

Recebido: 08/08/2018 Aprovado: 15/03/2019

ANÁLISE DE SEÇÕES TRANSVERSAIS DE CONCRETO ARMADO E PROTENDIDO SUJEITAS A FLEXÃO OBLÍQUA COMPOSTA EM ESTADOS-LIMITES ÚLTIMO E DE SERVIÇO POR INTEGRAÇÃO ANALÍTICA

Leonardo Martins e Silva¹, Roberto Chust Carvalho²

Resumo

A flexão oblíqua composta é definida pela ocorrência simultânea de força axial e momento fletor oblíquo. Para tal situação, as verificações de estado-limite último e de serviço possuem certa complexidade. O presente trabalho apresenta um método de cálculo dos esforços solicitantes da flexão oblíqua composta de uma seção transversal de formato poligonal em concreto armado ou protendido partindo de deformações impostas. Para isso, calcula-se a integral analítica da relação tensão-deformação para cada solicitação, partindo da relação entre as diversas variáveis que definem a forma e a relação constitutiva. Obtém-se uma equação para cálculo de cada solicitação interna, que são aplicadas para construção do diagrama de momentos resistentes para dada força axial, construção da relação momento-curvatura e verificações de serviço. Estas aplicações constam em forma de fluxograma e compilados num programa gratuito e aberto chamado OblqCalco, que é disponibilizado. Expõe-se exemplos destas situações obtendo resultados concordantes e exposto graficamente.

¹ Autor para correspondência. Acadêmico de doutorado em Estruturas e Construção Civil na Universidade Federal de São Carlos - UFSCar. E-mail: leonardomartinsesilva@gmail.com

² Docente Sênior do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos – UFSCar. E-mail: robertochustcarvalho@gmail.com

Palavras-chave: Flexão oblíqua composta, Solicitações normais, Estado-limite último, Estado-limite de serviço.

1 INTRODUÇÃO

A crescente capacidade de processamento de dados possibilita análises estruturais cada vez mais complexas. Isso possibilita e incentiva as normas a serem mais criteriosas, aumentando continuamente a sofisticação dos modelos exigidos e a demanda por ferramentas (SANTOS, 1994).

A norma da Associação Brasileira de Normas Técnicas ABNT NBR 6118/2014 padroniza o projeto de estruturas de concreto armado e protendido no Brasil. Uma das alterações em relação a versão anterior são os critérios para projetar com concretos cuja resistência característica à compressão do concreto (f_{ck}) for entre 50 e 90 MPa. Especificamente, é alterada a formulação da relação tensão-deformação do concreto apenas se este apresentar f_{ck} superior a 50 MPa. Portanto, existe demanda por estudos e formulações que possibilitem atender inclusive este novo caso de análise.

Uma das diversas situações em que tal consideração é relevante é a flexão oblíqua composta FOC. Santos (1994) define que a flexão é oblíqua se o plano de ação do momento fletor corta a seção transversal por uma reta que não coincide com o eixo de simetria da seção, relativa à seção de concreto e a disposição da armadura. Se a seção não apresentar eixo de simetria, a flexão é sempre oblíqua. Na flexão oblíqua composta ocorre na seção transversal força axial e momento fletor atuando com sentido qualquer na seção transversal.

O cálculo proposto neste trabalho é aplicável para esta situação: supõe-se um perfil de deformações normais quaisquer e calcula-se as solicitações resistentes: força axial e momento fletor, sendo este momento em qualquer direção; exatamente o caso que se denomina FOC. A análise pode ser executada em qualquer situação de deformação, portanto aborda estados-limites último (ELU) e de serviço (ELS). A sequência lógica funciona a partir das deformações impostas: as deformações na seção são as variáveis independentes; assim, pode-se também calcular a curvatura da seção, possibilitando ainda outras análises e usos para essa metodologia matemática.

As situações de carregamento mais simples, como a flexão simples e a flexão normal composta, são casos de carregamento que estão contidos na flexão oblíqua composta, portanto pode-se usar o cálculo aqui mostrado inclusive nestas situações.

A contribuição deste trabalho é aplicar os conceitos observados em rotinas como as de Werner (1974) e Santos (1994) para cálculo de flexão oblíqua composta, mas com a relação tensão-deformação da ABNT NBR 6118/2014, e apresentar seu uso em ELU e ELS. A integração da equação tensão-deformação é analítica, distinta de Rodrigues (2015) que usa integração numérica.

2 CARACTERIZAÇÃO E HIPÓTESES

Com geometria definida da seção de concreto e armadura, formula-se o problema da flexão oblíqua composta: tem-se como condições de equilíbrio como as equações (1), (2) e (3), em que o trecho na integral é a contribuição do concreto e o trecho no somatório é a contribuição das armaduras.

$$N_d = \iint_{A_{cc}} \sigma_{cd} \cdot dX \cdot dY + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sid} \quad (1)$$

$$M_{xd} = \iint_{A_{cc}} \sigma_{cd} \cdot X \cdot dX \cdot dY + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sid} \cdot X_{si} \quad (2)$$

$$M_{yd} = \iint_{A_{cc}} \sigma_{cd} \cdot Y \cdot dX \cdot dY + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sid} \cdot Y_{si} \quad (3)$$

As tensões normais em cada ponto da seção devem ser tais que correspondam às solicitações internas de força axial e momento fletor. O cálculo das equações (1), (2) e (3) envolve duas partes, a integral dupla em toda a região de concreto e a contribuição de cada barra de aço de armadura passiva e ativa. Cada perfil de deformações possui um resultado em solicitações internas análogo.

A hipótese de Bernoulli-Navier é considerada, portanto seções planas permanecem planas quando deformadas. A contribuição do concreto na tração é desprezada, mesmo nas verificações de serviço. Também considera-se aderência perfeita entre o aço da armadura e o concreto que a envolve, isto é, a deformação específica do aço da armadura é igual a deformação do concreto que a circunda.

As equações independem das unidades utilizadas, salvo nas que se fixa unidade. Sugere-se utilizar centímetros para comprimento, quilonewton (kN) para força e ‰ (por mil) para deformação.

2.1 RELAÇÃO CONSTITUTIVA E COMPORTAMENTO

Caracteriza-se cada material sob suas propriedades mecânicas com foco na norma brasileira ABNT NBR 6118/2014. Se for propício, as funções tensão-deformação podem ser alteradas isoladamente, e as demais rotinas mantidas. Portanto, é possível alterar as equações para que levem em conta outras considerações normativas, ou atualizadas se consideradas obsoletas.

Para a relação tensão-deformação do concreto, a norma brasileira de estruturas de concreto propõe uma equação para concretos cujo f_{ck} está entre 20 e 50 MPa, e uma outra se estiver entre 50 e 90 MPa. A formulação para cálculo da tensão normal no concreto σ_c em função da deformação específica do concreto ε_c para um ponto qualquer é apresentada na equação (4). Para distingui a função aplicada em cada trecho, adota-se a nomenclatura $\sigma_{c,0}$, $\sigma_{c,1}$ e $\sigma_{c,2}$.

$$\begin{aligned} \text{Se } \varepsilon &\leq 0 && \rightarrow \sigma_c = \sigma_{c,0} = 0 \\ \text{Se } 0 < \varepsilon &\leq \varepsilon_{c2} && \rightarrow \sigma_c = \sigma_{c,1} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \\ \text{Se } \varepsilon_{c2} < \varepsilon &\leq \varepsilon_{cu} && \rightarrow \sigma_c = \sigma_{c,2} = 0,85 \cdot f_{cd} \end{aligned} \quad (4)$$

Em que: $\varepsilon_{c,2}$: deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico; $\varepsilon_{c,u}$: deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura; ε_c : deformação específica do concreto (em ‰); σ_c : tensão à compressão no concreto; $\sigma_{c,0}$, $\sigma_{c,1}$ ou $\sigma_{c,2}$: tensão à compressão no concreto na região 0, 1 ou 2, respectivamente; f_{cd} : resistência de cálculo à compressão do concreto, adotado como f_{ck}/γ_c ; γ_c : coeficiente de ponderação da resistência do concreto que equivale a 1,4 para combinações normais.

Os valores das constantes são dados pelas equações (5).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c2} &= 2 \text{ ‰} \\ \varepsilon_{cu} &= 3,5 \text{ ‰} \\ n &= 2 \end{aligned} \quad \text{se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$
$$\begin{aligned} \varepsilon_{c2} &= 2 \text{ ‰} + 0,085 \text{ ‰} \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53} \\ \varepsilon_{cu} &= 2,6 \text{ ‰} + 35 \text{ ‰} \cdot \left(\frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4 \\ n &= 1,4 + 23,4 \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4 \end{aligned} \quad \text{se } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \quad (5)$$

A relação tensão-deformação admitida para a armadura passiva segue o apresentado pela equação (6). A tensão normal no aço de armadura passiva σ_s é função linear da deformação específica do aço

ε_s até que ocorra escoamento, então assume valor constante f_{yd} (valor de cálculo da resistência ao escoamento do aço da armadura passiva). A variável E_s é o módulo de elasticidade do aço da armadura passiva. Esta relação é conhecida como perfeitamente elasto-plástica. Isso é válido na compressão e na tração. A deformação ε_s é dada em valor absoluto, não em ‰.

$$\sigma_s = \begin{cases} \varepsilon_s \cdot E_s & \text{se } \varepsilon < \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{se } \varepsilon_{yd} < \varepsilon \end{cases} \quad (6)$$

Para a armadura ativa, ou de protensão, a tensão na armadura ativa σ_p é calculada em função da deformação total ε_p pela equação (7). A deformação ε_p também é dada em valor absoluto.

$$\sigma_p = \begin{cases} E_p \cdot \varepsilon_p & \text{se } \varepsilon_p \leq \varepsilon_{pyd} \\ f_{pyd} + \frac{(f_{ptd} - f_{pyd})}{(\varepsilon_{uk} - \varepsilon_{pyd})} \cdot (\varepsilon_p - \varepsilon_{pyd}) & \text{se } \varepsilon_{pyd} < \varepsilon_p \end{cases} \quad (7)$$

Sendo, em acordo com a norma brasileira: f_{pyd} : resistência de cálculo ao escoamento do aço de armadura ativa; f_{ptd} : resistência de cálculo à tração do aço de armadura ativa; ε_{pyd} é a deformação de início do escoamento do aço de armadura ativa em seu valor de cálculo; E_p é o módulo de elasticidade do aço de armadura ativa.

Os efeitos de protensão na seção são considerados embutidos na deformação de ε_p , que é a soma da deformação aplicada na armadura pelo concreto que a envolve ε_s , somado à deformação de pré-alongamento ε_{pre} , seguindo o raciocínio proposto por Carvalho (2012). É desprezada aqui a parcela da descompressão.

2.2 CONVENÇÃO DE SINAIS E DOMÍNIOS DE DEFORMAÇÃO

Para tensões e deformações, compressão é considerada positiva e tração, negativa. Os sinais adotados para os momentos fletores são mostrados pela Figura 1, adota-se o sinal positivo para momento fletor em torno do eixo x M_x que traciona a parte inferior e comprime a parte superior; momento fletor em torno de y M_y que traciona a parte da esquerda e comprime a parte da direita.

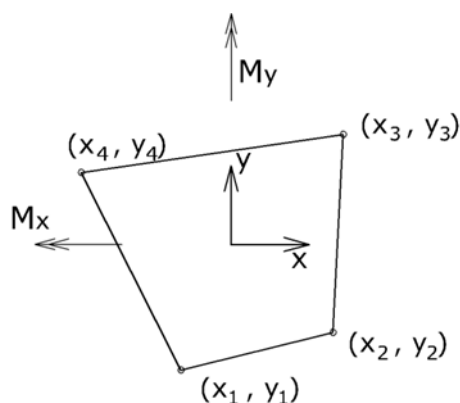


Figura 1. Convenção de sinais para momentos fletores na seção transversal.

Assumir tal convenção facilita a aplicação das equações apresentadas, pois torna compatíveis os sinais das variáveis momento, tensão e coordenada cartesiana.

Para avaliar a seção em estado-limite último ELU, considera-se que a distribuição de deformações pertence a um dos Domínios que constam na Figura 2. Nestes cenários as deformações da seção ocorrem em torno do ponto: A, em que a armadura mais tracionada alcança plastificação excessiva; B, em que o concreto comprimido é levado a deformações excessivas; ou C, ruptura também por compressão excessiva (ABNT NBR 6118/2014; SANTOS, 1994).

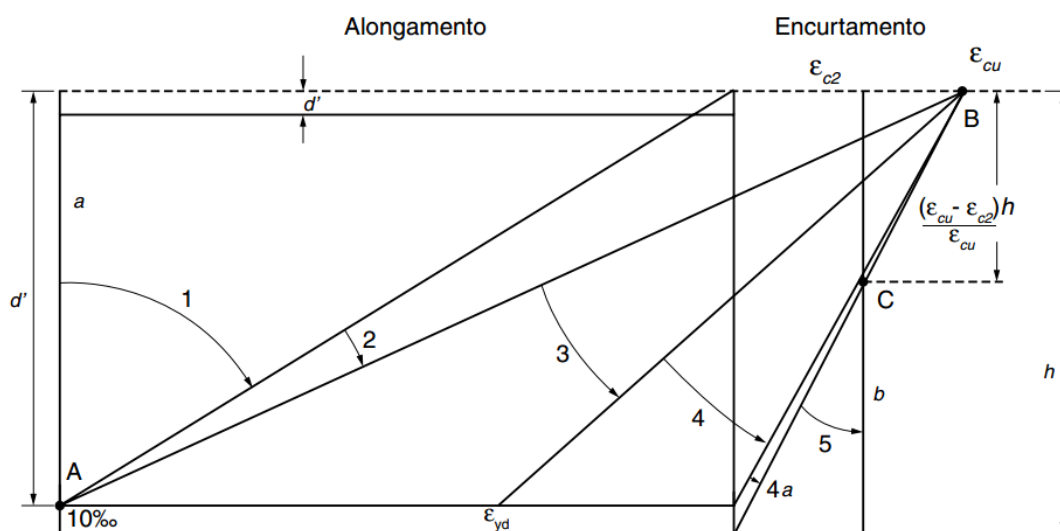


Figura 2. Domínios de deformação em Estado-limite último. Fonte: ABNT NBR 6118/2014.

3 CÁLCULO E EQUACIONAMENTO

As deformações são descritas pelo ângulo da linha neutra α , deformação na fibra mais comprimida de concreto ϵ_1 e deformação na fibra mais tracionada ϵ_2 , como mostra a Figura 3.

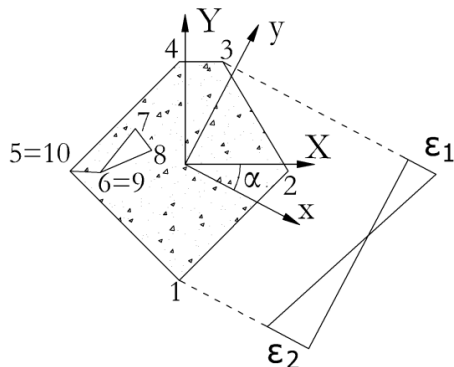


Figura 3. Seção transversal poligonal, deformações da seção dado por α , ϵ_1 e ϵ_2 .

A seção transversal é descrita no sistema de coordenadas inicial (X, Y). É conveniente girar o sistema de coordenadas, para que o eixo das abcissas seja paralelo ao eixo da linha neutra. Para isso altera-se cada coordenada da poligonal da seção de concreto e das armaduras, obtendo novas coordenadas (x, y). Neste novo sistema de coordenadas a tensão é função apenas da ordenada y, como consta na Figura 4.

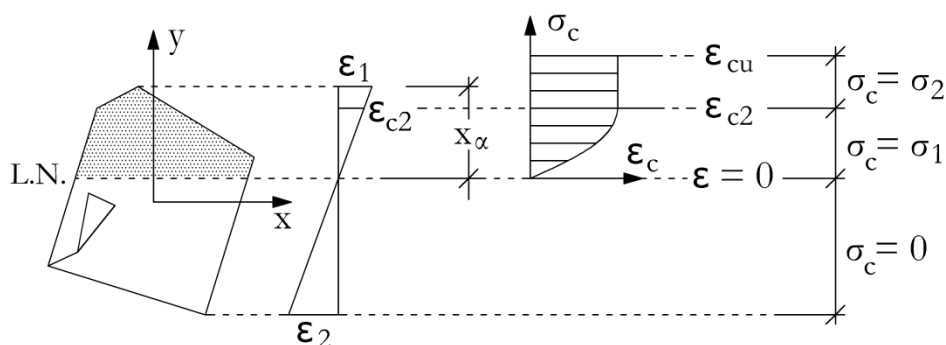


Figura 4. Seção transversal poligonal arbitrária, deformações, e tensões ocorrentes no concreto.

Tal rotação é feita usando as equações (8) e (9). Ao terminar o cálculo dos esforços, os resultados para momento fletor nas novas coordenadas devem ser corrigidos para o sistema original, com uso das equações (10) e (11) (WERNER, 1974; SANTOS, 1994).

$$x_i = X_i \cdot \cos(\alpha) - Y_i \cdot \sin(\alpha) \quad (8)$$

$$y_i = X_i \cdot \sin(\alpha) + Y_i \cdot \cos(\alpha) \quad (9)$$

$$M_X = M_x \cdot \cos(\alpha) + M_y \cdot \sin(\alpha) \quad (10)$$

$$M_Y = -M_x \cdot \sin(\alpha) + M_y \cdot \cos(\alpha) \quad (11)$$

A Figura 3 ilustra a distinção entre as coordenadas iniciais (X, Y) e as já rotacionadas (x, y).

3.1 FORÇA AXIAL E MOMENTOS RESISTENTES DA POLIGONAL DE CONCRETO

A seção de concreto é determinada por uma poligonal, que possibilita analisar seções de diversas formas. Formas circulares podem ser modeladas como polígonos aproximados. Também é possível analisar seções vazadas, pela inclusão de pontos na ordem inversa: pontos que contornam a região existente são incluídos em ordem anti-horária; para regiões vazadas os pontos seguem ordem horária, que cria um espaço livre, ilustrado na Figura 3 (região vazada dada pelos pontos 6-7-8-9).

Como mostram as equações (1), (2) e (3), a contribuição da poligonal de concreto é dada pela integração na área desta, que é a área A_{cc} nas equações. O raciocínio deste trabalho acompanha ao de Santos (1994), usando integração analítica para obtenção das solicitações. Existem alternativas, principalmente com uso de técnicas numéricas como a Quadratura de Gauss-Legendre (Papanikolaou, 2012; Rodrigues, 2015).

Para efetuar a integração analítica no presente trabalho, a seção é dividida em trapezoides que compõem a área total, cada trapezoide é composto por faixas infinitesimais. Uma força dF dada pelo produto tensão σ e área dA deve ser contabilizada para o cálculo dos esforços internos totais como mostram as equações (1), (2) e (3). A Figura 5 ilustra o trapezoide formado pelos pontos da poligonal, uma faixa infinitesimal e a tensão correspondente.

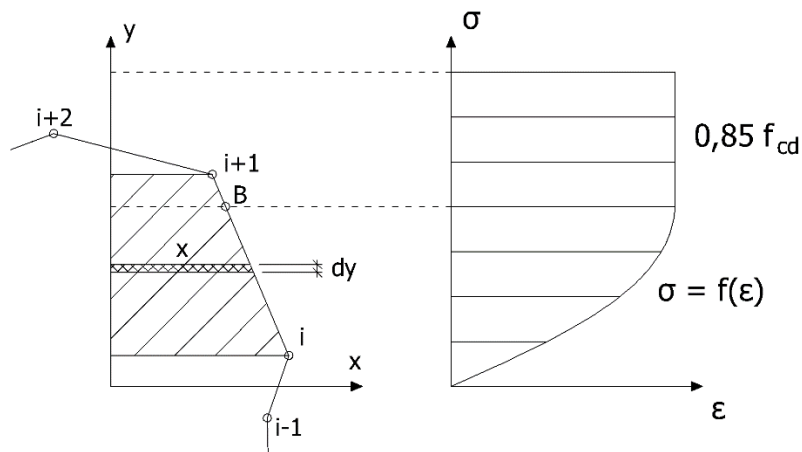


Figura 5. Faixa infinitesimal que compõe a seção transversal e a tensão correspondente no concreto.

Fonte: Adaptado de Silva (2015).

A inclusão da geometria da poligonal se dá pelas coordenadas cartesianas dos pontos, que são introduzidos na integral por equações de reta, que são escritas para cada segmento de reta que forma a poligonal, portanto dois pontos por vez. As retas são escritas em função da variável y , pois a tensão também varia função de y . Portanto, em contraste ao padrão em que y é função de x .

Há três comportamentos distintos para o concreto, $\sigma_{c,0}$, $\sigma_{c,1}$ e $\sigma_{c,2}$. No primeiro trecho, a tensão é de tração no concreto e aqui considerada nula, no segundo, é função da deformação e também da coordenada y , e no terceiro a tensão é constante, como mostra a Figura 4. Para cada um dos trechos, escreve-se uma integral definida, em que a tensão σ e a equação da reta x são escritos em função de y . Para simplificar as equações, certas variáveis estão agrupadas como indicado nas equações (12).

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1}{y_1 - y_2} & x_y &= c_1 + c_2 \cdot y & n_1 &= n + 1 \\
 c_2 &= \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} & g &= y_{max} - x_\alpha & n_2 &= n + 2 \\
 & & & & n_3 &= n + 3
 \end{aligned} \quad (12)$$

Sendo: x_y : a função de reta que determina a forma geométrica da poligonal de concreto, escrita em função de y ; x_α é a altura da linha-neutra; n : constante da relação constitutiva do concreto como na equação (5). As coordenadas ortogonais (x_1, y_1) são as coordenadas do ponto i e as coordenadas (x_2, y_2) são do ponto $i+1$. A variável i trata-se de um contador, que num programa acompanha o progresso nos pontos da poligonal. Tais variáveis e a área que representam constam na Figura 5.

Nos limites em que $\sigma_{cd} = \sigma_{ci,1}$, tem-se para cálculo de N , M_x e M_y respectivamente as equações (13), (14) e (15).

$$N_{cd,1} = \int 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{(y-g)}{x_{\varepsilon c2}} \right)^n \right] \cdot x_y \cdot dy =$$

$$N_{cd,1} = -0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left(-\frac{x_{\varepsilon c2} \cdot \left(\frac{g+x_{\varepsilon c2}-y}{x_{\varepsilon c2}} \right)^{n_1} \cdot (c_1 \cdot n_2 + d \cdot (g+x_{\varepsilon c2} + n \cdot y + y))}{n_1 \cdot n_2} - c_1 \cdot y - \frac{c_2 \cdot y^2}{2} \right) + Constante \quad (13)$$

$$M_{cd,1,xx} = \int 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{(y-(y_{max}-x))}{x_{\varepsilon c2}} \right)^2 \right] \cdot x \cdot y \cdot dy =$$

$$\frac{0,85 \cdot f_{cd}}{6 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} \cdot \left(3 \cdot c_1 \cdot \left(n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot y^2 + 2 \cdot x_{\varepsilon c2} \cdot \left(\frac{g+x_{\varepsilon c2}-y}{x_{\varepsilon c2}} \right)^{n_1} \cdot ((g+x_{\varepsilon c2}) \cdot n_3 + n_1 \cdot n_3 \cdot y) \right) + 2 \cdot c_2 \cdot \right.$$

$$\left. \left(n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot y^3 + 3 \cdot x_{\varepsilon c2} \cdot \left(\frac{g+x_{\varepsilon c2}-y}{x_{\varepsilon c2}} \right)^{n_1+1} \cdot (2 \cdot g^2 + 2 \cdot x_{\varepsilon c2}^2 + 2 \cdot x_{\varepsilon c2} \cdot n_1 \cdot y + n_1 \cdot n_2 \cdot y^2 + 2 \cdot g \cdot (2 \cdot x_{\varepsilon c2} + n_1 \cdot y)) \right) \right) + Constante \quad (14)$$

$$M_{cd,1,yy} = \int 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{(y-(y_{max}-x))}{x_{\varepsilon c2}} \right)^2 \right] \cdot \frac{x^2}{2} \cdot dy =$$

$$\frac{0,85 \cdot f_{cd}}{6 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} \cdot \left(3 \cdot c_1^2 \cdot \left(x_{\varepsilon c2} \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \left(\frac{g+x_{\varepsilon c2}-y}{x_{\varepsilon c2}} \right)^{n_1} + n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot y \right) + 3 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot \left(n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot y^2 + \right.$$

$$2 \cdot x_{\varepsilon c2} \cdot \left(\frac{g+x_{\varepsilon c2}-y}{x_{\varepsilon c2}} \right)^{n_1+1} \cdot ((g+x_{\varepsilon c2}) \cdot n_3 + n_1 \cdot n_3 \cdot y) \Big) + c_2^2 \cdot \left(n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot y^3 + 3 \cdot x_{\varepsilon c2} \cdot \right.$$

$$\left. \left(\frac{g+x_{\varepsilon c2}-y}{x_{\varepsilon c2}} \right)^{n_1+1} \cdot (2 \cdot g^2 + 2 \cdot x_{\varepsilon c2}^2 + 2 \cdot x_{\varepsilon c2} \cdot n_1 \cdot y + n_1 \cdot n_2 \cdot y^2 + 2 \cdot g \cdot (2 \cdot x_{\varepsilon c2} + n_1 \cdot y)) \right) \right) +$$

Constante

Em que $x_{\varepsilon c2}$ é a altura na seção transversal cuja deformação específica corresponda a ε_{c2} .

Enquanto nos limites em que $\sigma_{cd} = \sigma_{ci,2}$, isto é, o trecho em que a tensão é constante, N , M_x e M_y são dados por (16), (17) e (18), respectivamente.

$$N_{cd,2} = \int 0,85 \cdot f_{cd} \cdot x_y \cdot dy =$$

$$N_{cd,2} = 0,85 f_{cd} \cdot \left(c_1 \cdot y + c_2 \cdot \frac{y^2}{2} \right) + Constante \quad (16)$$

$$M_{cd,2,xx} = \int 0,85 \cdot f_{cd} \cdot x \cdot y \cdot dy =$$

$$= 0,85 f_{cd} \cdot y^2 \cdot \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2 \cdot y}{3} \right) + Constante \quad (17)$$

$$M_{cd,2,yy} = \int 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot dy =$$

$$0,85 \cdot f_{cd} \cdot \frac{c_1^2 \cdot y + c_1 \cdot c_2 \cdot y^2 + c_2^2 \cdot \frac{y^3}{3}}{2} + Constante \quad (18)$$

A vantagem da integração analítica é existir imprecisão, como pode haver nos processos numéricos. Tais equações são válidas para qualquer valor de f_{ck} entre 20 e 90 MPa. Caso a reta que limita a região esteja em trechos diferentes, é necessário criar um ponto intermediário. Isso é ilustrado na Figura 5, em que os pontos i e $i+1$ estão em trechos em que funções distintas descrevem a tensão do concreto σ_c , portanto faz-se uma integração de i até B , e então de B até $i+1$.

3.2 FORÇA E MOMENTOS RESISTENTES DAS ARMADURAS PASSIVA E ATIVA

A partir de deformações fixadas, a deformação e a tensão em cada barra de aço de armadura são calculáveis. A força axial de cada barra é dada pelo produto da tensão multiplicada pela área. O momento fletor é calculado fazendo-se o produto entre o braço de alavanca pelo valor da força. Para calcular o momento fletor decomposto em duas direções usa-se as expressões (19) e (20).

$$M_{s,i,x} = F_{s,i} \cdot y_{s,i} \quad (19)$$

$$M_{s,i,y} = F_{s,i} \cdot x_{s,i} \quad (20)$$

Onde: $M_{s,i,x}$: momento fletor resistente da seção fornecido pela barra de aço i em torno do eixo x ; $M_{s,i,y}$: análogo à $M_{s,i,x}$, porém relativo ao eixo y ; ($x_{s,i}$, $y_{s,i}$) são as ordenadas da barra de aço i ; $F_{s,i}$ a força axial da barra de aço i .

Os efeitos da protensão são considerados diretamente pela força axial da armadura ativa, que já inclui o pré-alongamento e suas consequências em termos de esforços.

3.3 APLICAÇÃO DA ROTINA EM ESTADOS-LIMITES ÚLTIMO E DE SERVIÇO

As rotinas apresentadas possuem pelo menos três aplicações de interesse norma brasileira: verificação de ELU gerando a envoltória de esforços resistentes, verificações de ELS, e apresentação da relação momento-curvatura frente a certa força axial, podendo ser inclusive nula.

Faz-se necessário um método de solução de sistema de equações. Por exemplo, o Método da Secante, que é uma aplicação do Método de Newton-Raphson a funções sem derivada acessível.

No caso do ELU, a principal abordagem é apresentar graficamente os esforços normais resistentes, em duas ou três dimensões. O gráfico em duas dimensões citado é conhecido como diagrama de interação, e o gráfico em três dimensões é a envoltória de esforços resistentes. O diagrama de

momentos resistentes pode ser construído a partir da rotina apresentada, isto é, calcular os esforços resistentes na seção transversal partindo das deformações. A envoltória de esforços resistentes pode ser vista como vários diagramas de momento fletor resistente empilhados em ordem de força axial, ao gerar vários diagramas paralelos e os representar. O diagrama de momentos resistentes é uma região limitada pelos momentos fletores resistentes, portanto ele representa o momento fletor resistente que ocorre em qualquer direção e sentido. A construção deste gráfico é feito pelo giro do ângulo da linha-neutra α . Para cada valor fixado de α é encontrado o momento fletor resistente M_x e M_y que é apresentado no diagrama. A rotação do ângulo da linha-neutra é feito por uso das equações (8), (9), (10) e (11). O cálculo é feito por passos, iniciando com $\alpha=0$, e incrementando até chegar aos 360° e abordar todas as inclinações possíveis, obtendo os valores M_x e M_y em cada uma.

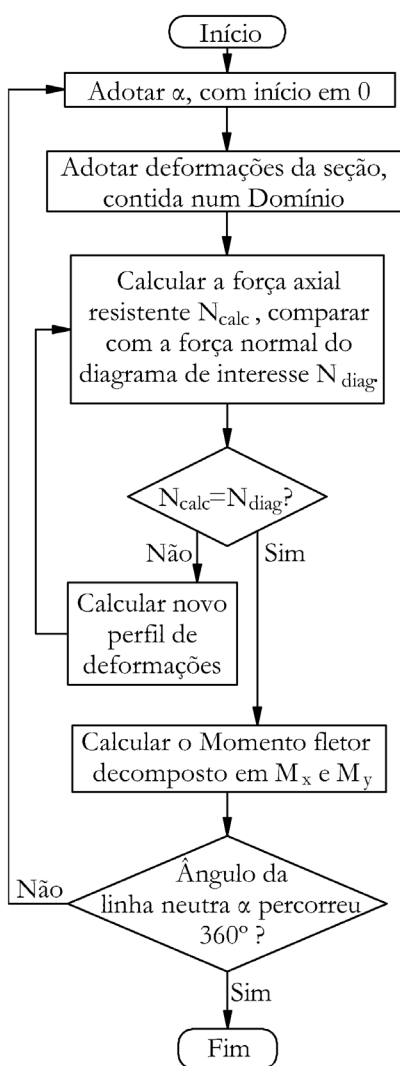
Fixado o ângulo α , determina-se por método iterativo quais os valores de ε_1 e ε_2 correspondem ao valor de força axial desejado: atribui-se um valor de deformações ε_1 e ε_2 dentro dos domínios de ELU e se calcula a força axial correspondente, repetindo até que a força axial obtida seja a esperada, e usando um método numérico para acelerar a convergência.

A variável dependente é a força axial resistente, e a variável independente que altera a força axial resistente é a deformação específica, que pode ser a deformação da borda superior ε_1 e da borda inferior ε_2 , como mostra a Figura 4, e qual destas deve ter seu valor alterado no processo iterativo depende, como mostra a Figura 2: em torno dos pontos A, B ou C.

Ao determinar o valor de ε_1 e ε_2 análoga a força axial desejada, basta calcular o momento fletor resistente obtido em x e y obtido que são abcissa e ordenada de um ponto do diagrama de momentos resistentes. Repete-se o cálculo, recomeçando na etapa de fixação do ângulo α , que recebe um incremento. Tal processo é repetido até que α percorra toda a circunferência.

Na Figura 6 consta um fluxograma com uma sequência lógica matemática proposta para calcular o diagrama de momentos resistentes, sem considerar detalhes de programação.

Diagrama de momentos resistentes



Relação M-N-1/r

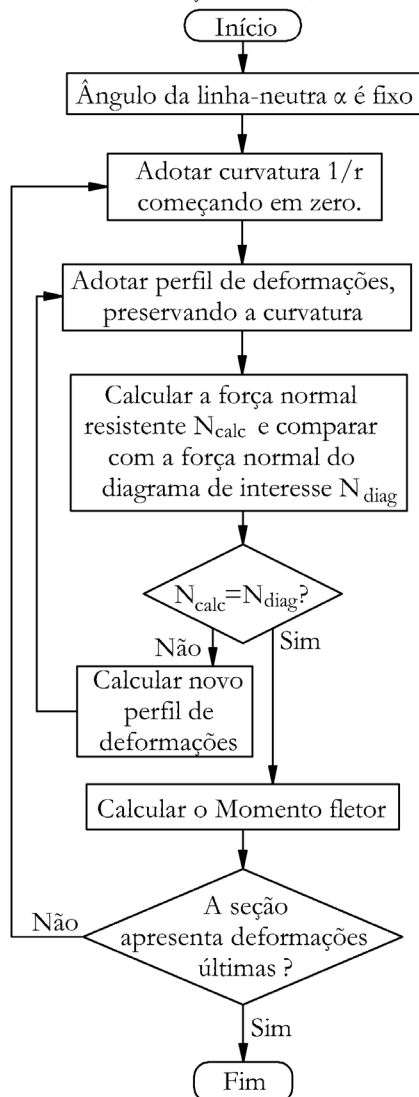
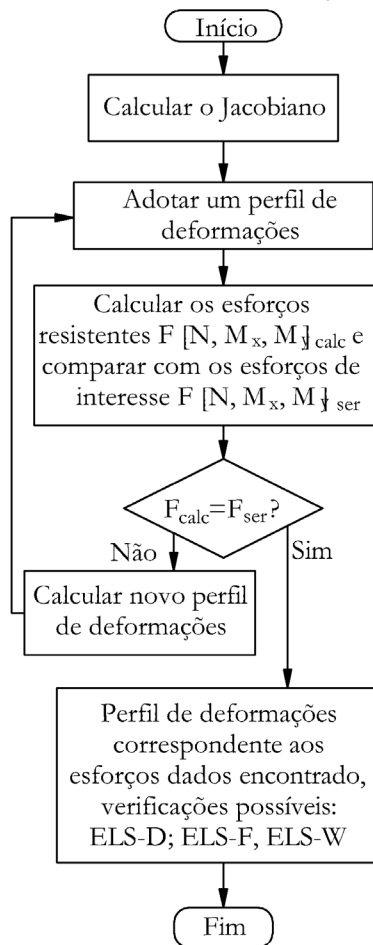
Cálculo da deformação conjugada a dados N, M_x, M_y 

Figura 6. Algoritmo para cálculo do diagrama de momentos resistentes, relação momento-normal-curvatura e verificações na situação de serviço.

O gráfico com a relação $M, N, 1/r$ também pode ser construído fazendo uso da rotina apresentada. Para determinar cada ponto que compõe o diagrama momento-curvatura, fixa-se a curvatura (com início em zero), e então se procura as deformações do topo e da base que resultam na força axial do diagrama desejado, e ao determiná-las, calcula-se o momento fletor correspondente a tais deformações. Aumentando a curvatura, repete-se o processo até que as deformações alcancem valores últimos. Esta sequência é ilustrada na Figura 6, no fluxograma do centro.

Finalmente, a verificação em estado-limite de serviço busca as deformações correlatas a dado conjunto de solicitações internas, e avaliar se tais deformações não excedem valores especificados em norma. Para isso, se adota outras variáveis independentes que caracterizem a deformação da seção transversal: deformação no centroide da poligonal ε_0 , diferença entre as deformações dos pontos da extremidade direita e esquerda $\Delta\varepsilon_x$ (pontos com maior e menor coordenada x) e diferença entre as deformações de topo e da base $\Delta\varepsilon_y$ (pontos com maior e menor coordenada y). Tais variáveis independentes possuem correlação mais direta com as variáveis dependentes: ao aumentar a deformação ε_0 , aumenta-se N. Tal relação existe entre $\Delta\varepsilon_x$ e M_y , e entre $\Delta\varepsilon_y$ e M_x . Fica definida a matriz de variáveis independentes $[x] = [\varepsilon_0, \Delta\varepsilon_x, \Delta\varepsilon_y]^T$.

Então se resolve o problema com uma técnica numérica de resolução de sistemas de equações não lineares: Escrevendo matematicamente, tem-se a equação (21), em que $F(x)$ é a matriz com as variáveis dependentes $[N, M_x, M_y]^T$, e J é a matriz jacobiana. A matriz jacobiana J é dada pelo diferencial das variáveis dependentes (que são os esforços internos) em relação às variáveis independentes (que definem o perfil de deformações). Para não calcular a derivada das funções, substitui-se o diferencial por uma pequena quantidade discreta.

$$[x]_{i+1} = [x]_i - \frac{F(x_i)}{J} \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\Delta N}{\Delta\varepsilon_0} & \frac{\Delta N}{\Delta\varepsilon_x} & \frac{\Delta N}{\Delta\varepsilon_y} \\ \frac{\Delta M_x}{\Delta\varepsilon_0} & \frac{\Delta M_x}{\Delta\varepsilon_x} & \frac{\Delta M_x}{\Delta\varepsilon_y} \\ \frac{\Delta M_y}{\Delta\varepsilon_0} & \frac{\Delta M_y}{\Delta\varepsilon_x} & \frac{\Delta M_y}{\Delta\varepsilon_y} \end{bmatrix} \quad (21)$$

O processo numérico é repetido até convergir aos valores de deformação que resolvem o problema. Certos estados-limites de serviço aplicáveis a seções de concreto protendido são calculáveis a partir de tais deformações. No caso de seções de concreto armado e protendido: estados-limite de serviço de abertura de fissura ELS-W, formação de fissuras ELS-F e descompressão ELS-D. A sequência completa está ilustrada no fluxograma da direita Figura 6.

4 EXEMPLOS

O programa de análise de flexão oblíqua composta chamado OblqCalco é disponibilizado, que executa as rotinas deste trabalho. Escrito na linguagem Pascal com uso da ferramenta Lazarus IDE, com código-fonte aberto e alterável. Portanto é possível compilar novamente o programa com qualquer modificação, por exemplo, alterar a relação tensão-deformação do concreto ou do aço, mudar o modo de integração das solicitações internas ou alterar o método numérico. O programa e código-fonte estão disponíveis no endereço <http://www.deciv.ufscar.br/calco/oblqcalco.htm>.

Está dividido em 4 módulos: geração do diagrama de momentos resistentes; representação da relação M , N , $1/r$; análise em serviço, que busca as deformações correlatas a dados esforços; e a aplicação da rotina básica: dados os valores de α , ε_1 e ε_2 , fornece os valores de N , M_x e M_y resistentes.

Apresenta-se três exemplos, com características apresentadas na Figura 7 e a Tabela 1.

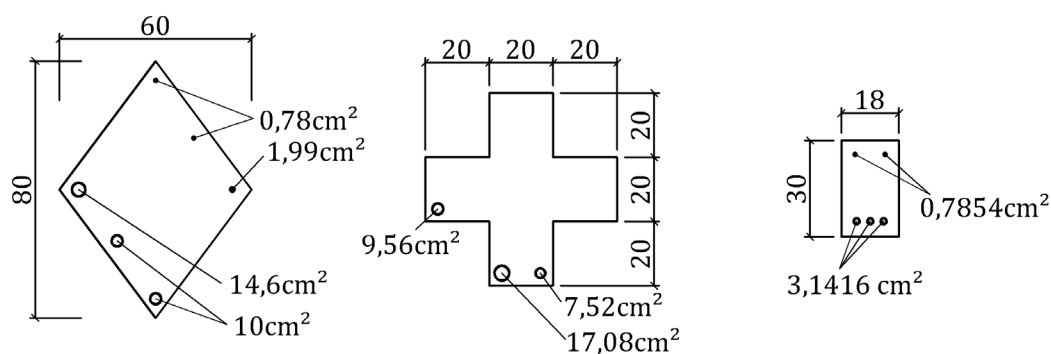


Figura 7. Seções transversais dos exemplos 1, 2 e 3, respectivamente, da esquerda para a direita.

Tabela 1 Geometria da seção transversal: concreto e armadura.

Exemplo	Coordenadas da poligonal de concreto		Armadura: Coordenadas e área de cada barra		
	x (cm)	y (cm)	x (cm)	y (cm)	As (cm²)
Exemplo 1: ELU de seção transversal rômica			-24	40	14,6
	0	0	-12	24	10
	30	40	0	6	10
	0	80	24	40	1,99
	-30	40	12	56	0,78
			0	74	0,78
Exemplo 2: seção transversal cruciforme	0	0			
	20	0			
	20	20	-16	24	9,56
	40	20	4	4	17,08
	40	40	16	4	7,52
	20	40			
	20	60			

	0	60			
	0	40			
	-20	40			
	-20	20			
	0	20			
Exemplo 3: ELS de seção retangular na verificação de serviço; $\gamma_c=1,0$; $\gamma_s=1,0$	-9	0	-4,2	4,8	3,1416
	9	0	4,2	4,8	3,1416
	9	30	-4,7	25,7	0,7854
	-9	30	4,7	25,7	0,7854
			0	4,8	3,1416

Exemplo 1: Calcular os esforços resistentes da seção em forma de losango. Adotar f_{ck} de 17,5 MPa, Aço CA-25 e força axial de 660kN. Verifica-la frente aos momentos fletores M_{xd} de 21120kN.cm e M_{yd} de 19800 kN.cm (LANGENDONCK, 1977; DE LYRA, BITTENCOURT, DE ASSIS, 2010).

Obtém-se a envoltória de momentos resistentes exposta na Figura 8, gráfico da esquerda. Percebe-se que os valores obtidos se assemelham a referência. Ademais, a seção atende ao ELU frente aos esforços propostos, pois o ponto que os descreve está contido no diagrama de momentos resistentes.

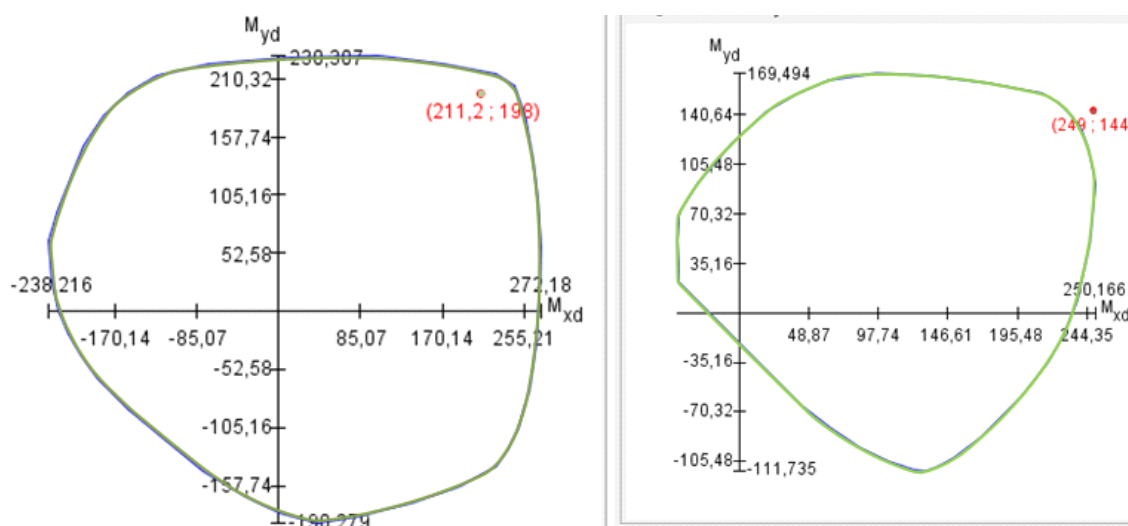


Figura 8. Diagramas de momentos resistentes dos exemplos 1 e 2: Resultados por De Lyra, Bittencourt e De Assis (2010) em azul, sobrepostos pelos do presente trabalho em verde.

Exemplo 2: Calcular os esforços de uma seção em forma de cruz bissimétrica, considerando-se que a força axial atuante seja nula, o valor f_{ck} é 16,8 MPa e aço CA-25. Determinar se a seção transversal descrita suporta os momentos fletores M_{xd} de 249 kNm e M_{yd} de 144 kNm.

O comparativo entre diagramas de momentos resistentes consta no gráfico da direita da Figura 8. Como ilustrado, resultado deste trabalho concorda com a bibliografia. Ademais, a seção transversal não atende ao ELU para os esforços dados, pois o ponto os representa está fora da região resistente.

Exemplo 3: Apresentar o perfil de tensões e deformações de seção transversal retangular, com base de 18 cm e altura de 30 cm, concreto C90, aço CA-50, armadura negativa de 2 barras de 10 mm e armadura positiva compostas por 3 barras de 20 mm de diâmetro cada uma, com cobrimento de 3 cm e estribo composto por barras de 8 mm de diâmetro. Considerar cenários cujo momento fletor na combinação de serviço corresponda a 33%, 67%, 100% e 140% de M_k , sendo M_k é igual a 6640kN.cm. Usa-se $\gamma_c=1,0$, concordando com a seção 12.4.1 da ABNT NBR6118/2014.

A comparação apresentada é das rotinas de flexão oblíqua composta com cálculos analíticos do estágio II, como consta por Ghali, Favre e Elbadry (2012). O estágio II é escolhido, pois se aproxima das considerações aqui usadas na situação de serviço: despreza a resistência a tração do concreto e considera a relação tensão-deformação linear. Próximo da origem, a equação (1) se aproxima de uma reta. Na formulação de estágio II, o concreto é caracterizado pelo módulo de elasticidade E . Para aproximar as diferentes análises, adota-se $E=d\sigma_c/d\varepsilon(\varepsilon=0)$.

Os resultados constam na Tabela 2 e ilustrados na Figura 9. No estágio II, a altura da linha-neutra x_{II} obtida é de 9,054 cm e o momento de inércia da seção homogeneizada, $I_{II}=17126,9\text{cm}^4$;

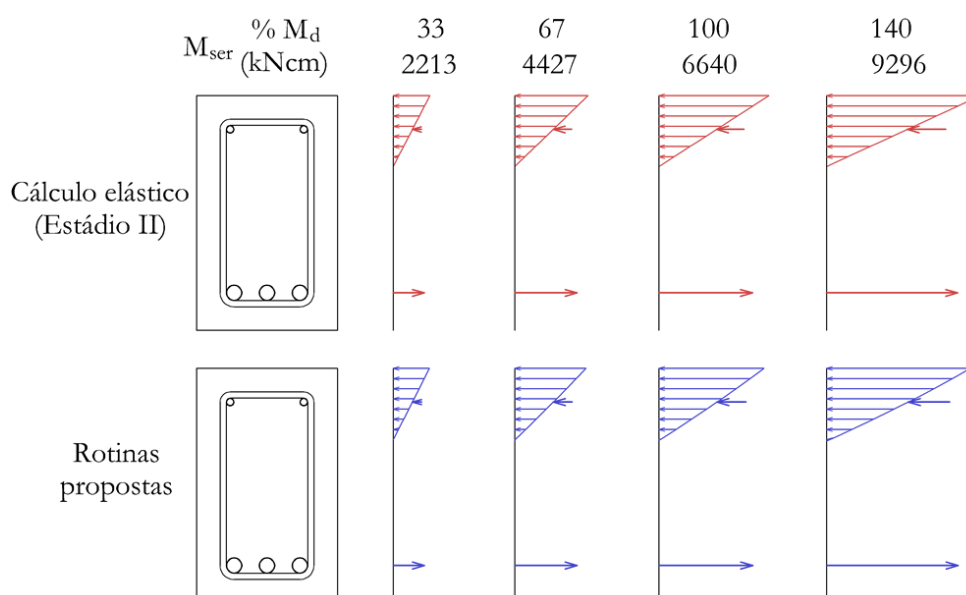


Figura 9. Exemplo 3: perfil de tensões no concreto e na armadura, em escalas diferentes.

Tabela 2 Resultados da verificação em serviço do exemplo 3.

M _{ser} (kNcm)	2213 (33% Mk)			4427 (67% Md)			6640 (100% Mk)			9296 (140% Mk)		
	Cálc.*	Alg.*	Erro %	Cálc.*	Alg.*	Erro %	Cálc.*	Alg.*	Erro %	Cálc.*	Alg.*	Erro %
ε_c (‰)	0,284	0,286	0,8	0,568	0,579	2	0,852	0,879	3	1,19	1,25	5
σ_c (MPa)	11,7	11,5	1	23,4	22,7	3	35,1	33,6	4	49,1	45,9	7
ε_s (‰)	-0,507	-0,506	0,1	-1,01	-1,01	0	-1,52	-1,52	0,2	-2,13	-2,14	0,4
σ_s (MPa)	-106	-106	0,1	-213	-213	0	-319	-312	0,2	-447	-449	0,4
ε_s' (‰)	0,149	0,151	1	0,298	0,307	3	0,448	0,469	5	0,627	0,672	7
σ_s' (MPa)	31,3	31,7	1	62,7	64,5	3	94	98,5	5	132	141	7

*Cálc.: Cálculo no estágio II, com $E_c = d\sigma/d\varepsilon$; Alg.: Algoritmo deste trabalho.

Observando a Tabela 2 e a Figura 9, nota-se que a tensão do concreto pela análise com as rotinas é uma curva, mas se assemelha a uma reta, semelhança que reduz conforme o esforço cresce. Também é visível que quanto menor o momento fletor aplicado, mais semelhantes são os resultados entre as análises. Conforme os esforços aumentam, as rotinas seguem a curva da relação constitutiva do concreto da equação (4), enquanto o estágio II se mantém linear, distanciando os resultados das análises.

As deformações nas bordas da seção obtidas na análise pelas rotinas são maiores que obtidas na análise do estágio II, em razão da relação tensão-deformação das rotinas ser uma curva com concavidade para baixo, isto é, cuja rigidez cai conforme o esforço aumenta.

5 CONCLUSÕES

Constam aqui rotinas análise de seções transversais de concreto armado e protendido sujeitas solicitações normais. As rotinas são úteis em verificações de ELU e ELS. Frisa-se o aspecto geral da formulação da relação tensão-deformação em relação às classes de resistência do concreto da norma brasileira, possível uso de armadura ativa e boa convergência para os exemplos testados.

Além das aplicações expostas, a ferramenta permite calcular os diagramas de momento-curvatura.

As rotinas não incluem dimensionamento. Com uso das rotinas apresentadas, é possível construir um procedimento para fazê-lo: se supõe uma seção com armadura inicial e verifica-se se dados esforços estão contidos na região resistente do diagrama de momentos resistentes. Caso negativo, aumenta-se

a armadura e aplica-se a rotina novamente. A construção do diagrama de momentos resistentes é parte do programa e código-fonte disponíveis.

Por fim, o programa e seu código-fonte aberto são uma contribuição ao meio técnico, pois é crescente a importância da programação como ferramenta para o projeto estrutural, e o programa disponibilizado é livre e orientado ao objeto, podendo ser acoplado a outros ao todo ou em partes.

Agradecimentos

Agradecimentos à CAPES, cujo fomento possibilitou a execução deste trabalho e aos desenvolvedores do programa Lazarus, em que as rotinas foram compiladas e testadas.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de estruturas de concreto. - NBR 6118, Rio de Janeiro, 2014.

CARVALHO, R.C. Estruturas de Concreto Protendido: cálculo e detalhamento. São Paulo: Editora Pini, 1ed, 2012, 431p.

DE LYRA, P. H. C.; BITTENCOURT, T. N.; DE ASSIS, W. S. Desenvolvimento de uma ferramenta didática para o estudo da flexão composta oblíqua em seções quaisquer de concreto armado. Revista Ibracon de Estruturas e Materiais, v. 3, n. 2, p. 205-218, jun. 2010.

FUSCO, P. B. Estruturas de concreto – solicitações normais. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois S.A. Rio de Janeiro, RJ. Editora Guanabara Dois S.A., 1981, 464p.

GHALI, A; FAVRE, R; ELBADRY, M. Concrete Structures: stress and deformations: analysis and design for sustainability. 4a ed. London: Spon Press, 2012, 637p.

LANGENDONCK, T. V. Flexão composta oblíqua no concreto armado. São Paulo: EESC-USP, 1977.

OblqCalco. Endereço: <<http://www.deciv.ufscar.br/calco/oblqcalco.htm>>. Acesso em: 15 fev 2018.

Papanikolaou, V. K. Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load. Computers and Structures, v. 98-99, 2012, 33-54.

RODRIGUES, R. V. A new technique for ultimate limit state design of arbitrary shape RC sections under biaxial bending. *Engineering Structures*, v. 104, 2015, 1-17.

SANTOS, L. M. Sub-rotinas básicas do dimensionamento de concreto armado. v 1. São Paulo: Thot Editora, 1994.

SILVA, L. M. Programa computacional para análise e verificação de seções de concreto armado e protendido com flexão oblíqua composta, São Carlos, 2015, Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil, Universidade de São Carlos, 189 p.

WERNER, H. Schiefe Biegung polygonal umrandeter Stahlbeton-Querschnitte. *Beton- und Stahlbetonbau*, v. 69, 1974, 92-97.

**ANALYSIS OF REINFORCED AND PRESTRESSED CONCRETE CROSS SECTIONS
UNDER BIAXIAL BENDING FOR ULTIMATE AND SERVICEABILITY LIMIT STATES
BY ANALYTICAL INTEGRATION**

Abstract

Biaxial bending is defined by combined axial force and bending around two axes, in such case the ultimate and serviceability limit states checks have increased complexity. This paper presents a method to calculate the internal forces from biaxial bending of polygonal shaped reinforced or prestressed concrete cross sections from pinned strains. To this end, the analytical integral for each internal force is calculated from the variables defining the geometric form and constitutive relation. An equation to calculate each internal force is obtained, which are used to plot the resisting bending moment diagram for given axial force, plotting the moment-curvature relationship and service checks. Those uses are presented as flowcharts and compiled in the software OblqCalco, which is free, open and available. Examples are given, with matching results and graphically presented.

Keywords: Biaxial bending, normal stress, ultimate limitstate, service limitstate.

Introduction

Ongoing improvements of data processing capacity allow for more complex analysis methods, which encourages standards to be increasingly demanding, thus requiring better models and tools.

Brazilian standard for reinforced and prestressed concrete ABNT NBR 6118/2014 features methods for analyzing structures with concrete which characteristic compressive strength f_{ck} is between 50 and 90 MPa, not included in its previous versions, making older programs unable to analyze them.

Calculation Method

The equilibrium conditions are shown in equations (1), (2) and (3). Each strain profile has an analogue result in terms of axial force N and bending moments around x axis M_x and y axis M_y .

The stress-strain relations for concrete and steel are shown in equations (4), (5), (6) and (7). Positive sign is adopted for compressive strains and stresses as well as bending moments with directions according to Figure 1. Figure 2 shows the ultimate limitstate (ULS)'s strain domain. The concrete is modeled as a polygon, and Figure 5 display a region limited by two ordered pairs. The internal forces (1), (2) and (3) are calculated by integrating the contribution of each strip, obtaining equations (13), (14) and (15) for $\sigma_c = \sigma_{c1}$ or (16), (17) and (18) for $\sigma_c = \sigma_{c2}$.

The routine calculates axial force and bending moments as a function of a strain profile. It can be used to generate the interaction diagram of ultimate strength by calculating the bending moment which occurs if the strains results in a pre-established axial force for each neutral-axis angle α .

The bending-curvature curve for a stated axial force is also obtainable by determining the bending moment analog to a strain profile which results in a desired axial force, pinning the curvature.

Another possibility is to apply this routine to check serviceability, as it works with any strains. It is possible to run it in reverse, calculating the strain profile that results in a service load combination.

These algorithms are summarized in Figure 6 and compiled on a free available software *OblqCalco*.

Examples

The results of three examples are presented, which geometry is shown in Figure 7 and Table 1. For example 1, consider $f_{ck} = 17.5\text{MPa}$, $f_{yk} = 250\text{MPa}$, internal forces $[N, M_x, M_y] = [660\text{ kN}, 21120\text{ kNcm}, 19800\text{ kNcm}]$, as for example 2 consider $f_{ck} = 16.8\text{MPa}$, $f_{yk} = 250\text{MPa}$, and internal forces: $[N, M_x, M_y] = [0\text{ kN}, 249\text{ kNm}, 144\text{ kNm}]$. For both examples the ULS is checked and their interaction diagram shown in Figure 8 with the results from bibliography, showing similar curves.

For example 3 consider $f_{ck} = 90\text{MPa}$, $f_{yk} = 500\text{MPa}$ and verify in service conditions M_x as 33, 67, 100 and 140% of M_k , with $M_k = 6640\text{ kNcm}$. Figure 9 and Table 2 presents routine and analytic results which are more alike for lower values of applied load.

Conclusions

The presented method allows analysis of prestressed concrete sections under axial force and biaxial bending both in the ultimate and serviceability limit states using equations from the Brazilian standard for concrete and steel.

The provided program *OblqCalco* can be used to obtain the interaction diagram and moment-curvature curve for any axial load and also calculate which strains cause pre-established loads, as well as calculate the strain profile in service conditions.