

EXPANSÃO COMPUTACIONAL DA ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR UTILIZANDO A ABORDAGEM DO MEFG

Lorena Leocádio Gomes¹, Felício Bruzzi Barros², Samuel Silva Penna³

RESUMO: Este artigo apresenta um projeto de implementação computacional para a solução de problemas com não linearidade geométrica através da formulação Lagrangiana Total por meio do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), um método que pode ser considerado como uma instância do Método da Partição da Unidade (MPU). Na análise com não linearidade geométrica, tem-se uma significativa distorção da malha de elementos devido aos efeitos de grandes deslocamentos e deformações considerados no cálculo estrutural, que penalizam a aproximação da solução feita a partir do MEF. No entanto, constata-se que o MEFG é menos propenso a ser influenciado por esta distorção na malha, o que o torna mais vantajoso para este tipo de análise. Assim, um ambiente computacional existente e desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da UFMG, que possui meios que permitem análises estruturais lineares e não lineares, foi expandido de forma a realizar as análises com não linearidade geométrica através do MEFG. Como forma de validar a implementação desta expansão, os resultados de simulações numéricas, para este tipo de análise, são comparados com resultados encontrados na literatura.

Palavras chave: Mecânica Computacional, Análise Geometricamente Não Linear, JAVA, Método dos Elementos Finitos Generalizados, Partição da Unidade

¹ Mestranda em Engenharia de Estruturas, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil, Email: lorenaleocadio@gmail.com (autor correspondente)

² Doutor em Engenharia de Estruturas, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil, Email: felicio@dees.ufmg.br

³ Doutor em Engenharia de Estruturas, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil, Email: spenna@dees.ufmg.br

1. INTRODUÇÃO

Resolver problemas não lineares é encontrar a posição de equilíbrio do corpo através da solução de um sistema de equações, iterativamente, até que as forças internas sejam, dentro de um determinado critério, iguais às forças externas. Como o processo de solução do sistema deve ser repetido inúmeras vezes, o uso de ferramentas computacionais adequadas torna a solução deste tipo de análise mais viável e rápida. Com isto, a proposta deste trabalho é a expansão da plataforma computacional INSANE, permitindo que sejam realizadas análises estruturais geometricamente não lineares através da formulação Lagrangiana Total por meio de métodos baseados na partição da unidade, em particular o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG).

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), proposto por Strouboulis, Babuška e Copps (2000) e por Duarte, Babuška e Oden (2000), é uma combinação do Método dos Elementos Finitos (MEF) clássico e do Método da Partição da Unidade (MPU) desenvolvido por Melenk e Babuška (1996). Em uma análise via MEFG, o domínio do problema é dividido em malhas de elementos onde são construídas as funções de aproximação, utilizando para isto, a partição da unidade associada aos pontos nodais. Estas funções, que, usualmente, são as mesmas utilizadas em elementos finitos, são então enriquecidas nos nós de forma análoga ao Método das Nuvens-hp, método apresentado em Duarte e Oden (1996), e que é uma das variações do método da Partição da Unidade. Desta maneira, segundo Strouboulis, Babuška e Copps (2000), ao se incluir essas funções de enriquecimento, aumenta-se consideravelmente a precisão das aproximações do MEF clássico, com a adição de somente alguns graus de liberdade. As não linearidades geométricas, segundo Ribeiro (2009), estão relacionadas às não linearidades da estrutura provenientes de variações na geometria, como mudanças de

forma e rotações. E essas variações podem levar a estrutura a ter alterações consideráveis na configuração de equilíbrio. Ao se realizar uma análise estrutural geometricamente não linear, os resultados serão tão mais realistas quanto mais relevantes forem estas variações.

Em uma análise com grandes deslocamentos e deformações via MEF, os elementos gerados na estrutura sofrem grandes distorções, e essas distorções penalizam a qualidade de aproximação da solução de elementos finitos. Alguns trabalhos já realizados demonstram que o MEFG é menos propenso a ser influenciado por esta distorção da malha, tornando-se mais adequado a sua aplicação em problemas com não linearidade geométrica (Barros, 2002), (Alves, Barros, & Pitangueira, 2013).

A plataforma INSANE é um software livre desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), implementado em linguagem Java. Em sua versão atual, o INSANE permite a realização de análises com não linearidade física e geométrica através do Método dos Elementos Finitos, esta última implementada por Fonseca (2008) e para análise fisicamente não linear pelo MEFG, implementada por Wolenski et al. (2014).

O objetivo é apresentar a expansão feita na plataforma INSANE, para que as análises via MEFG contemplem a não linearidade geométrica. As ferramentas numéricas, já validadas e disponíveis no INSANE para a solução deste tipo de problema, foram modificadas e utilizadas para uma análise via MEFG, que se mostra vantajosa por sofrer menor influência do efeito negativo da distorção da malha. Assim, este artigo é a primeira parte de um trabalho na qual, procura se mostrar e validar esta expansão do MEFG para o caso da formulação Lagrangiana Total.

Como forma de apresentar o trabalho realizado, este artigo é dividido da seguinte maneira: o item 2 é feita uma revisão teórica, apresentando os aspectos relevantes sobre

os dois principais temas a serem desenvolvidos, MEFG e a não linearidade geométrica; no item 3, explica-se a plataforma INSANE e o trabalho realizado; no item seguinte são apresentados os exemplos utilizados para sua validação; e ao final, no item 5, tem-se uma discussão dos resultados obtidos e a conclusão.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Método dos Elementos Finitos Generalizados

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) pode ser entendido como uma extensão do Método dos Elementos Finitos (MEF) tradicional, adicionando funções especiais para a aproximação.

O MEFG possui também características importantes dos chamados métodos sem malha. Nestes métodos, segundo Barros (2002), a solução aproximada do problema é construída sem a necessidade de definição de uma malha de elementos, e com base na distribuição dos pontos nodais.

Dentre as variações dos métodos sem malha, existem os métodos baseados na definição da Partição da Unidade. Para este trabalho, destaca-se o Método das Nuvens-hp, que tem origem no Método de Galerkin Livre de Elementos (Belytschko & Black, 1999), e utiliza uma estratégia de enriquecimento da função de aproximação, em que as funções de forma originais são multiplicadas por funções quaisquer, escolhidas especialmente para o problema.

No MEFG, as aproximações são inicialmente construídas como no MEF, ou seja, a partir de funções identificadas com uma malha de elementos. Estas, contudo, são interpretadas como associadas aos nós e seus domínios de influência, as nuvens (conjunto de elementos que contém um mesmo nó). O MEFG herda do método das Nuvens-hp, a estratégia de enriquecimento da aproximação. Como resultado, problemas como a integração numérica e imposição das condições de contorno são superadas como

ocorre no MEF, a aproximação ganha uma certa flexibilidade, oriunda do método das Nuvens-hp, e torna-se menos propensa a sofrer os efeitos negativos da distorção da malha.

Assim, segundo Alves (2012), o MEFG instaura uma ponte entre os dois diferentes métodos, onde, sobre uma malha de elementos finitos faz-se uso de funções da Partição da Unidade (PU), e que tem o mesmo enriquecimento proposto pelo Método das Nuvens-hp.

2.1.1. Formulação

A característica principal do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é o uso da Partição da Unidade (PU) em um conjunto de elementos finitos.

Uma das características herdadas do Método das Nuvens-hp pelo MEFG é a discretização do domínio do problema em nuvens de elementos, que são definidas como as uniões de elementos finitos que partilham um mesmo nó no domínio.

Além disso, têm-se as funções de enriquecimento, conhecidas como funções de aproximação local e oriundas das estratégias do Método das Nuvens-hp. Estas funções, escolhidas a partir de um conhecimento prévio da solução do problema, devem construir um conjunto de q_j funções linearmente independentes e são definidas para cada ponto nodal x_j como:

$$I_j \stackrel{\text{def}}{=} \{L_{j1}(x), L_{j2}(x), \dots, L_{jq}(x)\} = \{L_{ji}(x)\}_{i=1}^{q_j}, \text{ com } L_{j1}(x) = 1 \quad (1)$$

Estas funções, multiplicadas pelas funções de PU, ampliam o espaço de aproximação de elementos finitos, que passa a ter como base um conjunto das funções de aproximação $\phi_{ji}(x)$:

$$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = N_j(x) \times \{L_{ji}(x)\}_{i=1}^{q_j}, \text{ sem o somatório em } j. \quad (2)$$

Assim, segundo Alves (2012), as funções de forma do MEFG herdam o suporte compacto da Partição da Unidade e as características da aproximação da função de

aproximação local. Com isso, uma função genérica para a aproximação do problema (no caso deslocamento) é obtida com a combinação linear das funções de forma de MEF e MEFG:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N N_j(x) \left\{ u_j + \sum_{i=2}^q L_{ij}(x) b_{ji} \right\} \quad (3)$$

onde u_j é o parâmetro associado aos graus de liberdade do MEF e b_{ji} são os novos graus de liberdade, criados pelos enriquecimentos nodais, associados ao MEFG.

2.2. Análise Geometricamente Não Linear

Em descrições mais realistas do comportamento estrutural, o corpo pode estar submetido a grandes deslocamentos e deformações e a relação constitutiva do material não é linear. Estes comportamentos acabam definindo dois tipos diferentes de análises não lineares na mecânica das estruturas, a análise fisicamente não linear, onde apenas a relação *tensão x deformação* do material é não linear, e a análise geometricamente não linear, que considera a possibilidade de grandes deslocamentos e deformações da estrutura. Para este trabalho, será considerada apenas a análise com não linearidade geométrica.

Como forma de descrever o movimento dos sólidos deformáveis e de solucionar o problema com não linearidade geométrica, emprega-se a formulação Lagrangiana, também chamada de material, onde as grandezas associadas ao corpo deformado são referidas à configuração original (indeformada).

Na abordagem da análise incremental Lagrangiana, o equilíbrio do corpo em um pseudo-tempo (chamado simplesmente de tempo) $t + \Delta t$, onde Δt refere-se a um intervalo de tempo associado ao passo da aplicação do carregamento, é expresso usando o princípio dos deslocamentos virtuais a partir da seguinte equação:

$$\int_{t+\Delta t_V}^{t+\Delta t} \tau_{ij} \delta_{t+\Delta t} e_{ij} d^{t+\Delta t} V = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} \quad (4)$$

onde o lado esquerdo da equação corresponde ao trabalho virtual interno e ${}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}$ ao trabalho virtual externo, na configuração $t + \Delta t$, e ainda, ${}^{t+\Delta t} \tau_{ij}$ representa as componentes cartesianas do tensor de tensões de Cauchy, $\delta_{t+\Delta t} e_{ij}$ corresponde ao tensor de deformações correspondente aos deslocamentos virtuais impostos, ${}^{t+\Delta t} V$ ao volume do corpo no tempo correspondente e δ associa à variável que a ele segue designação de virtual. O subscrito à direita se refere à componente das coordenadas cartesianas.

Na formulação Lagrangiana, por se conhecer a trajetória de deformações, pode-se fazer referência a uma configuração de equilíbrio anterior ao tempo $t + \Delta t$ para a solução do problema, uma vez se desconhece a configuração do corpo no tempo $t + \Delta t$. Existem duas diferentes formulações que possibilitam a escolha desta configuração de equilíbrio, são elas a formulação Lagrangiana Total (LT), onde todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referidas na configuração inicial (no tempo 0), e a formulação Lagrangiana Atualizada (LA), que tem procedimento análogo à LT, porém, com as variáveis referidas à última configuração calculada.. A descrição de Bathe (1996) que se está seguindo é genérica o suficiente para abranger tanto a formulação total quanto a atualizada, porém neste trabalho foram feitas análises utilizando somente a formulação Lagrangiana Total (LT).

Assim, para análise incremental, para melhor representar a Eq. (4) na forma Lagrangiana Total, são empregados o segundo tensor de Piola-Kirchoff, S_{ij} , e o tensor de deformações de Green-Lagrange, ε_{ij} , e assim a Eq. (4) se transforma em:

$$\int_{^0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} \quad (5)$$

Na Eq. (5), o sobrescrito à esquerda indica a configuração do corpo em que a grandeza representada ocorre, e o subscrito à esquerda, em relação a qual configuração do corpo em que a grandeza é medida.

Usando as relações para a decomposição incremental das tensões e deformações e linearizando as equações, obtém-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$\int_{^0V} {}^0C_{ijrs} {}^0e_{rs} \delta {}^0e_{ij} d^0V + \int_{^0V} {}^tS_{ij} \delta {}^0\eta_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} - \int_{^0V} {}^tS_{ij} \delta {}^0e_{ij} d^0V \quad (6)$$

onde ${}^0C_{ijrs}$ é o tensor incremental das propriedades dos materiais no tempo t na configuração 0 . ${}^tS_{ij}$ representa o segundo tensor de Piola-Kirchoff no tempo t . ${}^0e_{ij}$ e ${}^0\eta_{ij}$ são as componentes de deformações incrementais que se dividem em componentes linear e não linear., referidas ao tempo 0 .

A Eq. (6) é empregada no cálculo do incremento de deslocamentos que irão atualizar os valores das aproximações dos deslocamentos, tensões e deformações correspondentes ao tempo $t + \Delta t$.

Discretizando-se o problema via MEF ou MEFG, a Eq. (6) pode ser substituída pela seguinte equação matricial para a formulação LT:

$$({}^t\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL})\Delta \mathbf{U}^{(j)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}^{(j-1)} \quad (7)$$

Onde:

${}^t\mathbf{K}_L$ = Matriz de rigidez incremental de deformações lineares

${}^t\mathbf{K}_{NL}$ = Matriz de rigidez incremental de deformações não lineares

${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ = Vetor de forças externas aplicadas nos pontos nodais no tempo $t + \Delta t$

${}^t\mathbf{F}^{(j-1)}$ = Vetor de forças equivalentes do ponto nodal às tensões nos elementos (tempo t)

$\Delta \mathbf{U}^{(j)}$ = Vetor de incrementos de deslocamentos nodais na j -ésima iteração: ${}^t\mathbf{U}^{(j)} = {}^t\mathbf{U}^{(j-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(j)}$

Na Tabela 1 estão reunidas as equações na forma integral e matricial para a formulação.

Tabela 1 - Matrizes de Elementos Finitos (Bathe, 1996)

Tipo de Análise	Integral	Matriz Correspondente
Ambas Formulações	${}^{t+\Delta t}{}_{\mathcal{R}} = \int_{0S_f} {}^{t+\Delta t}{}_{f_i}^S \delta u_i^S d^0S + \int_{0V} {}^{t+\Delta t}{}_{f_i}^B \delta u_i^B d^0V$	${}^{t+\Delta t}{}_{\mathbf{R}} = \int_{0S_f} \mathbf{H}^{ST} {}^{t+\Delta t}{}_{\mathbf{f}}^S d^0S$
Formulação Lagrangeana Total	$\int_{0V} {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0V$ $\int_{0V} {}_0^tS_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0V$ $\int_{0V} {}_0^tS_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0V$	${}_0^t\mathbf{K}_L \hat{\mathbf{u}} = \left(\int_{0V} {}_0^t\mathbf{B}_L^T {}_0^t\mathbf{C} {}_0^t\mathbf{B}_L d^0V \right) \hat{\mathbf{u}}$ ${}_0^t\mathbf{K}_{NL} \hat{\mathbf{u}} = \left(\int_{0V} {}_0^t\mathbf{B}_{NL}^T {}_0^t\mathbf{S} {}_0^t\mathbf{B}_{NL} d^0V \right) \hat{\mathbf{u}}$ ${}_0^t\mathbf{F} = \int_{0V} {}_0^t\mathbf{B}_L^T {}_0^t\hat{\mathbf{S}} d^0V$

2.2.1. Trajetória de Equilíbrio

Em uma formulação geral do processo incremental-iterativo, para a obtenção da trajetória de equilíbrio de uma análise não linear, a equação de equilíbrio (7) pode ser transformada em uma equação que corresponde à iteração j do passo i , e pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{K}_{j-1}^i \cdot \delta \mathbf{U}_j^i = \delta \lambda_j^i \cdot \mathbf{P} + \mathbf{Q}_{j-1}^i \quad (8)$$

onde,

$\mathbf{K}_{j-1}^i$ é a matriz de rigidez tangente na iteração $j - 1$ do passo i , função do campo de deslocamentos $\mathbf{U}_{j-1}^i$ e obtida, neste trabalho, a partir da soma da parte linear e não linear das matrizes de rigidez indicadas na Eq. (7);

$\delta \mathbf{U}_j^i$ é o vetor de deslocamentos incrementais da iteração j do passo i ;

$\delta \lambda_j^i$ é o incremento do fator de cargas na iteração j do passo i ;

$\mathbf{P}$ é vetor de cargas de referência, representado pela soma dos vetores $\mathbf{R}$ e $\mathbf{F}$ da Eq. (7);

$\mathbf{Q}_{j-1}^i$ é o vetor de forças residuais da iteração $j - 1$ do passo i .

Para a resolução da Eq. (8), a primeira providência a ser realizada, é estipular o incremento de fator de carga, $\delta \lambda_j^i$, e o seu cálculo varia em função do método de controle escolhido. Com o valor estabelecido, pode-se obter o incremento do vetor de

deslocamentos, $\delta \mathbf{U}_j$, que pode ser decomposto nas parcelas associadas à carga de referência $\delta \mathbf{U}_j^P$ e à carga residual $\delta \mathbf{U}_j^Q$, da seguinte forma:

$$\delta \mathbf{U}_j = \delta \lambda_j \cdot \delta \mathbf{U}_j^P + \delta \mathbf{U}_j^Q \quad (9)$$

Com

$$\mathbf{K}_{j-1} \cdot \delta \mathbf{U}_j^P = \mathbf{P} \quad (10)$$

$$\mathbf{K}_{j-1} \cdot \delta \mathbf{U}_j^Q = \mathbf{Q}_{j-1} \quad (11)$$

Com os valores encontrados para $\delta \lambda_j^i$ e $\delta \mathbf{U}_j$, as variáveis do problema podem ser atualizadas, através das seguintes equações:

$$\lambda_j = \lambda_{j-1} + \delta \lambda_j \quad (12)$$

$$\mathbf{U}_j = \mathbf{U}_{j-1} + \delta \mathbf{U}_j \quad (13)$$

Com a atualização dos deslocamentos, as tensões internas são, também, atualizadas. Ao final de cada iteração, o equilíbrio do sistema é verificado pelo critério das forças, a partir do cálculo do vetor de forças residuais, $\mathbf{Q}_j$, ou então pelo critério dos deslocamentos, mediante a magnitude do vetor de deslocamentos incrementais $\delta \mathbf{U}_j$. O processo iterativo só termina quando se alcança determinado critério de convergência. Se a convergência não for atingida, será necessário o cálculo de uma nova iteração, a partir do cálculo dos valores de $\delta \mathbf{U}_j^P$ e $\delta \mathbf{U}_j^Q$ pelas Eqs. (10) e (11), podendo-se assim obter o valor de $\delta \lambda_j$ com uma equação de restrição que envolve combinações das grandezas do problema.

O vetor de cargas residuais da iteração j é dado por:

$$\mathbf{Q}_j = \lambda_j \cdot \mathbf{P} - \mathbf{F}_j \quad (14)$$

onde $\mathbf{F}_j$ é o vetor de forças equivalentes às tensões internas ao final da iteração j .

Destaca-se ainda, que na primeira iteração de cada passo, o vetor de cargas residuais Q_{j-1} é nulo.

3. SISTEMA INSANE

O sistema INSANE (INterative Structural ANalysis Environment) é um ambiente computacional implementado em linguagem de programação Java, utilizando a Programação Orientada a Objetos (POO) e desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).

O INSANE pode ser dividido em três grandes segmentos: o pré-processador, que é a aplicação gráfica interativa que oferece ferramentas para inserir dados do modelo de diferentes formas; o processador, como sendo o núcleo numérico do sistema, responsável pela leitura dos dados e obtenção dos resultados das análises dos modelos discretos; e por fim o pós-processador, que permite ao usuário a visualização dos resultados ao fim da análise.

Para a solução dos problemas na plataforma, a estrutura do núcleo numérico é concentrada nas relações entre duas interfaces, Assembler e Persistence, e duas classes abstratas, as classes Solution e Model, como pode-se observar na Figura 1

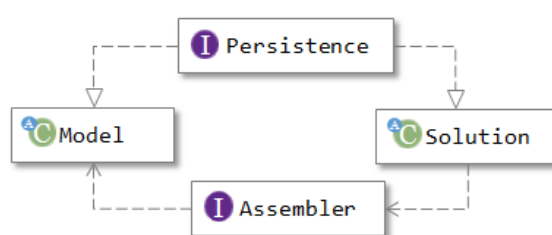


Figura 1 - Organização do núcleo numérico do INSANE

A interface *Persistence* é a responsável por receber os arquivos de entrada gerados no pré-processamento do programa. Assim, os dados necessários para descrição do modelo podem ser organizados, para, então, preencherem as informações do modelo.

As classes de *Model* que recebem os dados armazenados em *Persistence*, podendo, assim, representar o modelo discreto a ser analisado. A partir da classe abstrata *Model*

que se derivam algumas classes, necessárias para poder se distinguir atributos específicos para determinados tipos de modelos. Dentre estas classe tem-se a classe *FemModel*, que é a responsável pelos modelos discretos de MEF, e derivando desta, tem-se a classe *GFemModel*, que possui comportamento e atributos específicos do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG).

Após armazenadas as informações do modelo nas classes relativas a *Model*, elas são recuperadas pela interface *Assembler*, que possui os métodos necessários para montar as matrizes e vetores do modelo, que, no caso deste trabalho, é representado pela Eq. (8) para os processos incrementais-iterativos.

Assembler é implementada pela classe *FemAssembler*, por ser conveniente a diferentes tipos de problemas que podem ser modelados pelo Método dos Elementos Finitos. Derivando de *FemAssembler* tem-se a classe *GFemAssembler*, responsável por montar a equação para modelos que serão resolvidos via MEFG.

Após a montagem do sistema de equações a ser resolvido, é a classe *Solution* que soluciona o sistema de equação. Por ser uma classe abstrata, possui classes derivadas que dispõem de métodos para a solução de diferentes tipos de problemas. Dentre essas subclasses tem-se a *SteadyState*, que representa a solução de problemas lineares estáticos e, por isso, é a mais simples delas. Para a solução de problemas não lineares, a classe *EquilibriumPath* é a classe que generaliza a solução de problemas que necessitam determinar as trajetórias de equilíbrio.

3.1. Expansão da Plataforma para a análise com não linearidade geométrica

Para este trabalho, o objetivo foi que a plataforma soluciona-se problemas com não linearidade geométrica via MEFG através da formulação Lagrangiana Total.

A formulação paramétrica é tratada no MEFG na classe *GFemParametric*, a exemplo da *Parametric* usada no MEF, que possui apenas métodos gerais para a montagem da

equação final do modelo. Com isto, criou-se a classe *GFemGeometricallyNonLinearTl*, que é responsável por fornecer informações pertinentes aos elementos paramétricos de MEFG específicas à formulação Lagrangiana Total.

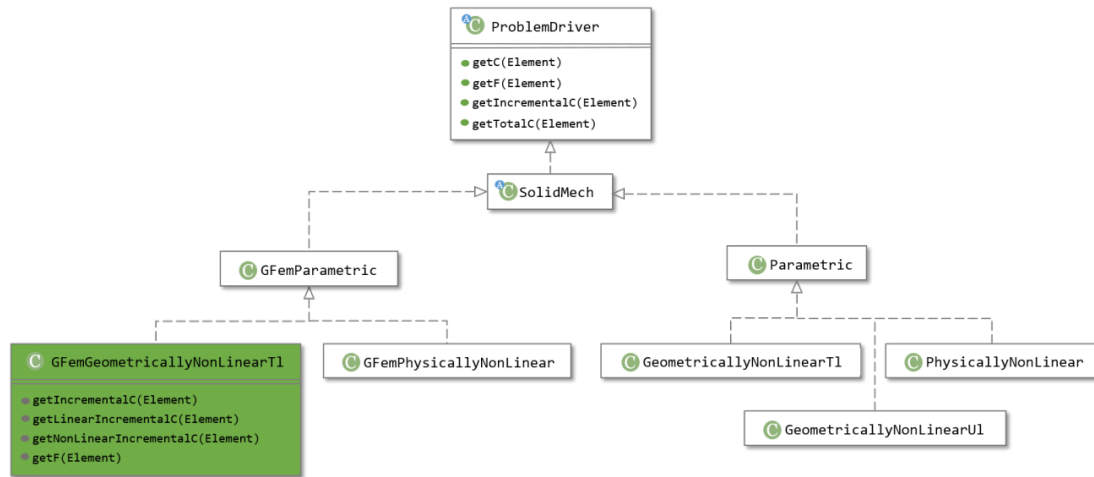


Figura 2 - Diagrama UML parcial da classe ProblemDriver

O método *getLinearIncrementalC* (Figura 2) é o responsável pelo cálculo da matriz de rigidez linear ($\mathbf{K}_L$), o método *getNonLinearIncrementalC* pelo cálculo da matriz não linear ($\mathbf{K}_{NL}$), e o método *getIncrementalC* pela soma das duas matrizes, como determinado pela Eq. (7). Já o método *getF* é o responsável pelo cálculo do vetor de forças nodais.

Para o cálculo correto dessas matrizes de rigidez e do vetor de forças, adicionando, para isto, o enriquecimento oriundo do modelo de elementos finitos generalizados, foram necessárias modificações em um grupo de classes que implementam a Interface *GfemAnalysisModel*. Métodos existentes nas classes derivadas de *AnalysisModel* para a análise via Elementos Finitos, foram adicionados em *GFemAnalysisModel* e modificados de maneira que contemplassem esses enriquecimentos nodais dos modelos do MEFG. Os métodos criados foram *getInternalVariablesOperator()* para a montagem da matriz $\mathbf{B}_L$ e *getNonLinearInternalVariablesOperator()* para a montagem da matriz $\mathbf{B}_{NL}$, ambas indicadas nas equações da Tabela 1. Os métodos *getNonLinearDualInternalVariablesMatrix()* e *getGreenInternalVariables* relativos à

construção do segundo tensor de Piola-Kirchoff, foram introduzidos na classe, para que o enriquecimento contido nas matrizes **B** fossem considerados.

Além dessas modificações nos modelos de análise, introduziu-se dois métodos na classe *GFemElement*, para poder recuperar características específicas dos modelos de elementos finitos generalizados. Dentre estes métodos tem-se o *getPointGreenInternalVariables()*, que retorna o vetor das variáveis internas de Green em um ponto do elemento, e foi criado de maneira que levasse em consideração os enriquecimentos nas funções de forma, e o *getCartesianNodalDisplacementsMatrix()*, responsável pela montagem de uma matriz de deslocamentos nodais do elemento, e sua criação foi necessária para que os deslocamentos dos graus de liberdade adicionais, devido ao enriquecimento, fossem contabilizados na matriz final.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após a criação da classe *GFemGeometricallyNonLinearTl* e da introdução de métodos em algumas classes na plataforma INSANE, foram feitas análises e comparações de resultados de exemplos propostos por Fonseca (2008), que foram obtidos via Método dos Elementos Finitos, e que estão indicados nos gráficos que se seguem pelas siglas LT-NRP, para o problema analisado via método de Newton-Raphson padrão, e LT-NRM, para o método modificado. Nas análises via Método dos Elementos Finitos Generalizados as siglas utilizadas nos gráficos foram LT-NRP-MEFG e LT-NRM-MEFG para os métodos de Newton-Raphson padrão e modificado, respectivamente.

4.1. Coluna Engastada e Livre

Este exemplo consiste em uma coluna engastada em sua extremidade inferior e livre na outra extremidade, onde é aplicado o carregamento pontual vertical e excêntrico, como apresentada na Figura 3.

O material na análise desta coluna foi considerado linear-elástico isotrópico, cujo módulo de elasticidade é $E = 12$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. As dimensões usadas para a coluna foram $1 \times 100 \times 1$, todas em unidade consistente.

Para as análises via MEF e MEFG, foi utilizado um modelo de análise em estado plano de tensões (*PlaneStress*), e a coluna foi discretizada em 50 elementos finitos quadrilaterais de 8 nós para o modelo via Método dos Elementos Finitos e em elementos quadrilaterais de 4 nós enriquecidos polinomialmente em x e y para se ter uma aproximação quadrática pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados. A carga de referência foi $P_0 = -2,0 \times 10^{-4}$ uf.

No método de Newton-Raphson padrão foi utilizado o método de controle de carga, em que se incrementou 0,1 a carga aplicada em cada passo, a tolerância à convergência foi de 0,01 para as forças e foram realizadas 90 passos para a convergência. Já no método modificado, foi necessário utilizar o método de controle de deslocamentos generalizados com um incremento no fator de carga de 0,5, a tolerância foi aumentada para 0,1 e foram necessários 1000 passos.

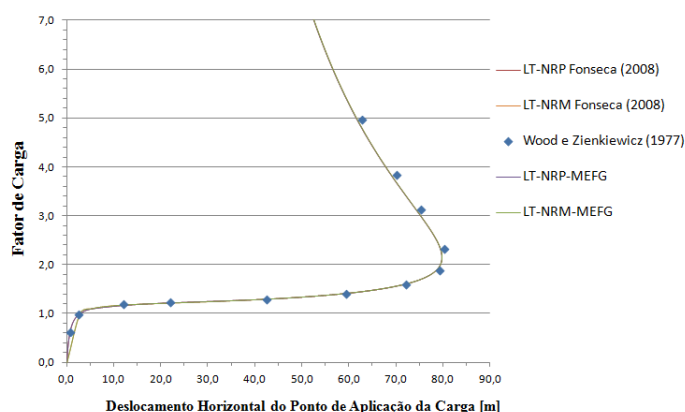
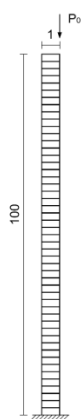


Figura 3 - Coluna Engastada e Livre

Figura 4 - Trajetória de equilíbrio para o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga

Os resultados das trajetórias de equilíbrio para o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga é apresentado na Figura 4.

Além do trabalho de Fonseca (2008), foi utilizado como referência o resultado analítico apresentado por Wood e Zienkiewicz (1977). Pode-se observar a concordância dos resultados calculados no INSANE para o modelo de Elementos Finitos Generalizados com os valores analíticos e os fornecidos por Fonseca (2008), que também foram obtidos na plataforma INSANE.

4.2. Pórtico de Lee

O Pórtico de Lee, apresentado na Figura 5, é um pórtico em forma de L birrotulado que é amplamente utilizado na validação de formulações não lineares.

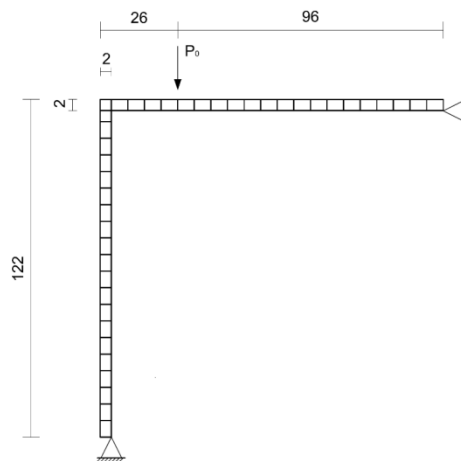


Figura 5 - Pórtico de Lee

Em todas as análises feitas para este pórtico foi utilizado um material linear-elástico isotrópico, com módulo de elasticidade de $E = 720$ e coeficiente de Poisson de $\nu = 0,3$.

A sua seção transversal tem dimensões de 2×3 .

A discretização usada foi de 41 elementos finitos quadrilaterais, sendo que para o modelo em Elementos Finitos, esses elementos foram de 8 nós e no modelo de Elementos Finitos Generalizados os elementos de quatro nós são enriquecidos pelos monômios x e y para se ter uma aproximação quadrática.

O modelo de análise foi o estado plano de tensões (*PlaneStress*), e a carga de referência considerada foi de $P_0 = -2,0$. Utilizou-se o método de controle de deslocamento

generalizado, com o incremento de fator de carga de 0,01 e foram necessários 1300 passos, com uma tolerância de 0,001 para as forças.

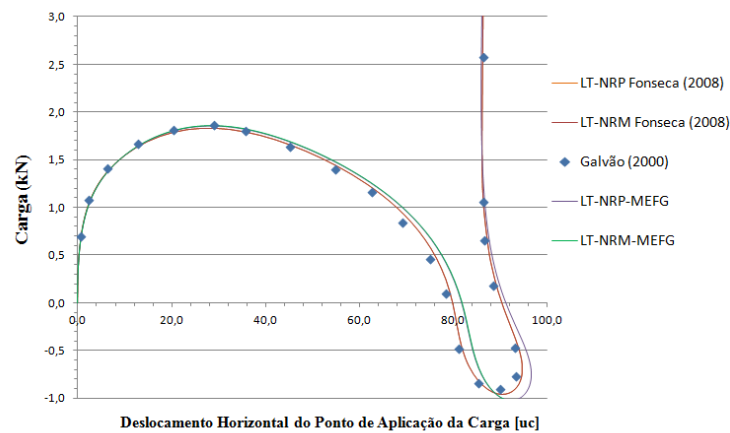


Figura 6 - Trajetória de equilíbrio para o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga

O resultado das trajetórias de equilíbrio para o deslocamento horizontal está indicado na Figura 6. Pode-se observar que os valores calculados pelo INSANE para a análise via MEFG estão em excelente concordância com os valores fornecidos em Fonseca (2008) e os também apresentados por Galvão (2000), e a pequena diferença existente pode ser devido à mudança na posição das restrições do modelo.

5. CONCLUSÃO

Em uma análise com não linearidade geométrica, os grandes deslocamentos e deformações envolvidos podem fazer com que a malha sofra consideráveis distorções, e esta distorção faz com que se percam alguns termos da equação de aproximação do elemento, penalizando a qualidade da solução pelo MEF. Sabe-se que no MEFG, a aproximação é menos prejudicada, se comparada com a do MEF, pois a estratégia de enriquecimento é construída nas coordenadas reais do problema. Tal característica torna o MEFG bastante adequado para ser utilizado em análises com não linearidade geométrica.

A plataforma INSANE já possui um arcabouço de recursos implementados e validados para a solução de problemas com não linearidade geométrica via Método dos Elementos Finitos. Uma vez já implementado na plataforma o MEFG, e tendo em vista sua característica adequada à solução deste tipo de problema, neste trabalho se propôs a implementação da análise geometricamente não linear pelo MEFG para a formulação Lagrangiana Total. Dado os resultados dos exemplos apresentados no item 4, conseguiu-se validar o sistema de solução proposto e implementado na plataforma INSANE. Esta comparação de resultados foi possível, uma vez que a discretização utilizada nos modelos de MEF (elementos Q8) é equivalente a se utilizar elementos quadriláterais de 4 nós enriquecidos por x e y no MEFG.

REFERÊNCIAS

- Alves, P. D. (Maio de 2012). Estratégia Global-Local Aplicada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados. *Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais*. Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Alves, P. D., Barros, F. B., & Pitangueira, R. L. (2013). An object-oriented approach to the Generalized Finite Element Method. *Advances in Engineering Software*, 59, 1-18.
- Barros, F. B. (2002). Métodos Sem Malha e Métodos dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas. *Tese (Doutorado) - EESC - USP*. São Carlos, SP, Brasil.
- Bathe, K.-J. (1996). *Finite Element Procedures* (Prentice-Hall civil engineering and engineering mechanics series ed.). Upper Saddle River, N. J.
- Belytschko, T., & Black, T. (1999). Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, 601-620.
- Duarte, C. A., & Oden, J. T. (1996). An hp adaptive method using clouds. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 139, 237-262.
- Duarte, C. A., Babuška, I., & Oden, J. T. (2000). Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers and Structures*, 77, 215-232.

- Fonseca, F. T. (Agosto de 2008). Sistema Computacional para Análise Dinâmica Geometricamente Não-Linear através do Método dos Elementos Finitos. *Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais*. Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S. (Fevereiro de 2004). Métodos de controle de deformação para análise não-linear de Estruturas. *Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais*. Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Galvão, A. d. (Março de 2000). Formulações Não Lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos. *Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto*. Ouro Preto, MG, Brasil.
- Melenk, J. M., & Babuška, I. (1996). The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 39, 289-314.
- Ribeiro, J. C. (Dezembro de 2009). Desenvolvimento e Aplicação de um Sistema Computacional para Simulação via Método dos Elementos Finitos do Comportamento de Estruturas de Aço e Mistas em Situação de Incêndio. *Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais*. Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Strouboulis, T., Babuška, I., & Copps, K. (2000). The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 181, 43-69.
- Williams, F. W. (1964). An approach to the non-linear behavior of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflections. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 17, 451-469.
- Wolenski, A. R., Monteiro, A. B., Barros, F. B., Penna, S. S., & Pitangueira, R. L. (2014). Application of the Generalized Finite Element Method on the Physically Nonlinear Analysis of Structures. *XXXV CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*.
- Wood, R. D., & Zienkiewics, O. C. (1977). Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells. *Computers and Structures*, 7, 725-735.
- Yang, Y. B., & Shieh, M. S. (1990). Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *AIAA Journal*, 28(12), 2110-2116.

COMPUTATIONAL EXPANSION OF GEOMETRICALLY NONLINEAR ANALYSIS USING THE GFEM APPROACH

ABSTRACT: This paper presents a computational implementation project for the solution of geometrically nonlinear problems by the Generalized Finite Element Method (GFEM), a method that can be considered as an instance of the Partition of Unity Method (PUM). The partition of unity is provided by using the Finite Element Method (FEM) approximation functions, which are enriched by others functions specially chosen according to the analyzed problem. In the analysis with geometric nonlinearity, there is a significant distortion of the element mesh due to the effects of large displacements and deformations considered in the structural calculation, which can penalize the quality of the FEM solution. However, it is noted that the GFEM is less prone to be influenced by this mesh distortion, which make it more advantageous for this type of analysis. Thus, an existing computational environment developed in the Department of Structural Engineering of Federal University of Minas Gerais (UFMG), that allows linear and nonlinear analysis, has been expanded in order to execute the analysis with geometric nonlinearity by GFEM. As a way to validate the implementation of this expansion, the results of numerical simulations, for this type of analysis, are compared with results found in the literature.

Keywords: Computational Mechanics; Geometrically Nonlinear Analysis; JAVA; Generalized Finite Element Method; Partition Unity Methods.

CONCLUSIONS

In an analysis with geometric nonlinearity, the large displacements and deformations involved can cause the mesh to suffer considerable distortions, and this distortion causes some terms of the element approximation equation to be lost, penalizing the quality of the solution by FEM. It is known that in the GFEM the approximation is less impaired

compared to that of the FEM, since the enrichment strategy is constructed in the real coordinates of the problem. This feature makes the GFEM quite suitable for use the geometrically nonlinear analysis.

The INSANE platform already has a framework of implemented and validated resources for the solution of problems with geometric non-linearity by the Finite Element Method. Once the GFEM has been implemented in the platform, and in view of its adequate characteristic to the solution of this type of problem, in this work the implementation of the geometrically nonlinear analysis by the GFEM for the Total Lagrangean formulation was proposed. According to the results of the examples presented in item 4, it was possible to validate the solution system proposed and implemented in the INSANE platform. This comparison of results was possible, since the discretization used in the models of FEM (elements Q8) is equivalent to using quadrilateral elements of 4 nodes enriched by x and y in the GFEM.