

Análise em três dimensões de pontes ferroviárias considerando interação entre veículo e estrutura

Cavalcante, E.L.B.¹, Sampaio, R.A.C.²

Resumo

Este estudo apresenta uma metodologia numérica para a análise dinâmica de pontes em três dimensões, considerando a interação entre a ponte e o veículo ferroviário. Foram apresentados 4 tipos de veículo: um modelo composto por forças concentradas (único modelo sem interação); um modelo composto apenas por duas massas acopladas à via; um modelo simplificado composto por uma massa suspensa (caixa e truques), duas massas acopladas à estrutura (rodas) e toda a suspensão (primária e secundária) descrita por um único componente de rigidez e amortecimento; e um modelo completo composto por três massas suspensas (massa e dois truques), oito massas acopladas à estrutura (rodas) e a individualização das suspensões primária e secundária. O modelo completo é o que melhor representa o veículo ferroviário, por permitir a modelagem da caixa e dos truques separadamente, com inércia rotacional em torno dos eixos transversal e longitudinal, e em razão da discriminação maior das rigidezes e dos amortecimentos. Na análise do modelo sem interação podemos constatar que existe um intervalo de velocidades em que o fenômeno de ressonância ocorre. Verificou-se que esse fenômeno ocorre em decorrência de que a frequência do carregamento coincide com a frequência fundamental de vibração da estrutura.

Palavras-chave: Ponte ferroviária; Análise dinâmica; Interação veículo-estrutura; Ressonância.

¹ Mestrando em estruturas pela Universidade Federal do Pará, Auditor Federal de Controle Externo do Tribunal de Contas da União, Rua dos Mundurucus, 2256, Apto. 1001 – Batista Campos, CEP 66025-660 – Belém – PA – Brasil. Tel: +55 91 8124 7794, E-mail: ericlb@tcu.gov.br

² Doutor em estruturas pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Prof. Adjunto, Departamento de Engenharia Civil, DEC/UFPa, Rua Augusto Corrêa, 01 – Guamá, CEP 66075-110 – Belém – PA – Brasil. Tel: +55 91 3218 2133, E-mail: rsampaio@ufpa.com

<http://dx.doi.org/10535/rsae.v14i1.886>

1. Introdução

As pontes e viadutos são obras de arte especiais de engenharia civil, as quais são solicitadas dinamicamente pelos veículos, sejam ferroviários ou rodoviários.

Estas construções são solicitadas por cargas móveis que induzem efeitos dinâmicos na estrutura que são função de vários fatores, tais como do tipo e velocidade do veículo, defeitos na via (pavimento ou trilho), propriedades do lastro, do dormente e características dinâmicas da estrutura (frequências naturais, modos de vibração e taxas de amortecimento).

Dependendo dos valores desses fatores, a resposta da estrutura será uma determinada e, além disso, pode-se ter a ocorrência de ressonância em maior ou menor grau.

Neste estudo se utiliza duas abordagens para a consideração da ação dinâmica dos veículos sobre a estrutura: quando se fala do sistema veículo-estrutura fica implícita a ocorrência da interação entre esses dois sub-sistemas; a outra abordagem é a não consideração de interação, em que o veículo é representado por uma força concentrada.

O movimento do sistema veículo-estrutura em três dimensões é descrito por um sistema de equações diferenciais que possui como variáveis os graus de liberdade do veículo e da ponte ou viaduto.

Os infinitos graus de liberdade do veículo podem ser reduzidos aos movimentos translacionais e rotacionais do centro de gravidade dos componentes principais deste (caixa, truque e rodas). Quanto mais se individualiza os componentes do veículo, maior o seu número de graus de liberdade, tornando assim mais precisa a análise.

A estrutura pode ser considerada como formada de inúmeros (mas determinados) elementos finitos os quais são considerados como conectados entre si nos seus pontos nodais. Os graus de liberdade da estrutura podem ser reduzidos justamente aos movimentos de translação e rotação destes pontos nodais.

Através da utilização do método da rigidez direta, tendo como parâmetro a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, pode-se obter as matrizes de rigidez e massa globais da estrutura e, em seqüência, a matriz de amortecimento da estrutura.

Da mesma forma como no caso dos veículos, a qualidade dos elementos finitos que se escolhe para descrever a estrutura, bem como o número destes elementos, faz com que a análise seja mais precisa ou não.

O sistema de equações diferenciais de movimento pode ser descrito por uma única equação diferencial quando escrito em forma matricial. Esta equação diferencial matricial pode ser resolvida por métodos numéricos usuais.

Os três modelos com interação considerados são utilizados para se comparar as amplitudes em cada um dos modelos. Por outro lado, o modelo sem interação (forças concentradas) é utilizado para se mostrar amplitudes de ressonância e as diferenças em relação à resposta estática.

2. Formulação dos veículos

Os modelos dos veículos podem ser obtidos tanto a partir do princípio de D'Alembert (equilíbrio dinâmico de forças) quanto a partir das equações de Euler-Lagrange (equilíbrio em termos de energia). Esta última forma foi utilizada para o desenvolvimento das equações de movimento que serão apresentadas nas seções seguintes.

Além da hipótese de os graus de liberdade do veículo serem considerados como reduzidos aos movimentos de translação vertical e rotações longitudinal e transversal do centro de gravidade das massas suspensas e do movimento de translação vertical das rodas, outras hipóteses foram adotadas: o veículo é simétrico tanto transversal como longitudinalmente; as molas de suspensão comportam-se de uma maneira linear; os deslocamentos angulares são pequenos suficientemente de forma a aproximar o seno e tangente de um ângulo pelo próprio ângulo; todos os componentes do veículo movem-se a mesma velocidade; considera-se que não ocorre descontinuidade entre a roda e a ponte; e o centro de gravidade da roda é considerado como localizado sobre o centro de gravidade da ponte.

Em um sistema conservativo, pode-se demonstrar a validade da seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_j} = 0 \quad (2.1)$$

onde:

q_j são os graus de liberdade do sistema.

Denomina-se Lagrangeano $L = T - V$ à diferença da energia cinética menos a energia potencial de um sistema. A equação de equilíbrio acima Equação (2.1) foi descoberta independentemente por Euler e Lagrange, daí ser denominada equação de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad (2.2)$$

Para descrever todo o movimento do sistema, deve-se escrever esta equação para cada um dos graus de liberdade do sistema. Quando parte da energia do sistema for dissipada por elementos submetidos a forças que sejam proporcionais a sua velocidade, é possível acrescentar uma parcela à equação de Euler-Lagrange utilizando uma função dissipativa, aqui denominada R (Barbosa, 1999, *apud* Montoya, 2009).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (2.3)$$

A função R é denominada de função de dissipação de Rayleigh (Barbosa, 1999, *apud* Montoya, 2009) que pode ser considerada como dependente da velocidade da seguinte forma:

$$R = \frac{1}{2} c v^2 \quad (2.4)$$

Para o sistema composto de massa, mola e amortecedor, tem-se que a energia cinética, a energia potencial e a energia dissipada são dadas por (Gere, 2006):

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2} k x^2, \quad R = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 \quad (2.5)$$

onde:

m é a massa;

k é a rigidez; e

c é o amortecimento do sistema.

Há situações em que o movimento ocorre em torno de um eixo, de tal modo que a massa pode produzir movimento à rotação, ao qual estará associado uma energia cinética rotacional. Pode-se definir assim a energia cinética rotacional da massa:

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (2.6)$$

onde:

θ é o ângulo de rotação da massa; e

J é a inércia rotacional da massa.

As forças que atuam sobre o sistema são impostas pela interação entre o veículo e a estrutura, assumindo-se que as forças são aplicadas sobre a estrutura de modo concentrado (Montoya, 2009).

De uma forma geral, as equações de equilíbrio para qualquer tipo de veículo em vibração livre que irá interagir com a estrutura pode ser escrita como (Romero, 2002):

$$\begin{pmatrix} M_{vv} & 0 \\ 0 & M_{rr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{u}_v \\ \ddot{u}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{vv} & C_{vr} \\ C_{rv} & C_{rr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{u}_v \\ \dot{u}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{vv} & K_{vr} \\ K_{rv} & K_{rr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_v \\ u_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

onde:

M_{vv} , M_{rr} são sub-matrizes de massa para veículo e rodas;

C_{vv} , C_{vr} , C_{rv} , C_{rr} são sub-matrizes de amortecimento para veículo e rodas;

K_{vv} , K_{vr} , K_{rv} , K_{rr} são sub-matrizes de rigidez para veículo e rodas; e

$u_v, u_r, \dot{u}_v, \dot{u}_r, \ddot{u}_v, \ddot{u}_r$ são vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações do veículo e roda, respectivamente.

Modelo de massas: considera-se a massa do veículo ($2.m_r$) como um elemento externo à estrutura e composta da massa da caixa, dos truques e das rodas. Esta massa conjunta será acoplada ao sistema convenientemente e aplicará uma força de interação à estrutura correspondente ao peso do veículo. Este modelo de veículo não possui rigidez e amortecimento.

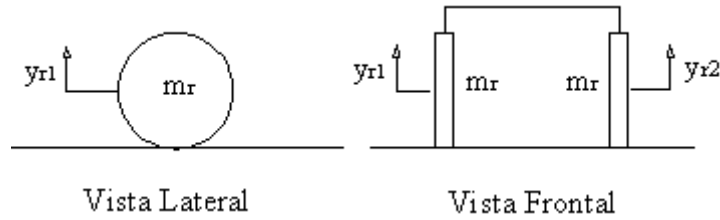


Figura 2-1: Modelo de veículo composto de massas.

Neste caso, os deslocamentos generalizados do sistema são os próprios dois graus de liberdade do veículo (y_{r1} e y_{r2}).

As equações de Euler-Lagrange que determinam o equilíbrio do sistema para este modelo de veículo são:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{r1}} - \frac{\partial L}{\partial y_{r1}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_{r1}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{r2}} - \frac{\partial L}{\partial y_{r2}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_{r2}} = 0 \quad (2.8)$$

O Lagrangeano e a função de dissipação do sistema são dados por:

$$L = \frac{1}{2} . m_{r1} . (\dot{y}_{r1})^2 + \frac{1}{2} . m_{r2} . (\dot{y}_{r2})^2, \quad R = 0 \quad (2.9)$$

Desenvolvendo cada um dos termos das Equações (2.8), valendo-se das Equações (2.9), tem-se as equações de movimento para o veículo com dois graus de liberdade:

$$m_r . \ddot{y}_{r1} = 0, \quad m_r . \ddot{y}_{r2} = 0 \quad (2.10)$$

Escrevendo esta Equações (2.10) na forma matricial e considerando a Equação (2.7), tem-se:

$$M_{vv} = (0), \quad M_{rr} = \begin{pmatrix} m_r & 0 \\ 0 & m_r \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} C_{vv} &= C_{rv} = C_{vr} = C_{rr} = (0), \\ K_{vv} &= K_{rv} = K_{vr} = K_{rr} = (0), \\ u_v &= (0), \quad u_r = \begin{pmatrix} y_{r1} \\ y_{r2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Modelo simplificado: este é o modelo mais simples em 3D que considera a interação do veículo com as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura. A massa da caixa e dos truques são consideradas conjuntamente (m_v), enquanto a massa das duas rodas (m_r) é considerada como acoplada à estrutura. Neste modelo existem quatro graus de liberdade (y_v , β_v , y_{r1} e y_{r2}). Considera-se assim a inércia rotacional da massa suspensa do veículo em relação ao seu eixo longitudinal (J_v). As rigidezes são representadas por k_1 e k_2 , e os amortecimentos por c_1 e c_2 .

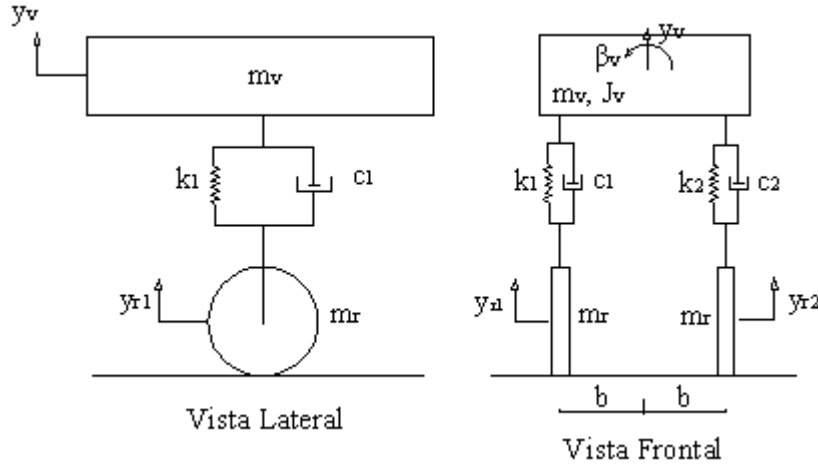
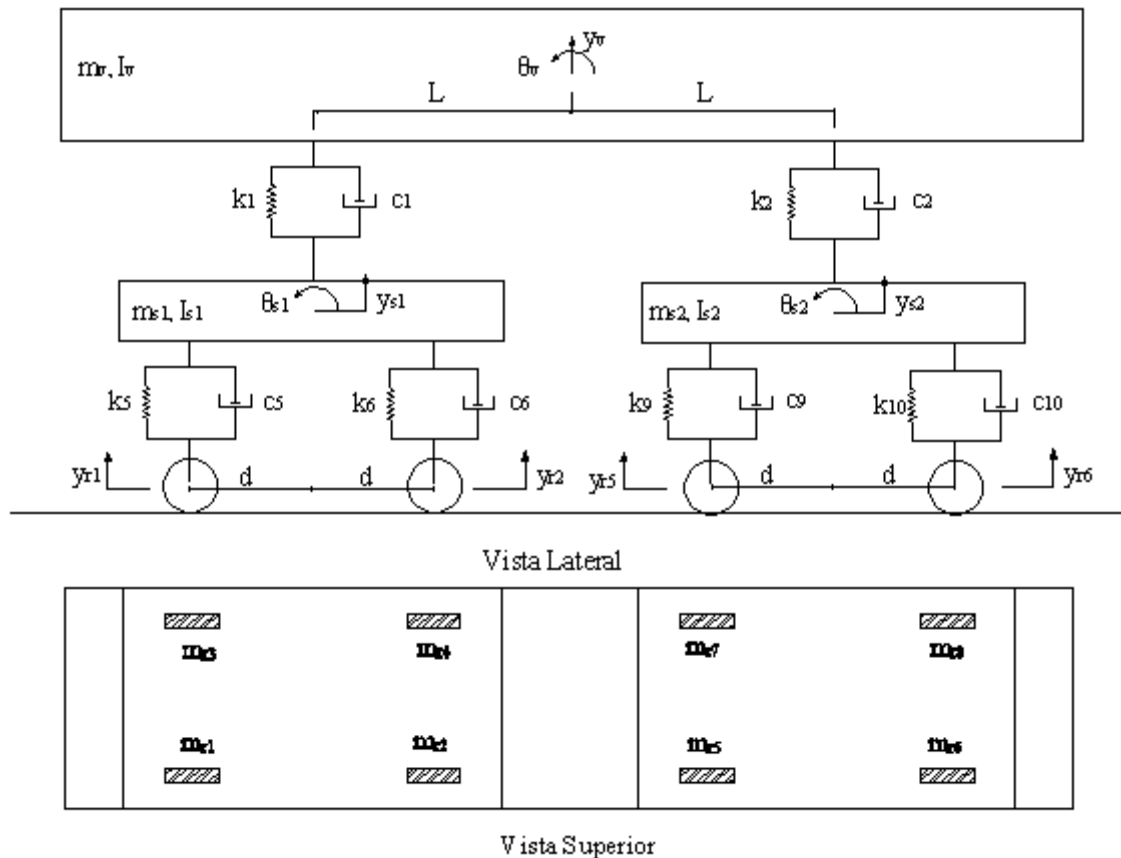


Figura 2-2: Modelo de veículo simplificado.

Pode-se mostrar de forma similar ao modelo de massas que, neste caso, os termos da Equação (2.7) correspondem a:

$$\begin{aligned} M_{vv} &= (m_v), \quad M_{rr} = \begin{pmatrix} m_r & 0 \\ 0 & m_r \end{pmatrix}, \\ C_{vv} &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & (-c_1 + c_2).b \\ (-c_1 + c_2).b & (c_1 + c_2).b^2 \end{pmatrix}, \quad C_{vr} = \begin{pmatrix} -c_1 & -c_2 \\ c_1.b & -c_2.b \end{pmatrix}, \quad C_{rv} = C_{vr}^T, \quad C_{rr} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \\ K_{vv} &= \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & (-k_1 + k_2).b \\ (-k_1 + k_2).b & (k_1 + k_2).b^2 \end{pmatrix}, \quad K_{vr} = \begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 \\ k_1.b & -k_2.b \end{pmatrix}, \quad K_{rv} = K_{vr}^T, \quad K_{rr} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \\ u_v &= \begin{pmatrix} y_v \\ \beta_v \end{pmatrix}, \quad u_r = \begin{pmatrix} y_{r1} \\ y_{r2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Modelo completo: este corresponde ao modelo mais completo do presente estudo, posto que o veículo é modelado com 17 (dezessete) graus de liberdade (y_v , θ_v , β_v , y_{s1} , θ_{s1} , β_{s1} , y_{s2} , θ_{s2} , β_{s2} , y_{r1} , ..., y_{r7} e y_{r8}). Neste caso, a massa da caixa (m_v) do veículo é tratada separadamente da dos dois truques (m_{s1} e m_{s2}) e são consideradas 8 (oito) rodas de massa m_r acopladas à estrutura. As massas suspensas (caixa e truques) possuem inércia rotacional em relação aos eixos transversal (I_v , I_{s1} e I_{s2}) e longitudinal (J_v , J_{s1} e J_{s2}) do veículo. As rigidezes são representadas por k_1 , ..., k_7 e k_8 , e os amortecimentos por c_1 , ..., c_7 e c_8 .



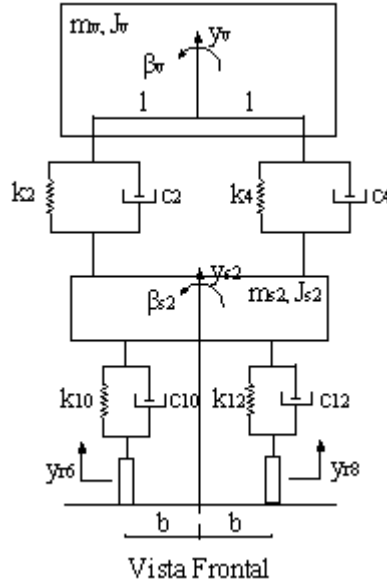


Figura 2-3: Modelo de veículo completo.

Pode-se mostrar de forma similar ao modelo de massas que, neste caso, os termos da Equação (2.7) correspondem a:

$$M_{vv} = \begin{pmatrix} m_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{s1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{s1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{s1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{s2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{s2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{s2} \end{pmatrix},$$

$$M_{rr} = \begin{pmatrix} m_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_r \end{pmatrix},$$

$$C_{vv} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & c_{41} & 0 & c_{61} & c_{71} & 0 & c_{91} \\ c_{21} & c_{22} & c_{32} & c_{42} & 0 & c_{62} & c_{72} & 0 & c_{92} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{43} & 0 & c_{63} & c_{73} & 0 & c_{93} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{54} & c_{64} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & c_{65} & 0 & 0 & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} & 0 & 0 & 0 \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & 0 & 0 & 0 & c_{77} & c_{78} & c_{79} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{78} & c_{88} & c_{89} \\ c_{91} & c_{92} & c_{93} & 0 & 0 & 0 & c_{79} & c_{89} & c_{99} \end{pmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_1 + c_2 + c_3 + c_4, \quad c_{22} = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4).L^2, \quad c_{33} = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4).l^2, \\ c_{44} &= c_1 + c_3 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8, \quad c_{55} = (c_5 + c_6 + c_7 + c_8).d^2, \\ c_{66} &= (c_1 + c_3).l^2 + (c_5 + c_6 + c_7 + c_8).b^2, \quad c_{77} = c_2 + c_4 + c_9 + c_{10} + c_{11} + c_{12}, \\ c_{88} &= (c_9 + c_{10} + c_{11} + c_{12}).d^2, \quad c_{99} = (c_2 + c_4).l^2 + (c_9 + c_{10} + c_{11} + c_{12}).b^2, \\ c_{21} &= (-c_1 + c_2 - c_3 + c_4).L, \quad c_{31} = (-c_1 - c_2 + c_3 + c_4).l, \quad c_{41} = -(c_1 + c_3), \\ c_{61} &= (c_1 - c_3).l, \quad c_{71} = -(c_2 + c_4), \quad c_{91} = (c_2 - c_4).l, \quad c_{32} = (c_1 - c_2 - c_3 + c_4).L.l, \\ c_{42} &= (c_1 + c_3).L, \quad c_{62} = (-c_1 + c_3).L.l, \quad c_{72} = -(c_2 + c_4).L, \quad c_{92} = (c_2 - c_4).L.l, \\ c_{43} &= (c_1 - c_3).l, \quad c_{63} = -(c_1 + c_3).l^2, \quad c_{73} = (c_2 - c_4).l, \quad c_{93} = -(c_2 + c_4).l^2, \\ c_{54} &= (-c_5 + c_6 - c_7 + c_8).d, \quad c_{64} = (-c_1 + c_3).l + (-c_5 - c_6 + c_7 + c_8).b, \\ c_{65} &= (c_5 - c_6 - c_7 + c_8).d.b, \quad c_{87} = (-c_9 + c_{10} - c_{11} + c_{12}).d, \\ c_{97} &= (-c_2 + c_4).l + (-c_9 - c_{10} + c_{11} + c_{12}).b, \quad c_{98} = (c_9 - c_{10} - c_{11} + c_{12}).d.b. \end{aligned}$$

$$C_{vr} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_5 & -c_6 & -c_7 & -c_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_5.d & -c_6.d & c_7.d & -c_8.d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_5.b & c_6.b & -c_7.b & -c_8.b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_9 & -c_{10} & -c_{11} & -c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_9.d & -c_{10}.d & c_{11}.d & -c_{12}.d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_9.b & c_{10}.b & -c_{11}.b & -c_{12}.b \end{pmatrix}, \quad C_{rv} = C_{vr}^T,$$

$$C_{rr} = \begin{pmatrix} c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{12} \end{pmatrix},$$

$$K_{vv} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} & k_{41} & 0 & k_{61} & k_{71} & 0 & k_{91} \\ k_{21} & k_{22} & k_{32} & k_{42} & 0 & k_{62} & k_{72} & 0 & k_{92} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{43} & 0 & k_{63} & k_{73} & 0 & k_{93} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{54} & k_{64} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{54} & k_{55} & k_{65} & 0 & 0 & 0 \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & 0 & 0 & 0 \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & 0 & 0 & 0 & k_{77} & k_{78} & k_{79} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{78} & k_{88} & k_{89} \\ k_{91} & k_{92} & k_{93} & 0 & 0 & 0 & k_{79} & k_{89} & k_{99} \end{pmatrix},$$

onde:

$$\begin{aligned} k_{11} &= k_1 + k_2 + k_3 + k_4, \quad k_{22} = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4).L^2, \quad k_{33} = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4).l^2, \\ k_{44} &= k_1 + k_3 + k_5 + k_6 + k_7 + k_8, \quad k_{55} = (k_5 + k_6 + k_7 + k_8).d^2, \\ k_{66} &= (k_1 + k_3).l^2 + (k_5 + k_6 + k_7 + k_8).b^2, \quad k_{77} = k_2 + k_4 + k_9 + k_{10} + k_{11} + k_{12} \\ k_{88} &= (k_9 + k_{10} + k_{11} + k_{12}).d^2, \quad k_{99} = (k_2 + k_4).l^2 + (k_9 + k_{10} + k_{11} + k_{12}).b^2, \\ k_{21} &= (-k_1 + k_2 - k_3 + k_4).L, \quad k_{31} = (-k_1 - k_2 + k_3 + k_4).l, \quad k_{41} = -(k_1 + k_3), \\ k_{61} &= (k_1 - k_3).l, \quad k_{71} = -(k_2 + k_4), \quad k_{91} = (k_2 - k_4).l, \quad k_{32} = (k_1 - k_2 - k_3 + k_4).L.l, \\ k_{42} &= (k_1 + k_3).L, \quad k_{62} = (-k_1 + k_3).L.l, \quad k_{72} = -(k_2 + k_4).L, \quad k_{92} = (k_2 - k_4).L.l, \\ k_{43} &= (k_1 - k_3).l, \quad k_{63} = -(k_1 + k_3).l^2, \quad k_{73} = (k_2 - k_4).l, \quad k_{93} = -(k_2 + k_4).l^2, \\ k_{54} &= (-k_5 + k_6 - k_7 + k_8).d, \quad k_{64} = (-k_1 + k_3).l + (-k_5 - k_6 + k_7 + k_8).b, \\ k_{65} &= (k_5 - k_6 - k_7 + k_8).d.b, \quad k_{87} = (-k_9 + k_{10} - k_{11} + k_{12}).d, \\ k_{97} &= (-k_2 + k_4).l + (-k_9 - k_{10} + k_{11} + k_{12}).b, \quad k_{98} = (k_9 - k_{10} - k_{11} + k_{12}).d.b. \end{aligned}$$

$$K_{vr} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_5 & -k_6 & -k_7 & -k_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_5.d & -k_6.d & k_7.d & -k_8.d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_5.b & k_6.b & -k_7.b & -k_8.b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_9 & -k_{10} & -k_{11} & -k_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_9.d & -k_{10}.d & k_{11}.d & -k_{12}.d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_9.b & k_{10}.b & -k_{11}.b & -k_{12}.b \end{pmatrix}, K_{rv} = K_{vr}^T,$$

$$K_{rr} = \begin{pmatrix} k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{12} \end{pmatrix},$$

$$u_v = \begin{pmatrix} y_v \\ \theta_v \\ \beta_v \\ y_{s1} \\ \theta_{s1} \\ \beta_{s1} \\ y_{s2} \\ \theta_{s2} \\ \beta_{s2} \end{pmatrix}, u_r = \begin{pmatrix} y_{r1} \\ y_{r2} \\ y_{r3} \\ y_{r4} \\ y_{r5} \\ y_{r6} \\ y_{r7} \\ y_{r8} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

Modelo sem interação: este modelo considera que cada eixo de veículo é representado por uma força concentrada. Então, não há interação e, assim, as submatrizes e vetores na Equação (2.7) são todos nulos:

$$M_{vv} = (0), M_{rr} = (0), \\ C_{vv} = C_{rv} = C_{vr} = C_{rr} = (0),$$

$$\begin{aligned} K_{vv} = K_{rv} = K_{vr} = K_{rr} &= (0), \\ u_v &= (0), \quad u_r = (0) \end{aligned} \quad (2.14)$$

3. Solução numérica

A equação geral dos veículos com interação Equação (2.17) pode ser reescrita de modo mais compacto como:

$$M_v \cdot \begin{pmatrix} \ddot{u}_v \\ \ddot{u}_r \end{pmatrix} + C_v \cdot \begin{pmatrix} \dot{u}_v \\ \dot{u}_r \end{pmatrix} + K_v \cdot \begin{pmatrix} u_v \\ u_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{gv} \\ F_{gr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

A montagem da equação diferencial do sistema veículo-estrutura é obtida, no presente estudo, a partir de um elemento de viga de Euler-Bernoulli com um eixo de veículo acoplado a esse elemento (Gabaldón, 2005), tal como é mostrado na Figura 3-1 para um veículo com interação simplificada.

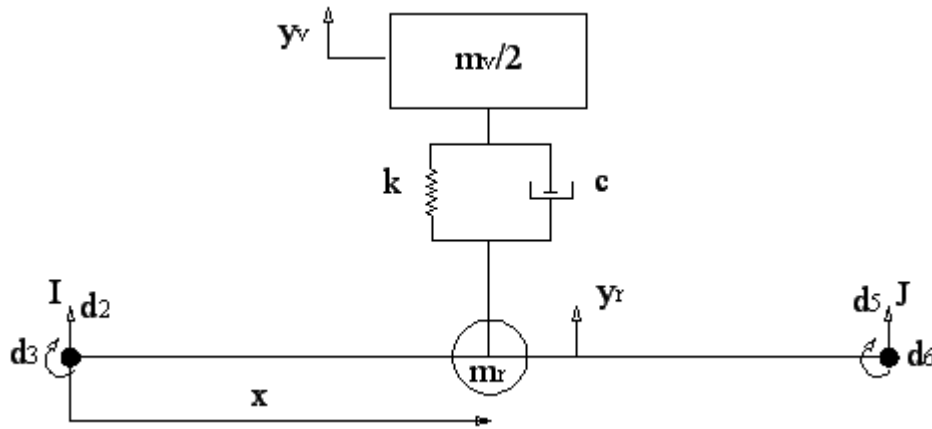


Figura 3-1: Elemento de Euler-Bernoulli com interação.

Nas discussões seguintes, a fim de facilitar o entendimento, fica limitada a presença de apenas uma roda em cada elemento de viga e se está considerando apenas um lado da ponte, ou seja, uma longarina. O deslocamento da roda/ponte no interior do elemento (y_r) é interpolado pelos deslocamentos nodais d_2 , d_3 , d_5 e d_6 deste elemento, utilizando-se funções Hermitianas cúbicas (N_{22} , N_{23} , N_{25} e N_{26}):

$$y_r = \begin{pmatrix} N_{22} & N_{23} & N_{25} & N_{26} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_5 \\ d_6 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

com

$$N_{22} = \frac{2.x^3}{L^3} - \frac{3.x^2}{L^2} + 1, N_{23} = x - \frac{2.x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}, N_{25} = \frac{3.x^2}{L^2} - \frac{2.x^3}{L^3}, N_{26} = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \quad (3.3)$$

Para se realizar a interação para todo o sistema se utiliza uma matriz de matrizes de transformação T , de forma que:

$$\begin{pmatrix} u_v \\ u_r \end{pmatrix} = T.D \quad (3.4)$$

Com

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

onde:

D é a matriz coluna de deslocamentos do sistema trem-estrutura (considerando os graus de liberdade da ponte e das massas suspensas);

T_1 é a matriz identidade com tantas linhas quanto o número de graus de liberdade das massas suspensas e com tantas colunas quanto o número de graus de liberdade da estrutura mais o número de graus de liberdade das massas suspensas; e

T_2 é uma matriz que possui tantas linhas quanto o número de rodas do veículo e com tantas colunas quanto o número de graus de liberdade da estrutura mais o número de graus de liberdade das massas suspensas.

Para o caso da Figura 3-1, tem-se uma matriz de transformação T assim definida:

$$T = \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & N_{i22} & N_{i23} & N_{i25} & N_{i26} & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Os elementos da primeira linha estão associados ao grau de liberdade da massa suspensa, e os elementos da segunda linha estão associados à roda do veículo que está sobre o elemento de viga i .

O procedimento deve ser realizado para a outra longarina e para os outros modelos de veículo procede-se de modo análogo.

Com o intuito de realizar a interação do veículo com a estrutura, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez dos veículos e o vetor de forças que atua sobre a ponte deverão ser transformados para que estas possam ser somadas às respectivas matrizes do elemento de viga de Euler-Bernoulli, da seguinte maneira (Gabaldón, 2005):

$$M_{Interação} = M + T^T.M_v.T, C_{Interação} = C + T^T.C_v.T, K_{Interação} = K + T^T.K_v.T, F(t) = T^T.P(t)$$

onde:

M é a matriz de massa expandida da estrutura;

C é a matriz de amortecimento expandida da estrutura;

K é a matriz de rigidez expandida da estrutura;

$F(t)$ é a matriz coluna de forças de interação transformadas;

$M_{Interação}$ é a matriz de massa do sistema trem-ponte;

$C_{Interação}$ é a matriz de amortecimento do sistema trem-ponte; e

$K_{Interação}$ é a matriz de rigidez do sistema trem-ponte.

As matrizes M , C e K antes de serem somadas na Equação (3.7) devem ser expandidas, adicionando-se linhas e colunas nulas referentes aos graus de liberdade das massas suspensas dos veículos, de modo que estas matrizes possuam ordem igual ao do vetor D considerado na Equação (3.4) (Montoya, 2009).

Utilizando-se a matriz de interpolação T_2 pode-se aproximar os deslocamentos das rodas e as forças que atuam sobre a estrutura (Montoya, 2009):

$$u_r(t) = T_2(x).D(t), \dot{u}_r(t) = T_2(x).\dot{D}(t), \ddot{u}_r(t) = T_2(x).\ddot{D}(t), P(t) = -T_2^T(x).F(t) \quad (3.8)$$

onde:

$D(t)$ são os deslocamentos da estrutura e das massas suspensas para cada instante de tempo; e

$F(t)$ são as forças de interação entre veículo e ponte que serão calculadas abaixo.

Pode-se escrever o equilíbrio da ponte mediante a seguinte equação:

$$M.\ddot{D}(t) + C.\dot{D}(t) + K.D(t) = -T_2(x).F(t) \quad (3.9)$$

Desenvolvendo-se o sistema de Equações (3.1) e substituindo neste as Equações (3.8), obtém-se as expressões para o vetor da força de interação $F(t)$ e para o vetor do peso das massas suspensas do veículo F_{gv} :

$$\begin{aligned} F(t) &= -F_{gr} + M_{rr}.T_2(x).\ddot{D}(t) + C_{rv}.\dot{u}_v(t) + C_{rr}.T_2(x).\dot{D}(t) + K_{rv}.u_v(t) + K_{rr}.T_2(x).D(t), \\ F_{gv} &= M_{vv}.\ddot{u}_v(t) + C_{vv}.\dot{u}_v(t) + C_{vr}.T_2(x).\dot{D}(t) + K_{vv}.u_v(t) + K_{vr}.T_2(x).D(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Substituindo-se as Equações (3.10) na equação de equilíbrio proposta em Equação (3.9), reordenando as resultantes e organizando-as em notação matricial, tem-se:

$$\begin{pmatrix} M + T_2(x)^T \cdot M_{rr} \cdot T_2(x) + & 0 \\ 0 & M_{vv} \end{pmatrix} \cdot \ddot{D} + \begin{pmatrix} C + T_2(x)^T \cdot C_{rr} \cdot T_2(x) + & T_2(x)^T \cdot C_{rv} \\ T_2(x)^T \cdot C_{vr} & C_{vv} \end{pmatrix} \cdot \dot{D} + \begin{pmatrix} K + T_2(x)^T \cdot K_{rr} \cdot T_2(x) + & T_2(x)^T \cdot K_{rv} \\ T_2(x)^T \cdot K_{vr} & K_{vv} \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} T_2(x)^T \cdot F_{gr} \\ F_{gv} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

O método utilizado para a resolução desta equação diferencial foi o de integração direta de Newmark, com um passo de tempo de 0,01 s.

Ademais, o problema da identificação das frequências naturais de vibração de um determinado sistema é resolvido com base na análise do movimento de vibrações livres (com excitação nula) e sem amortecimento. Neste sentido, a equação de equilíbrio dinâmico da estrutura toma o seguinte formato (Chopra, 1995):

$$M \cdot \ddot{D} + K \cdot D = 0 \quad (3.12)$$

Resolver o problema de autovalor associado à matriz $A = K^{-1} \cdot M$ significa encontrar as frequências naturais de vibração desta estrutura. O cálculo destes autovalores foi realizado através de uma rotina contida no próprio *software* MatLab, descrita por *eig()*.

4. Resultados

A estrutura considerada como exemplo consiste de duas longarinas conectadas nas extremidades por dois elementos de barra transversais. Cada longarina mede 15 m e é considerada como composta de 10 (dez) elementos finitos de barra espacial. As barras transversais medem 1 m de comprimento. A taxa de amortecimento da estrutura corresponde a $\zeta = 2\%$.

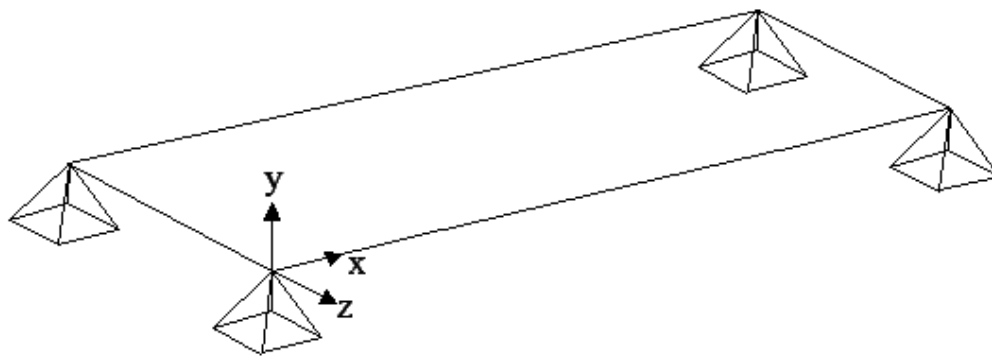


Figura 4-1: Modelo da ponte 3D.

Os parâmetros mecânicos restantes de cada longarina são a massa por unidade de comprimento $\rho = 7,5 \text{ t/m}$, a constante de deformação longitudinal $E = 1,5388 \times 10^6$

kN/m², o coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$, a inércia em torno do eixo z $I_z = 2,5 \text{ m}^4$, a inércia em torno do eixo y $I_y = 2,5 \text{ m}^4$, a inércia em torno do eixo x $J = 9,9979 \text{ m}^4$. Os outros parâmetros mecânicos das duas barras transversais valem: $\rho = 10^{-6} \text{ t/m}$; $I_y = I_z = 10^{-6} \text{ m}^4$; e $J = 3,9992 \times 10^{-6} \text{ m}^4$.

A composição ferroviária considerada neste estudo consiste de 10 (dez) veículos cujo primeiro ou único eixo (dependendo do modelo) de cada um destes veículos estão espaçados de 16 m. A velocidade da composição $v = 150 \text{ km/h}$ e é constante. Os outros dados dos veículos constam das Tabelas 4-1 e 4-2 abaixo (expressos em unidades do SI):

Tabela 4-1: Propriedades mecânicas da composição veicular.

Modelo	P	Mv	Kp	Cp	Ks	Cs	Mr	Mt	Jvx	Jvz	Jtx	Jtz
Massa	-170.184	-	-	-	-	-	8.674	-	-	-	-	-
Simplif.	-170.184	12.144	900.000	300.000	-	-	2.602	-	64.000	-	-	-
Completo	-170.184	8.000	150.000	50.000	150.000	50.000	650	2.072	40.000	67.000	12.000	16.750
Concent.	-170.184	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 4-2: Propriedades geométricas da composição veicular.

Modelo	L	d	l	B
Massa	-	-	-	-
Simplificado	-	-	-	0,5
Completo	9,0	2,0	1,5	0,5
Concentrado	-	-	-	-

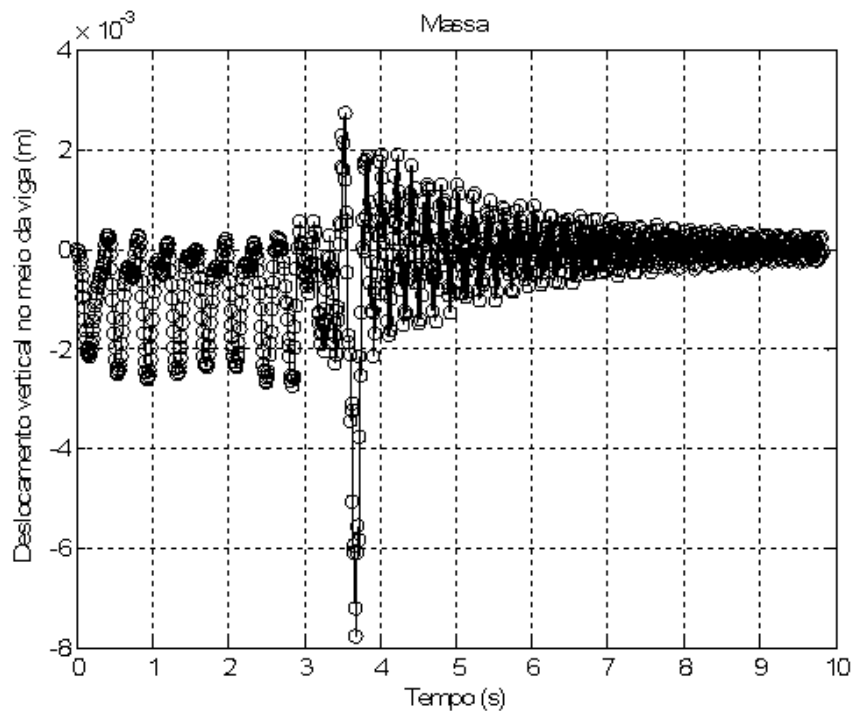


Figura 4-2: Deflexão no meio da ponte para o modelo de massas em função do tempo.

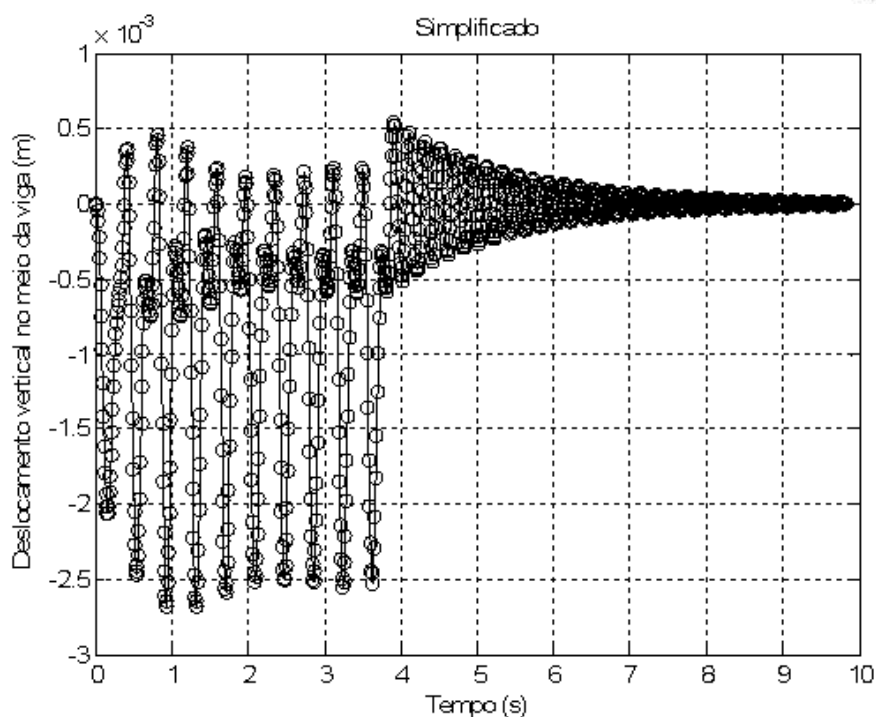


Figura 4-3: Deflexão no meio da ponte para o modelo simplificado em função do tempo.

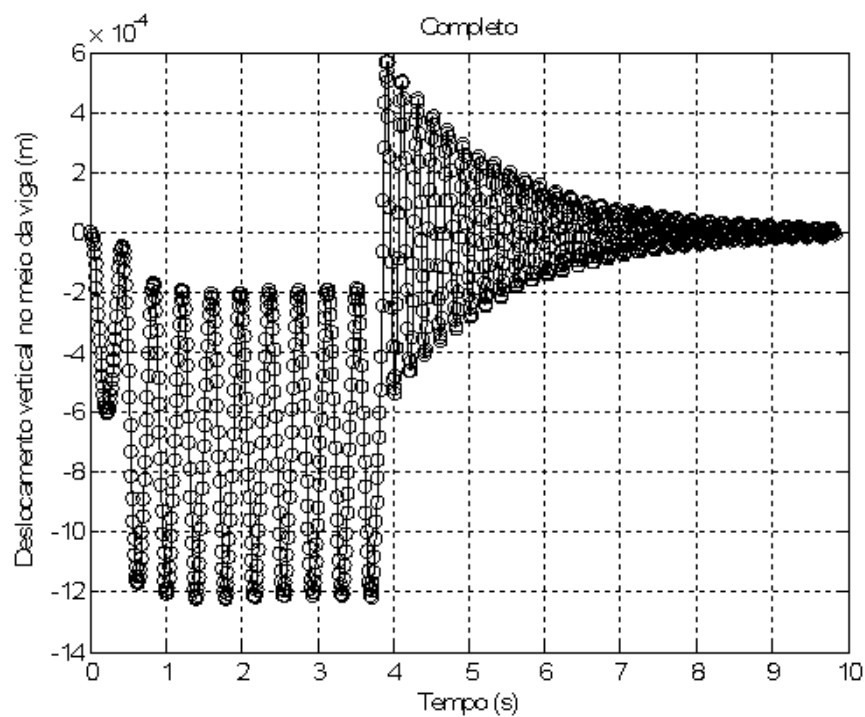


Figura 4-4: Deflexão no meio da ponte para o modelo completo em função do tempo.

A curva contínua representa uma longarina e a pontilhada representa a outra. Devido às simetrias impostas ao veículo e à estrutura, as curvas são sempre coincidentes. Além de mostrar os valores da máxima deflexão no meio da ponte para cada um dos três modelos com interação, a Tabela 4-3 abaixo apresenta esses valores para outros dois pontos da ponte distantes 3,0 m e 10,5 m do apoio esquerdo.

Tabela 4-3: Respostas verticais no meio da ponte.

Modelo	MDV3MAE (m)	MDV MP (m)	MDV10,5AE (m)
Massa	$4,846352 \times 10^{-3}$	$7,785550 \times 10^{-3}$	$5,872185 \times 10^{-3}$
Simplificado	$1,591442 \times 10^{-3}$	$2,680534 \times 10^{-3}$	$2,105259 \times 10^{-3}$
Completo	$7,122691 \times 10^{-4}$	$1,221775 \times 10^{-3}$	$9,838339 \times 10^{-4}$

Legenda: -MDVMP: máximo deslocamento vertical no meio da ponte;
-MDV3MAE: máximo deslocamento vertical a 3 m do apoio esquerdo;
-MDV10,5AE: máximo deslocamento vertical a 10,5 m do apoio esquerdo.

De acordo com os gráficos acima e a Tabela 4-3, os modelos com interação apresentam amplitude decrescente quando se considera os modelos de massa, simplificado e completo, nessa ordem. Como seria de se esperar, quanto mais ao centro da ponte, maior é o valor da deflexão.

A redução média percentual da máxima amplitude nos três pontos considerados quando se passa do modelo de massa para o modelo simplificado é de 66%. Quando se passa do modelo simplificado para o completo, tem-se uma redução média percentual de 54%.

O modelo completo é o que melhor representa o veículo ferroviário, por permitir a modelagem da caixa e dos truques separadamente, com inércia rotacional em torno dos eixos x e z , e em razão da discriminação maior das rigidezes e dos amortecimentos.

Para o modelo de massa, observa-se que o maior deslocamento acontece no momento da saída do último veículo, o que pode ser interpretado como um impacto sobre a estrutura. Para maiores velocidades, esse comportamento se expande para os modelos simplificado e completo.

O modelo sem interação (forças concentradas) é utilizado para se avaliar o fenômeno de ressonância nesta estrutura para esta composição. Para isso, construiu-se um gráfico com a velocidade no eixo das abscissas e o máximo deslocamento vertical no meio da ponte no eixo das ordenadas:

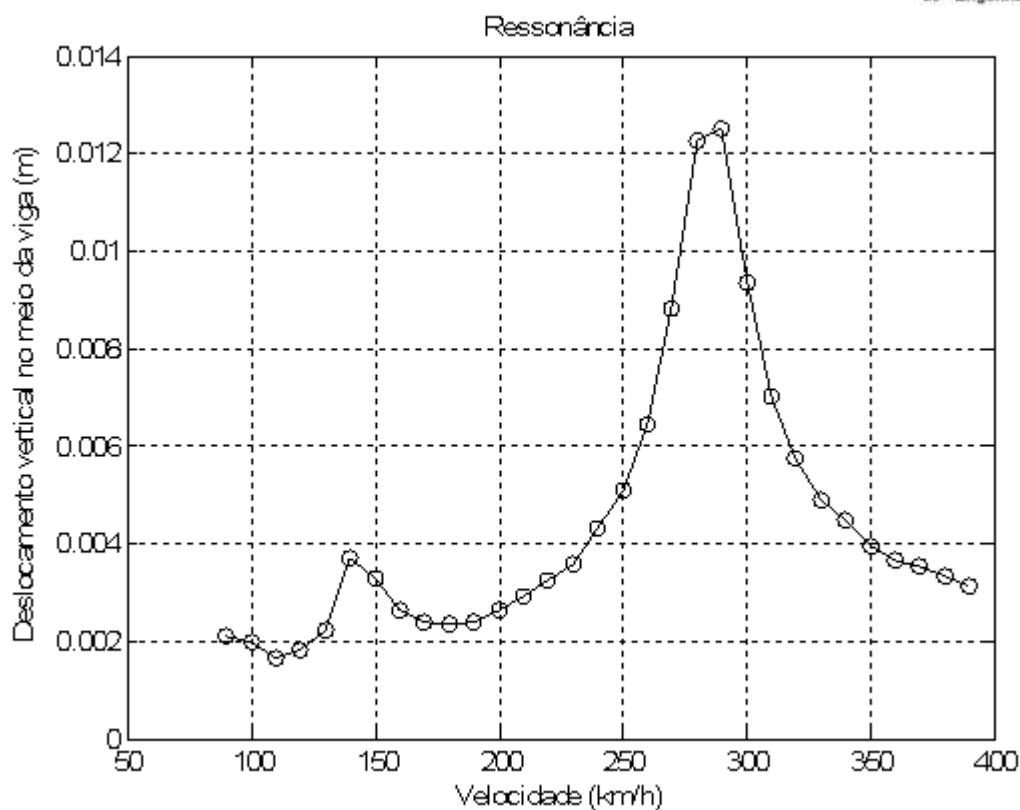


Figura 4-5: Máximo deslocamento vertical no meio da ponte em função da velocidade.

Pode-se observar acima que para as velocidades presentes no intervalo 260 a 310 km/h, a resposta aumenta de 3 a 6 vezes em relação à resposta na velocidade de 100 km/h. O máximo aumento de amplitude ocorre na velocidade de 290 km/h.

O máximo deslocamento vertical no meio da ponte para esta velocidade corresponde a 8,0 vezes o valor da resposta estática.

Essas evidências sugerem a ocorrência de ressonância nas velocidades próximas a 290 km/h. Pode-se mostrar que o carregamento nessa velocidade e espaçado de 16 m possui uma frequência de passagem próxima da frequência fundamental de vibração da estrutura.

5. Conclusões

O modelo completo é o que melhor representa o veículo ferroviário, por permitir a modelagem da caixa e dos truques separadamente, com inércia rotacional transversal e longitudinal, e em razão da discriminação maior das rigidezes e dos amortecimentos.

Nesse sentido, esse modelo é o que apresenta os resultados menos conservadores, levando à conclusão de que numa verificação de uma ponte real seria encontrada possivelmente uma maior margem de segurança que a do projeto original.

Observa-se que o maior deslocamento vertical no meio da ponte, para o modelo de veículo de massas, acontece no momento da saída do último veículo, o que pode ser

interpretado como um impacto sobre a estrutura. Para velocidades maiores, esse comportamento se expande aos modelos simplificado e completo.

O fenômeno da ressonância deve ser estudado no projeto de pontes ferroviárias, posto que é uma variante em pontes sujeitas à cargas de alta velocidade.

Referências

Chopra, A.K.; (1995) *Dynamics of Structures – Theory and Applications to Earthquake Engineering*. **Livro editorial Prentice Hall**.

Gabaldón, F.R.; (2005) *Análisis dinámico de estructuras sometidas a acciones de trenes de alta velocidad, considerando la interacción vehículo-estructura*. **Informe técnico-Universidad Politécnica de Madrid. España**.

Gere, J.; (2006) *Mecânica de Materiais*. **Livro editorial Thomson**.

Montoya, R.C.; (2009) *Desenvolvimento de programa computacional para a análise de pontes ferroviárias considerando interação veículo estrutura*. **Dissertação de Mestrado Universidade Federal do Pará. Brasil**.

Romero, P.M.; (2002) *Interacción vehículo-estructura y efectos de resonancia em puentes isostáticos de ferrocarril para líneas de alta velocidad*. **Tesis Doctoral Universidad Politécnica de Madrid. España**.

Agradecimento

Os autores agradecem ao Mestre em Engenharia Civil Rodolfo Montoya pelo material cedido e as discussões sobre o tema.

Three dimensional analysis of railway bridges considering interaction between vehicle and structure

Abstract

This study presents a numerical methodology for structural dynamic analysis of three dimensional bridges, considering the interaction between bridge and vehicle.

It was considered four models of vehicle: a model composed of concentrated forces (only model without interaction); a model consisting of only two masses connected to the bridge; a simplified model composed of a suspended mass (box and bogies), two non-suspended masses (wheels) and the whole suspension described by only one stiffness and damping; and a complete model consisting of three suspended masses (box and two bogies), eight non-suspended masses (wheels) and the individualization of the primary and secondary suspension.

The complete model is the one which best represents the train, because it allows the modeling of the box and bogies separately, with transversal and longitudinal moments of inertia, and due to a better discreteness of stiffness and damping.

In the analysis of the model without interaction we can realize that there exists an interval of velocity in which the resonance phenomenon occurs. It was verified that this phenomenon happens due to the fact that frequency of loading coincides with that of the fundamental vibration mode of the structure.

Keywords: Railway bridge; Dynamic analysis; Interaction vehicle-structure; Resonance.

Conclusions

The complete model is the one which best represents the train, because it allows the modeling of the box and bogies separately, with transversal and longitudinal moments of inertia, and due to a better discreteness of stiffness and damping. In this sense, the complete model is the one which presents the lesser conservative results, taking to the conclusion that in a verification of a real bridge it would be found a greater margin of safety than in the original project. The greater vertical displacement in the middle of the bridge happens when the last vehicle leaves the bridge, for the vehicle model of masses. This may be interpreted as an impact on the structure. For greater velocities, this behavior expands to the simplified and complete models of vehicle. The phenomenon of resonance must be studied in the project of railway bridges, since it is a possibility in bridges subjected to high speed loadings.

References

- Chopra, A.K.; (1995) *Dynamics of Structures – Theory and Applications to Earthquake Engineering*. **Livro editorial Prentice Hall**.
- Gabaldón, F.R.; (2005) *Análisis dinámico de estructuras sometidas a acciones de trenes de alta velocidad, considerando la interacción vehículo-estructura*. **Informe técnico-Universidad Politécnica de Madrid. España**.
- Gere, J.; (2006) *Mecânica de Materiais*. **Livro editorial Thomson**.
- Montoya, R.C.; (2009) *Desenvolvimento de programa computacional para a análise de pontes ferroviárias considerando interação veículo estrutura*. **Dissertação de Mestrado Universidade Federal do Pará. Brasil**.
- Romero, P.M.; (2002) *Interacción vehículo-estructura y efectos de resonancia em puentes isostáticos de ferrocarril para líneas de alta velocidad*. **Tesis Doctoral Universidad Politécnica de Madrid. España**.