tensão no elemento estrutural, podendo

¹ Graduado em Engenharia Civil pela Universidade de Fortaleza; Ceará - Brasil; julioneto7@edu.unifor.br

² Graduado em Engenharia Civil pela Universidade de Fortaleza; Ceará - Brasil;
guilhermeorabelo@edu.unifor.br

³ Graduada em Engenharia Civil pela Universidade de Fortaleza; Ceará - Brasil; andressapalhano@edu.unifor.br

⁴ Graduado em Engenharia Civil pela Universidade de Fortaleza; Ceará - Brasil; victor.levi.mo@edu.unifor.br

⁵ Graduando em Engenharia Civil pela Universidade de Fortaleza; Ceará - Brasil; danielbmmatos@edu.unifor.br

⁶ Professor do curso de Graduação em Engenharia Civil da Universidade de Fortaleza e Mestre em estruturas pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro; Ceará – Brasil; italosalomao@unifor.br

[†] Autor para correspondência(italosalomao@unifor.br)

dispersar a tensão ou concentrá-la. Quando não levada em consideração na análise estrutural, o fenômeno de concentração de tensão pode comprometer a sua integridade, causando manifestações patológicas e até sua ruína.

Em estudos sobre a concentração de tensão, para se determinar o valor da tensão máxima ($\sigma_{\max}$), que é gerado pela descontinuidade geométrica na viga, usa-se uma constante K, que, multiplicada pelo valor da tensão nominal (σ_{nom}), determina o valor da concentração (Equação 1). Para a descoberta do fator K, são utilizados diversos ábacos, que dependem do carregamento e da geometria da peça.

$$\sigma_{\max} = K \cdot \sigma_{\text{nom}} \quad (1)$$

Ao ser submetida a um dado carregamento, a seção transversal do componente estará sujeita aos diversos esforços internos que, por sua vez, podem ser combinados de diferentes maneiras. Quando um elemento está sujeito às solicitações de momento fletor e esforço cortante, concomitantemente diz-se que o mesmo está submetido à flexão não uniforme. “A flexão não uniforme refere-se à flexão na presença de forças cortantes, o que significa que o momento fletor varia conforme nos movemos ao longo do eixo da viga.” (GERE; GOODNO, 2010).

O estudo da concentração de tensão em elementos estruturais ainda não abrange todos os diversos tipos de carregamento a que um elemento pode estar sujeito. O objetivo deste trabalho é estudar a distribuição de tensões em uma peça com furo central submetida à flexão não uniforme, analisar os pontos nos quais ocorrem o fenômeno de concentração de tensão, bem como gerar equações e ábacos que auxiliem na descoberta do fator de concentração de tensão K e tornem a realização prática deste estudo.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para o presente estudo, faz-se necessário trabalhar com conceitos de tensão normal e de cisalhamento, flexão pura, estado plano de tensão (EPT), transformação de tensão e entender como se distribuem as linhas de tensões principais para a situação problema.

Vigas submetidas à flexão não uniforme produzem tensões internas, normais (tração ou compressão) e tangenciais (cisalhamento). Hibbeler (2010) demonstra em sua obra que a parcela de energia ocasionada pelo cisalhamento pode ser desconsiderada sem grandes prejuízos, principalmente em elementos esbeltos. No entanto, para vigas curtas e robustas, essa parcela passa a ter maior influência nos resultados. Assim, o valor da tensão de cisalhamento pode ser calculado a partir da Equação 2.

$$\tau_x = \tau_y = \frac{Q}{b \cdot I_z} \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y \cdot d \quad (2)$$

Onde τ é a tensão de cisalhamento no ponto desejado, Q é o esforço de cisalhamento interno resultante, I_z é o momento de inércia da área da seção transversal em torno do eixo que ocorre a flexão, que varia de acordo com o tamanho do furo na viga, b é a largura da seção da área transversal e a integral corresponde ao momento estático da parte destacada na Figura 1.

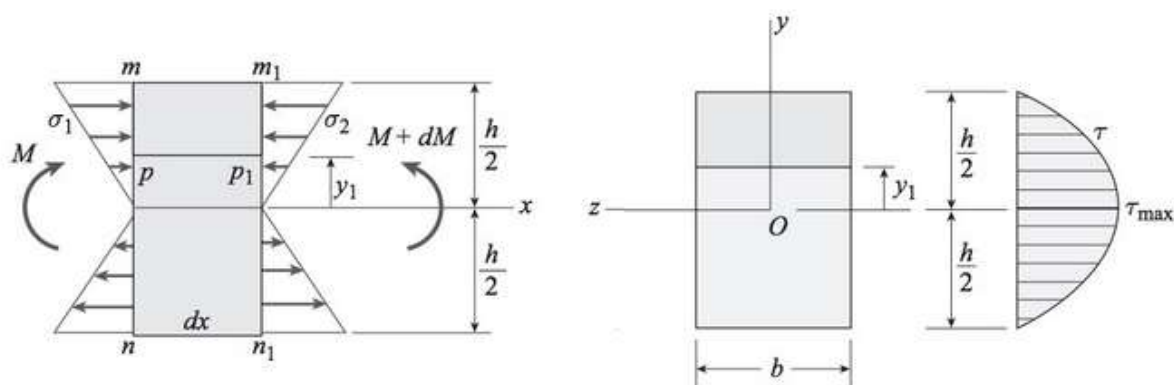


Figura 1 – Diagrama de esforços internos de momento fletor e esforço cortante. Fonte: Gere e Goodno (2010, adaptado)

Na determinação das tensões nominais (σ_{nom}) das vigas, foram utilizadas as Equações 3 e 4, obtidas a partir da equação de tensão normal na flexão simples. O momento de inércia utilizado nas equações, foram calculados em função da geometria apresentada na seção transversal que secciona o furo (Seção A-A), ilustrada na Figura 2:

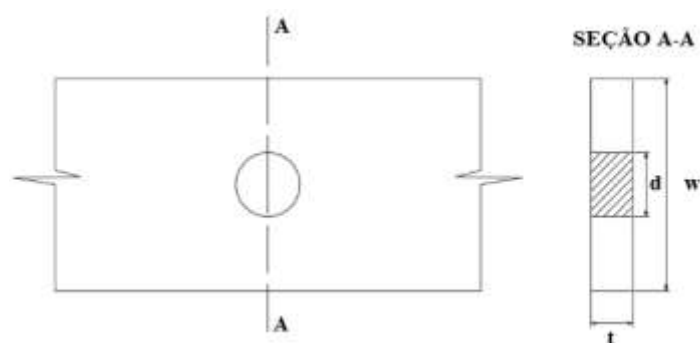


Figura 2 – Seção transversal de uma viga com furo

$$\sigma = \frac{M.d}{t.(w^3-d^3)} \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{M.w}{t.(w^3-d^3)} \quad (4)$$

Onde:

- M: Momento Fletor;
- y: Distância do baricentro da seção analisada até o ponto desejado;
- I: Momento de Inércia;
- d: Diâmetro do furo;
- w: Altura da viga;
- t: Espessura da peça.

Para determinar o coeficiente de concentração K para a flexão não uniforme foi utilizada a Equação 1, onde a tensão máxima σ_{max} é obtida através de modelagens computacionais, usando o método dos elementos finitos, e a tensão nominal σ_{nom} determinada por meio das equações citadas nas literaturas em estudo.

“Dois parâmetros são suficientes para descrever o comportamento mecânico das

estruturas em estado plano, caso elas tenham um comportamento isotrópico e linear-elástico, que são o módulo de elasticidade longitudinal E e o coeficiente de Poisson ν .” VAZ (2011). A matriz de tensão principal do elemento toma a forma como apresentado a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Para a realização deste trabalho foram considerados materiais elástico lineares, validando, assim, o uso da teoria da elasticidade. Segundo Villaça e Garcia (1998), as tensões principais num elemento sob regime elástico linear são obtidas através da rotação adequada dos eixos de um elemento infinitesimal na estrutura, de modo que as tensões de cisalhamento sejam nulas. O uso desta teoria para este tipo de estudo é validado por Yesil (2017) em sua obra que cita: “A resistência dos elementos estruturais contendo buracos está entre os problemas clássicos da teoria da elasticidade. [...] Os furos, como geradores de tensão, podem reduzir a capacidade de trabalho dos elementos estruturais.”

Neste estudo, para o cálculo das tensões principais nos pontos de concentração, foi utilizada a ferramenta de transformação de tensão, utilizando a Equação 5, retirada da obra de Gere e Goodno (2010), que possibilita encontrar o ângulo (θ) de rotação dos eixos para que o cisalhamento seja nulo.

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (5)$$

Segundo Beer e Johnston (1995), serão encontrados dois valores para o ângulo θ , sendo estes defasados de 90° entre si. Os dois ângulos resultam no mesmo valor de tensão principal e, conseqüentemente, na mesma orientação da partícula infinitesimal.

A partir das equações supracitadas, é possível plotar as tensões conforme a Figura 3, que “mostra as trajetórias das tensões para uma viga em balanço, cada uma dessas curvas indica a direção de uma tensão principal que tem valor constante, as linhas cheias representam a direção das tensões de tração e as tracejadas, a direção das tensões de compressão.” (HIBBELER, 2010).

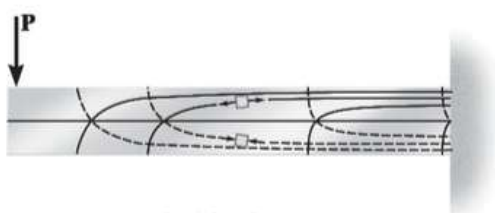


Figura 3 - Trajetória das tensões para viga em balanço, submetida à ação de uma carga concentrada na extremidade livre

Fonte: Hibbeler (2010)

3. METODOLOGIA

Para o cálculo das tensões de flexão não pura, foi utilizado o método dos elementos finitos, que consiste na obtenção de resultados, como deslocamentos e tensões, através da divisão de um objeto contínuo em elementos mais simples, constituindo uma malha formada por nós. A modelagem matemática empregada neste trabalho é delineada a partir de

elementos de placa de 4 nós, sendo 6 graus de liberdade por nó.

As relações constitutivas empregadas no modelo são baseadas no regime linear elástico, com chapas de 2 cm de espessura, modeladas em aço de módulo de elasticidade 210 GPa. Devido o estudo avaliar apenas os valores de tensão em elementos isostáticos, o valor do módulo de elasticidade não interfere nos resultados do estudo.

Na validação do melhor modelo a ser estudado, foram consideradas quatro combinações de carregamento que representam a situação de flexão não pura: uma viga biapoiada (Figura 4a e Figura 4b) e uma viga com uma extremidade engastada e outra livre de restrições (Figura 5a e Figura 5b), onde ambos os modelos apresentam um furo central e são submetidos a uma situação de carregamento pontual e distribuído, a fim de gerar um momento fletor igual a 5 kN.m no ponto onde a abertura está inserida.

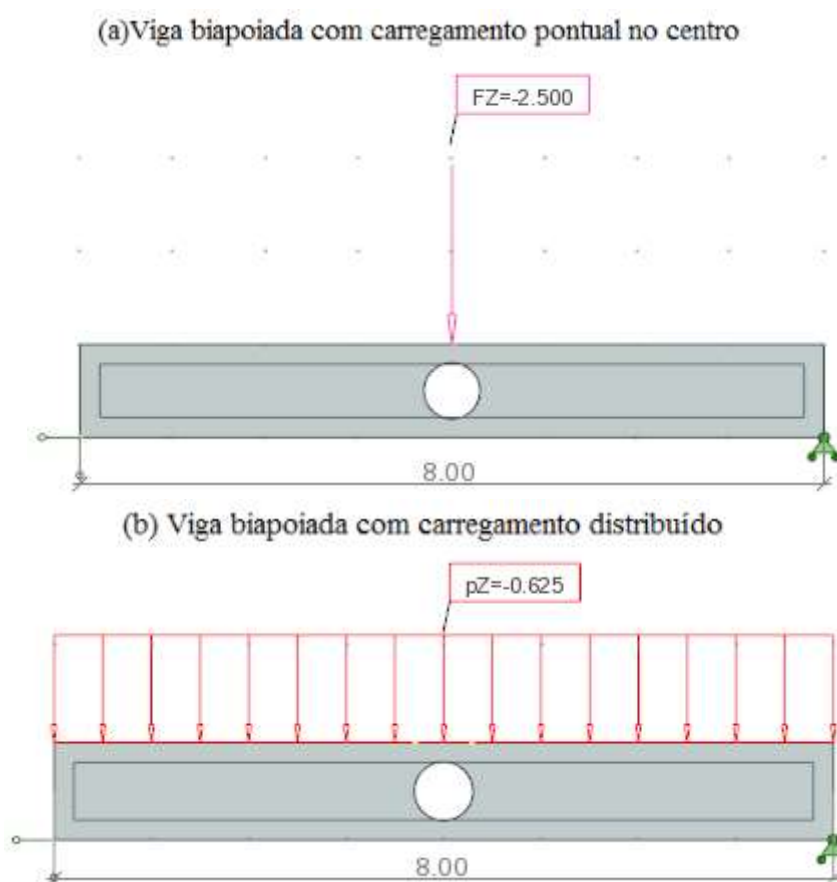


Figura 4 - Viga Biapoiada com Furo Central e Carregamentos Pontual e Distribuído.
Distância em metros, cargas pontuais em kN e cargas distribuídas em kN/m

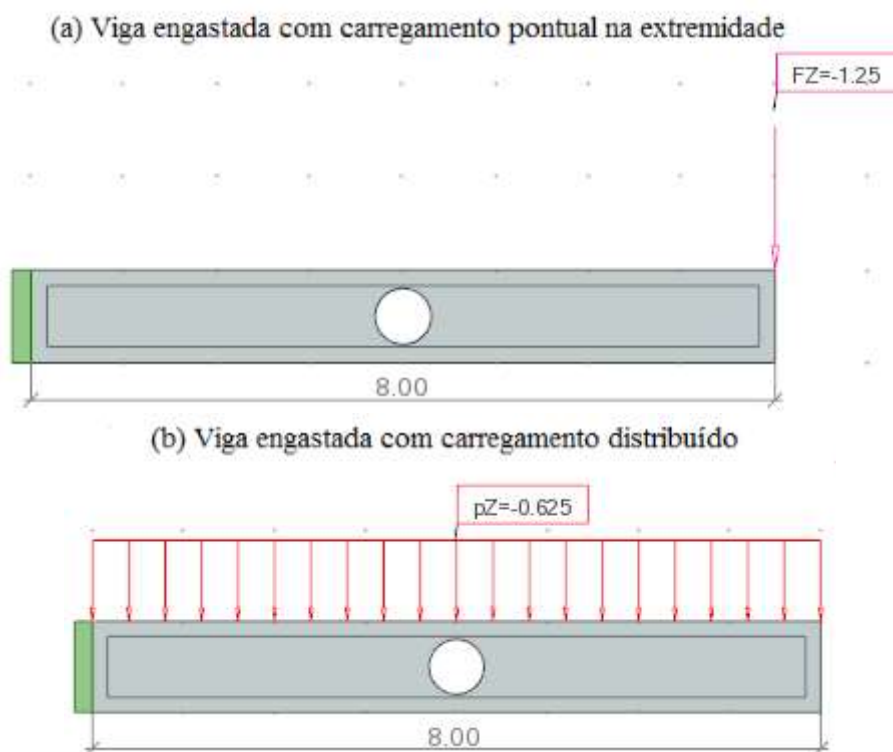


Figura 5 - Viga Engastada com Furo Central e Carregamentos Pontual e Distribuída.
Distância em metros, cargas pontuais em kN e cargas distribuídas em kN/m

Os dados de entrada de geometria foram escolhidos de forma arbitrária, sendo os valores de altura e diâmetro do furo apresentados no Quadro 1. Salienta-se que o diâmetro dos furos segue um valor de 10% da altura da viga em estudo.

Quadro 1- Dimensões das chapas utilizadas na modelagem

Altura (m)	Diâmetros (cm)
1,0	10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 ,80, 90
1,5	15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135
2,0	20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180
2,5	25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, 225

No processo de modelagem, foi estudado a convergência de uma malha de elementos quadrangulares com 1cm de lado. A superfície foi discretizada pelo método da curvatura de Coons, que, segundo Lira(2002), usa os pontos definidos ao longo dos segmentos do contorno como pontos de controle da superfície. O autor conclui: “As superfícies de Coons são mais interessantes, pois não existe limitação em relação ao grau de interpolação das curvas do contorno que definem a superfície.” (LIRA, 2002) Para a criação dos modelos de estudo, foi utilizado o programa *Autodesk Robot Structural Analysis*.

O método de Coons, em que é definido por Tavares (2013) como, “O método de ‘Coons’ – Divisão da estrutura em estudo em elementos triangulares ou quadriláteros, de modo a que lados opostos sejam divididos no mesmo número de segmentos. [...]”. A Figura 6 apresenta um exemplo de discretização adotado no estudo.

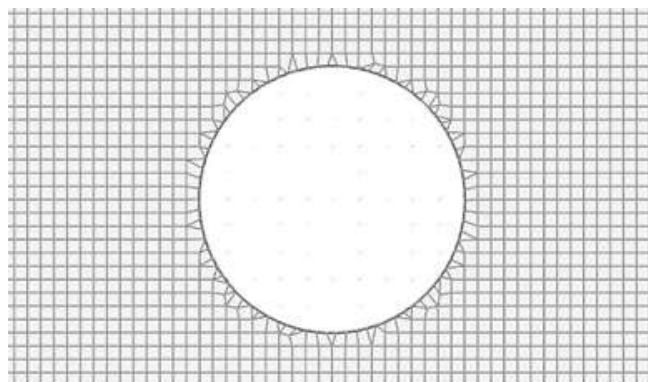


Figura 6 - Discretização da Malha

Para a elaboração das equações deste trabalho, com auxílio de programa computacional, utilizou-se o método dos quadrados mínimos (MQM), que consiste na criação de funções a partir de valores previamente tabelados, obtendo-se a relação entre as duas variáveis escolhidas, de modo que os valores inseridos na equação tenham valores próximos aos reais. Segundo Almeida (2015), o MQM, constitui uma alternativa mais adequada que a interpolação na obtenção de uma função matemática para representar um determinado fenômeno quando se deseja efetuar análises que vão além do intervalo de valores obtidos experimentalmente.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir dos resultados obtidos nos modelos analisados, foi observado que a situação contemplada na Figura 5a apresenta uma melhor distribuição de tensão, tornando este modelo o mais adequado para o estudo. Isto ocorre pelo fato das demais terem uma significativa concentração de tensão nos nós de aplicação de carregamento, distorcendo assim os resultados finais.

Os pontos 2 e 3 foram adotados para este estudo devido apresentarem maior valor de tensão (Figura 7). Dentre os pontos de maior concentração que circundam o furo, o Ponto 1 foi desprezado por apresentar valor de tensão inferior ao do Ponto 2.

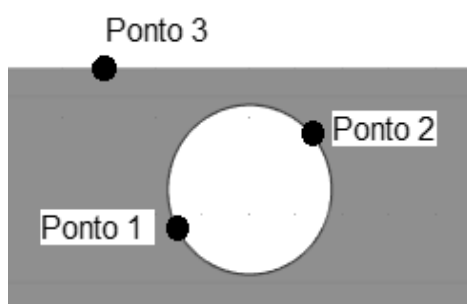


Figura 7 - Pontos de concentração de tensão no modelo analisado

Foram montadas tabelas para determinação de K_1 e K_2 , utilizando as equações para o cálculo da tensão de cisalhamento e da tensão normal. Na Tabela 1, foram inseridos, como dados de entrada, os valores da concentração de tensão dos pontos 1 e 2. A partir destes valores, foi determinada a tensão de cisalhamento (τ) e a tensão normal ocasionada pela flexão (σ_m). Estes valores, por sua vez, foram avaliados nos eixos cartesianos x e y , ortogonais ao eixo longitudinal da peça, sendo necessária a transformação de tensão para o plano principal em função de θ . De posse destes valores e, a partir da Equação 1, foram gerados os valores de K , referentes à viga de 1 m de altura, expostos na Tabela 1, onde d/w é a relação do diâmetro do furo (d) com a altura da viga (w).

Tabela 1 – Tabela para obtenção das constantes K_1 e K_2 na viga de 1 metro de altura

Borda do furo							
Diâmetro (m)	d/w	Tensão 1 (kPa)	Tensão 2 (kPa)	τ (kPa)	σ_m (kPa)	θ (°)	σ_n (kPa)
0,10	0,1	361,81	452,440	98,067	150,150	0,459	185,812
0,20	0,2	472,11	692,630	102,067	302,419	0,297	325,663
0,30	0,3	610,93	992,170	106,468	462,487	0,216	479,918
0,40	0,4	777,27	1.336,920	112,179	641,026	0,168	655,290
0,50	0,5	991,32	1.751,900	120,536	857,143	0,137	869,594
0,60	0,6	1.252,1	2.346,200	133,929	1.147,959	0,115	1.159,510
0,70	0,7	1.609,16	3.339,290	157,677	1.598,174	0,097	1.609,720
0,80	0,8	2.254,677	5.330,850	207,480	2.459,016	0,084	2.472,046
0,90	0,9	4.737,985	11.840,989	361,508	4.981,550	0,072	5.001,115

De forma semelhante à tabela em destaque, foi elaborada a Tabela 2 com base nas tensões do ponto 3 da viga de 1m de altura. Não são contemplados os resultados para os diâmetros até 30% da relação d/w , pois não apresentam valores significativos de concentração de tensão.

Tabela 2 - Tabela para obtenção das constantes K_3 na viga de 1m de altura

Borda da viga			
Diâmetro (m)	d/w	Tensão 3 (kPa)	σ_{nom} (kPa)
0,10	0,1	-	-
0,20	0,2	-	-
0,30	0,3	-	-
0,40	0,4	1.814,040	1.602,564
0,50	0,5	2.027,130	1.714,286
0,60	0,6	2.408,770	1.913,265
0,70	0,7	3.121,800	2.283,105
0,80	0,8	4.692,610	3.073,770
0,90	0,9	10.253,113	5.535,055

As Tabelas 3, 4, 5 e 6 descrevem as constantes K para os três pontos de tensões e quatro alturas adotadas nas modelagens. Os gráficos ilustrados nas Figuras 8 e 9 foram

produzidos em função das constantes K_2 e K_3 e da relação d/w , eles ilustram que as vigas de diferentes alturas seguem o mesmo padrão de variação do K . A partir destes valores, definiu-se uma equação global para facilitar o cálculo do valor da concentração de tensão.

Tabela 3 - Valores de tensão e coeficientes da viga de 1,0m de altura

Altura = 1,0 m						
d/w	Tensão 1 (kPa)	Tensão 2 (kPa)	Tensão 3 (kPa)	K_1	K_2	K_3
0,1	361,810	452,440	-	1,947	2,435	-
0,2	472,110	692,630	-	1,450	2,127	-
0,3	610,930	992,170	-	1,273	2,067	-
0,4	777,270	1.336,920	1.814,040	1,186	2,040	1,132
0,5	991,320	1.751,900	2.027,130	1,140	2,015	1,182
0,6	1.252,100	2.346,200	2.408,770	1,080	2,023	1,259
0,7	1.609,160	3.339,290	3.121,800	1,000	2,074	1,367
0,8	2.254,677	5.330,850	4.692,610	0,912	2,156	1,527
0,9	4.737,985	11.840,989	10.253,113	0,947	2,368	1,852

Tabela 4 - Valores de tensão e coeficientes da viga de 1,5m de altura

Altura = 1,5 m						
d/w	Tensão 1 (kPa)	Tensão 2 (kPa)	Tensão 3 (kPa)	K_1	K_2	K_3
0,1	250,705	270,713	-	1,349	2,821	-
0,2	302,71	365,908	-	0,930	2,354	-
0,3	366,793	482,898	-	0,764	2,175	-
0,4	456,433	639,027	859,094	0,697	2,140	1,206
0,5	560,93	839,354	977,789	0,645	2,135	1,283
0,6	705,151	1.130,893	1.188,156	0,608	2,168	1,397
0,7	909,026	1.606,734	1.580,570	0,565	2,226	1,558
0,8	1.297,88	2.643,206	2.458,428	0,525	2,390	1,800
0,9	3.142,768	6.171,557	5.672,114	0,628	2,763	2,306

Tabela 5-Valores de tensão e coeficientes da viga de 2,0m de altura

Altura = 2,0 m						
d/w	Tensão 1 (kPa)	Tensão 2 (kPa)	Tensão 3 (kPa)	K_1	K_2	K_3
0,1	184,783	192,069	-	0,994	3,097	-
0,2	224,161	239,613	-	0,688	2,535	-
0,3	262,126	307,854	-	0,546	2,350	-
0,4	312,722	394,512	512,972	0,477	2,275	1,280
0,5	387,285	514,280	593,280	0,445	2,275	1,384
0,6	481,912	690,641	734,679	0,416	2,317	1,536
0,7	619,833	1.003,874	998,540	0,385	2,444	1,749
0,8	937,207	1.669,759	1.594,974	0,379	2,661	2,076
0,9	2.375,148	4.057,862	3.824,640	0,475	3,209	2,764

Tabela 6 - Valores de tensão e coeficientes da viga de 2,5m de altura

Altura = 2,5 m						
d/w	Tensão 1 (kPa)	Tensão 2 (kPa)	Tensão 3 (kPa)	K_1	K_2	K_3
0,1	151,804	154,397	-	0,817	3,431	-
0,2	173,105	180,632	-	0,532	2,761	-

0,3	197,279	221,255	-	0,411	2,505	-
0,4	242,232	278,391	347,236	0,370	2,419	1,354
0,5	292,659	359,931	407,283	0,337	2,424	1,485
0,6	363,891	487,477	511,915	0,314	2,507	1,672
0,7	476,355	708,804	709,225	0,296	2,658	1,942
0,8	740,754	1.199,688	1.157,149	0,300	2,955	2,353
0,9	1.922,994	2.990,913	2.856,783	0,385	3,665	3,226

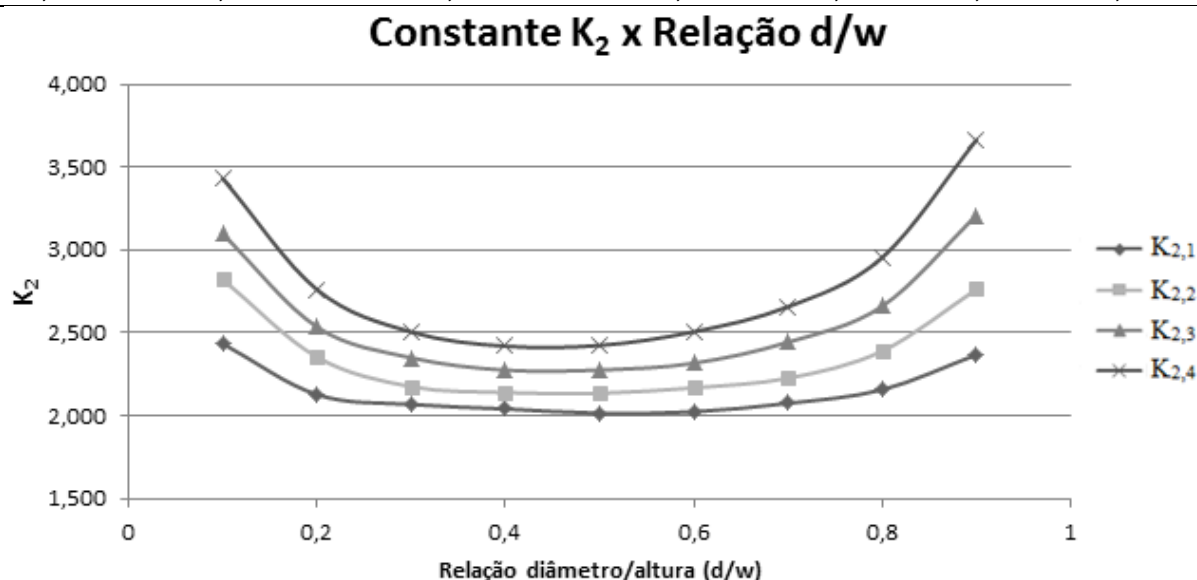


Figura 8 - Gráfico da constante K_2 pela relação d/w

Pelo método do MQM se descobriu que, ao comparar quaisquer equações que descrevem a constante de concentração K , para alturas diferentes, os coeficientes de uma equação se relacionam com os respectivos coeficientes da outra através de uma constante de proporcionalidade bem definida, ver Exemplo 1. No método, explica-se a razão dos coeficientes da equação da altura de 1,5m pela de 1,0m. Usando a Equação 6 como base, é possível a criação de novas equações, tendo α e β como referência.

As Equações 6, 7, 8, e 9 descrevem as curvas ilustradas na Figura 8, para as vigas com alturas de 1,0m, 1,5m, 2,0m e 2,5m, respectivamente.

$$K_{2,1} = 13,296. \left(\frac{d}{w}\right)^4 - 27,51. \left(\frac{d}{w}\right)^3 + 21,511. \left(\frac{d}{w}\right)^2 - 7,4493. \left(\frac{d}{w}\right) + 2,9823 \quad (6)$$

$$K_{2,2} = 21,39. \left(\frac{d}{w}\right)^4 - 44,454. \left(\frac{d}{w}\right)^3 + 35,239. \left(\frac{d}{w}\right)^2 - 12,395. \left(\frac{d}{w}\right) + 3,7488 \quad (7)$$

$$K_{2,3} = 25,371. \left(\frac{d}{w}\right)^4 - 51,514. \left(\frac{d}{w}\right)^3 + 40,567. \left(\frac{d}{w}\right)^2 - 14,35. \left(\frac{d}{w}\right) + 4,1706 \quad (8)$$

$$K_{2,4} = 30,576. \left(\frac{d}{w}\right)^4 - 61,878. \left(\frac{d}{w}\right)^3 + 48,984. \left(\frac{d}{w}\right)^2 - 17,46. \left(\frac{d}{w}\right) + 4,7456 \quad (9)$$

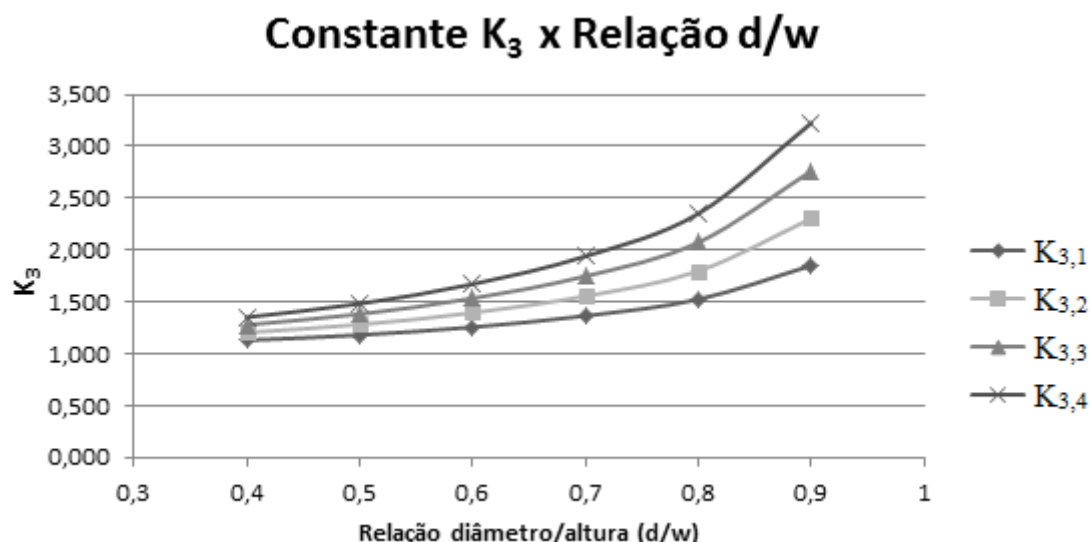


Figura 9 – Gráfico da constante K₃ pela relação d/w

As Equações 10, 11, 12, e 13 descrevem as curvas apresentadas na Figura 9, para as vigas com alturas de 1,0m, 1,5m, 2,0m e 2,5m, respectivamente.

$$K_{3,1} = 22,824. \left(\frac{d}{w}\right)^4 - 52,31. \left(\frac{d}{w}\right)^3 + 45,646. \left(\frac{d}{w}\right)^2 - 17,108. \left(\frac{d}{w}\right) + 3,4359 \quad (10)$$

$$K_{3,2} = 36,037. \left(\frac{d}{w}\right)^4 - 82,19. \left(\frac{d}{w}\right)^3 + 71,215. \left(\frac{d}{w}\right)^2 - 26,513. \left(\frac{d}{w}\right) + 4,755 \quad (11)$$

$$K_{3,3} = 49,042. \left(\frac{d}{w}\right)^4 - 111,54. \left(\frac{d}{w}\right)^3 + 96,312. \left(\frac{d}{w}\right)^2 - 35,739. \left(\frac{d}{w}\right) + 6,0496 \quad (12)$$

$$K_{3,4} = 61,303. \left(\frac{d}{w}\right)^4 - 138,97. \left(\frac{d}{w}\right)^3 + 119,66. \left(\frac{d}{w}\right)^2 - 44,288. \left(\frac{d}{w}\right) + 7,2497 \quad (13)$$

A Tabela 7 foi feita com os coeficientes α_2 e β_2 , necessários para que a equação do K₂ de cada altura seja determinada a partir da Equação 6, o coeficiente α_2 foi determinado pela média das razões dos valores que acompanham 'd/w' mostradas no exemplo 1, enquanto o coeficiente β_2 foi definido pela razão entre os termos independentes.

A Figura 10 ilustra o gráfico produzido a partir da Tabela 7, para se achar um padrão de como as constantes α_2 e β_2 aumentam de acordo com altura da placa, novamente foi utilizado o MQM para determinar a equação para essas duas curvas.

Exemplo 1 - Razão entre os termos dos coeficientes da Equação 6 e Equação 7 para a determinação de α_2

$$\frac{21,39}{13,296} = 1,609; \frac{44,454}{27,51} = 1,616; \frac{35,239}{21,511} = 1,638; \frac{12,395}{7,4493} = 1,664;$$

Tabela 7 - Coeficientes α_2 e β_2 para K₂

Altura (m)	α_2	β_2
1,00	1,0000	1,0000
1,50	1,6317	1,2570

2,00	1,8982	1,3985
2,50	2,2925	1,5913

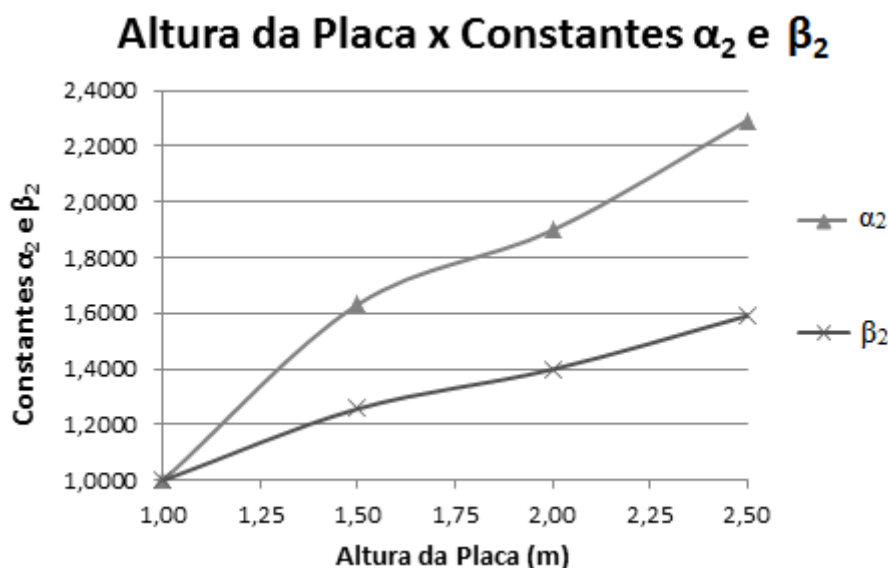


Figura 10 – Gráfico da altura da placa pelas constantes α_2 e β_2

Por fim, as equações finais para se determinar o K_2 foram definidas, a Equação 14 é a equação geral que usaremos como base, onde d é o diâmetro do furo, w é a altura da viga e α_2 e β_2 são encontrados através das Equações 15 e 16, respectivamente.

$$K_2 = \alpha_2 \cdot [13,296 \cdot \left(\frac{d}{w}\right)^4 - 27,51 \cdot \left(\frac{d}{w}\right)^3 + 21,511 \cdot \left(\frac{d}{w}\right)^2 - 7,4493 \cdot \left(\frac{d}{w}\right)] + \beta_2 \cdot (2,9823) \quad (14)$$

$$\alpha_2 = 0,6571 \cdot w^3 - 3,6874 \cdot w^2 + 7,3605 \cdot w - 3,3302 \quad (15)$$

$$\beta_2 = 0,2226 \cdot w^3 - 1,2329 \cdot w^2 + 2,5389 \cdot w - 0,5286 \quad (16)$$

Para o K_3 foi feito o mesmo procedimento para se determinar uma equação que possa determiná-lo a partir da altura da viga e o diâmetro do furo, assim produziu-se a Tabela 8, de maneira análoga à Tabela 7, baseado nos polinômios produzidos pelo método dos quadrados mínimos das curvas da Figura 9, e, igualmente ao K_2 , esses valores revelaram um padrão de como essas curvas variam com a mudança na altura da viga, discriminado no gráfico da Figura 11.

Tabela 8 – Coeficientes α_3 e β_3 para K_3		
Altura (m)	α_3	β_3
1,00	1,0000	1,0000
1,50	1,5650	1,3839
2,00	2,1200	1,7607
2,50	2,6382	2,1100



Figura 11 – Gráfico da altura da viga pelos coeficientes α_3 e β_3

Por sua vez, o gráfico dos coeficientes α_3 e β_3 para o K_3 se mostram lineares, ou seja, sua variação é constante e pode ser usada além dos limites das modelagens. Feito isso, usando a Equação 10 como padrão e adotando a mesma metodologia do K_2 , obtiveram-se as Equações 17, 18 e 19, onde d é o diâmetro do furo e w é a altura da viga.

$$K_3 = \alpha_3 \cdot [22,824 \cdot \left(\frac{d}{w}\right)^4 - 52,31 \cdot \left(\frac{d}{w}\right)^3 + 45,646 \cdot \left(\frac{d}{w}\right)^2 - 17,108 \cdot \left(\frac{d}{w}\right)] + \beta_3 \cdot (3,4349) \quad (17)$$

$$\alpha_3 = 1,0939 \cdot w - 0,08836 \quad (18)$$

$$\beta_3 = 0,7413 \cdot w + 0,2663 \quad (19)$$

5. CONCLUSÃO

A descontinuidade de elementos estruturais gera concentrações de tensão, criando pontos de fragilidade nestas peças que devem ser estudados com atenção. Com isso, surge a necessidade da utilização de métodos que facilitem, de forma precisa e segura, a análise, dimensionamento e detalhamento dos elementos. Este trabalho objetivou o desenvolvimento de constantes (K_2 e K_3) para a determinação dos valores de concentração de tensão em vigas submetidas à flexão não uniforme com furo central.

A partir dos modelos matemáticos feitos com auxílio do programa *Autodesk Robot Structural Analysis* (placas de 8 metros de comprimento, 2 centímetros de espessura e alturas e diâmetros de tamanhos variáveis), foi possível observar a distribuição de tensões ao longo dos elementos estruturais em estudo e identificar as semelhanças entre eles. Tais semelhanças permitiram a criação de polinômios que relacionam as constantes de concentração de tensão com os valores de altura e diâmetro do furo da placa em questão.

A Equação 14 (K_2) e Equação 17 (K_3) desenvolvidas neste trabalho, assim como as Equações 15, 16, 18 e 19 que calculam os termos α e β , foram determinadas através do MQM, que segundo Ruggiero e Lopes (1988), possibilita extrapolação. Neste contexto, os valores

que não estavam contidos no intervalo de estudo, possam ser utilizados nos polinômios encontrados pelo método, podendo assim ser aplicadas para qualquer altura de chapa e com a limitação dos furos entre 10% e 90% da altura, intervalo este que foi utilizado na realização deste trabalho. Para validar esta afirmação, foram realizadas novas modelagens, com valores de alturas diversos, a fim de averiguar a precisão das equações, obtendo-se erros percentuais de, no máximo, 5, podendo estes ser considerados desprezíveis.

Por fim, com o objetivo deste trabalho alcançado, o uso das equações desenvolvidas no estudo de placas com furo circular central submetidas à flexão não uniforme, permitirá que este tipo de dimensionamento seja feito de forma rápida e precisa, sem a necessidade de modelagens computacionais.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Centro de Ciências Tecnológicas e ao departamento de Engenharia Civil da Universidade de Fortaleza – UNIFOR pelo apoio a pesquisa.

7. REFERÊNCIAS

ALMEIDA, R. N. **O Métodos dos Mínimos Quadrados: Estudos e Aplicações para o Ensino Médio**. 2015. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2015.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Jr. **Resistência dos Materiais**. 3. ed. São Paulo, Brasil (1995).

GERE, J. M.; GOODNO, B. J. **Mecânica dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, (2010).

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, (2010).

LIRA, W. W. M. **Modelagem Geométrica para Elementos Finitos Usando Multi-Regiões e Superfícies Paramétricas**. 2002. 118 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, (2002).

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, (1988).

TAVARES, T. M. A. S. **Análise Comparativa de Modelos de Cálculo Automático no Âmbito do Projeto de Estruturas**. 2013. 143 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal, (2013).

VAZ, L.E. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. 1. ed. Rio de Janeiro, Brasil (2011).

VILLAÇA, S. F.; GARCIA, L. F. T. **Introdução à Teoria da Elasticidade**. 3. ed. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, (1998).

YESIL, U. B. The effect of own weight on the static analysis of a prestretched plate-strip with a circular hole in bending. **Mechanics of Composite Materials**, v. 53, n. 2, 2017.

DEVELOPMENT OF A CONSTANT FOR CALCULATING CONCENTRATIONS OF CENTRAL HOLES IN BEAMS SUBMITTED TO NON-UNIFORM FLEXION

ABSTRACT: Singularities that cause stress concentration are easily found in our daily lives and often do not receive the proper treatment. Studies show coefficients able to determine the values of this accumulation of stress, but, in most cases, for parts subjected to pure bending. However, this type of request is not the most observed in real life situations, therefore, in order to seek a more commonplace situation, a study was carried out regarding the effect of non-uniform bending in beams, and the effects that are generated when there are openings in them. Using Robot Structural Analysis, which uses the finite element method, different models of beams were made to determine the stress maps. Then, it was possible to perceive that the non-uniform bending produces three points of concentration and, from these values, a pattern was sought between the stress values, the heights of the beams and the size of the openings, which resulted in equations able to determine the critical values of the stress so that the auxiliary reinforcement for this geometric inconsistency can be done. These equations are not restricted only to the interval of heights in which the beams were modeled.

Keywords: Stress concentration, non-uniform bending, finite elements.

CONCLUSION

The discontinuity of structural elements generates stress concentrations, creating points of fragility in these pieces, which must be studied with attention. With this, there is the need of using methods that facilitate, in a precise and safe way, the analysis, the dimensioning and the detailing of the elements. This work aimed at the development of constants (K_2 and K_3) for the determination of stress concentration values in beams subjected to non - uniform bending, with central bore.

From the mathematical models made with the aid of the Autodesk Robot Structural Analysis program (plates 8 meters in length, 2 centimeters thick and heights and diameters of variable sizes), it was possible to observe the distribution of tensions along the structural elements under study and identify the similarities between them. Such similarities allowed the creation of polynomials that relate the voltage concentration constants to the height and diameter values of the bore of the plate in question.

The equation 14 (K_2) and Equation 17 (K_3) developed in this work, as well as Equations 15, 16, 18 and 19 that calculate the terms α and β , were determined through the MQM, which, according to Ruggiero and Lopes (1988) enables extrapolation. In this context, values that were not contained in the study range could be used in the polynomials found by the method and could therefore be applied to any sheet heights and with a hole limitation between 10% and 90% of the height as used in this work. To validate this assertion, new

modeling was performed, with values of different heights, in order to ascertain the accuracy of the equations, obtaining percentage errors of a maximum of 5, which could be considered negligible.

Finally, with the objective of this work being achieved, the use of equations developed in the study of plates with central circular bore subjected to non-uniform flexion, will allow this type of sizing to be done quickly and accurately, without the need of computational modeling.