# Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural



Recebido: 09/04/2019 Aprovado: 13/10/2020

# ESTUDO DA CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM CONSIDERANDO A SEMIRRIGIDEZ DAS LIGAÇÕES

Thiago Cunha da Silva(1), Emil de Souza Sánchez filho(2)

#### **RESUMO**

Apresenta-se neste artigo o efeito da carga crítica de flambagem em pilares de aço considerando a semirrigidez nas ligações. É desenvolvido a matriz de rigidez de um elemento de pórtico considerando a semirrigidez dos nós, tendo a carga crítica de flambagem obtida por meio da matriz de rigidez geométrica da estrutura utilizando a matriz de rigidez média em vez do processo interativo para o cálculo da matriz semirrígida. É realizada uma comparação numérica da carga crítica de flambagem para diversas situações de flexibilidade da ligação. Resultados demonstram que a matriz de rigidez semirrígida utilizada neste estudo, assim como a matriz de rigidez média, é eficiente somente até determinada condição de flexibilidade, gerando resultados não satisfatórios para ligações próximas de flexíveis.

Palavras-chaves: Flambagem, semirrigidez, elementos finitos, matriz de rigidez semirrígida.

- (1) Mestre em Engenharia Civil pela Universidade Federal Fluminense, e-mail: thiagocunha0307@gmail.com
- (2) Doutor em Engenharia Civil/ Professor titular da Universidade Federal Fluminense

# 1 INTRODUÇÃO

As ligações nas estruturas metálicas, assim como em todo elemento estrutural, possuem certas peculiaridades referentes ao seu tipo de vinculação, um dos principais problemas encontrados é em admitir qual o tipo de vinculação ocorre em serviço. Usualmente calculam-se as condições de apoio como sendo perfeitamente rígida ou flexível, entretanto, toda ligação possui um certo grau de flexibilidade e rigidez.

Para uma resposta mais exata da estrutura deve-se considerar a rotação adicional que ocorre no engaste, assim como a restrição adicional que ocorre na rótula. A consideração da semirrigidez das ligações leva uma resposta da estrutura mais precisa, aproximando-se do que ocorre em situação de serviço, contudo, a utilização de ligação semirrígida ainda é pouco utilizada no meio técnico. Destaca-se o trabalho de Del Savio (2004) que apresentou uma abordagem mais precisa da semirrigidez em um elemento finito hibrido, considerando os deslocamentos adicionais em todos os graus de liberdade do nó de pórtico.

Existem três tipos de ligações em estruturas metálicas, a AISC (2010) as classifica em função da rotação teórica que ocorre em seu apoio, sendo elas

- Ligação rígida: Onde ocorre restrição de no mínimo 90% da rotação teórica sob condição de rótula ideal, garantindo-se a transferência de momento ao apoio.
- Ligação flexível: restrição de no máximo 20% da rotação teórica verificada sob condição de rótula ideal, não há transferência significativa de momento.
- Ligação semirrígida: ligações de comportamento situado entre os limites estabelecidos pelas ligações rígidas e flexíveis

# 2 MATRIZ DE RIGIDEZ CONSIDERANDO A SEMIRRIGIDEZ DOS NÓS

A formulação da matriz de rigidez de um elemento finito de pórtico considerando a semirrigidez dos nós é baseada em estudos de Araújo (2014), alterando as considerações de semirrigidez dos nós de tal forma a considerar rotações adicionais relativas.

A Figura 1 mostra um elemento finito de pórtico com três graus de liberdade por nó. As rotações adicionais, que caracterizam a semirrigidez da estrutura, são representadas pela diferença  $U_3-\theta$  e  $U_6-\beta$ , onde  $\theta$  e  $\beta$  caracterizam a

flexibilidade dos nós. Nota-se que os termos por  $\theta$  e  $\beta$  serem independentes permitem haver diferenças entre a flexibilidade de cada nó, o que diferencia da formulação proposta em Araújo (2014).

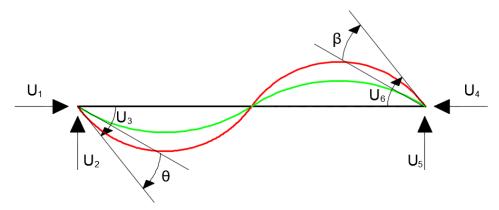


Figura 1 – Elemento finito de pórtico considerando as rotações adicionais.

Pode-se admitir que as rotações adicionais são proporcionais às rotações totais, obtendo-se

$$\theta = \alpha_1. U_3 \tag{1}$$

$$\beta = \alpha_2. U_6 \tag{2}$$

Onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  variam de 0 a 1

Quando  $\alpha=0$  não há rotação na extremidade do nó em que está vinculado, ou seja, tem-se a situação de ligação rígida. Quando  $\alpha=1$  há rotação máxima na extremidade do nó, ou seja, tem-se a situação de ligação rotulada. Os valores intermediários caracterizam a semirrigidez do elemento.

Pode-se simplificar utilizando-se a seguinte notação

$$\varphi = 1 - \alpha_1 \tag{3}$$

$$\omega = 1 - \alpha_2 \tag{4}$$

Para se obter a matriz de rigidez do elemento de pórtico, considerando a semirrigidez do nó, utiliza-se o princípio dos deslocamentos virtuais. Para o cálculo da matriz de rigidez são necessárias as funções de forma do elemento.

As funções de forma do elemento são apresentadas em Martha (2014) e Przemieniecki (2012), alterando-se a expressão 7 e 10 a fim de considerar a semirrigidez do nó, onde o subíndice é relativo ao grau de liberdade da Figura 1

$$N_1 = \frac{L - x}{L} \tag{5}$$

$$N_2 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \tag{6}$$

$$N_3 = \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\varphi\tag{7}$$

$$N_4 = \frac{x}{L} \tag{8}$$

$$N_5 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \tag{9}$$

$$N_6 = \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\omega\tag{10}$$

As relações entre o campo de deslocamentos e os deslocamentos nodais são dadas por

$$u = N_1 d_1 + N_4 d_4 \tag{11}$$

$$v = N_2 d_2 + N_3 d_3 + N_5 d_5 + N_6 d_6 \tag{12}$$

A relação entre o campo de deformações e os deslocamentos nodais é dada por

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = N_1' d_1 + N_4' d_4 \tag{13}$$

$$\varphi(x) = \frac{d^2v}{dx^2} = N_2''d_2 + N_3''d_3 + N_5''d_5 + N_6''d_6$$
 (14)

Utilizando a forma matricial tem-se

$$\varepsilon = B. d \tag{15}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\varphi\left(\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) & 0 & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\omega\left(\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) \end{pmatrix}$$
(16)

A matriz de rigidez do elemento de pórtico no sistema local é dada por

$$K = \int_0^L B^T C B \, dx \tag{17}$$

onde C é a matriz de coeficientes da estrutura dada por

$$C = \begin{pmatrix} EA & 0\\ 0 & EI \end{pmatrix} \tag{18}$$

Onde *EA* é a rigidez axial e *EI* é a rigidez à flexão da estrutura. Utilizando o software Mathcad, tendo como base as rotinas desenvolvidas em Soriano (2005), utilizando a equação 17 obtém-se a expressão analítica da matriz de rigidez de um elemento de pórtico de nós semirrígidos

$$K := \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6 \cdot \phi \cdot EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6 \cdot \omega \cdot EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot \phi \cdot EI}{L^2} & \frac{4 \cdot \phi^2 \cdot EI}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot \phi \cdot EI}{L^2} & \frac{2 \cdot \phi \cdot \omega \cdot EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6 \cdot \phi \cdot EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6 \cdot \omega \cdot EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot \omega \cdot EI}{L^2} & \frac{2 \cdot \phi \cdot \omega \cdot EI}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot \omega \cdot EI}{L^2} & \frac{4 \cdot \omega^2 \cdot EI}{L} \end{pmatrix}$$

$$(19)$$

A matriz de rigidez apresentada na expressão 19 difere da obtida por Araújo (2014) pelo fato de haver em sua composição rotações adicionais relativas

O sistema de equações de equilíbrio do elemento de pórtico com rotações adicionais é dado por

$$F + \Delta F = K_{\rho} U \tag{20}$$

Onde F é o vetor de cargas,  $\Delta F$  vetor de forças equivalentes e U é o vetor de deslocamentos nodais. O termo  $\Delta F$  é necessário para garantir o equilíbrio do elemento com rotações adicionais.

Se  $\alpha_1=\alpha_2=0$  o vetor  $\Delta F$  é nulo, caso  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$  sejam diferentes de zero, é necessário um processo iterativo para resolver a equação 20.

Araújo (2014) considera uma maneira mais simples para considerar a semirrigidez do nó, sem a necessidade de cálculo iterativo, utilizando uma matriz de rigidez média interpolada entre a matriz de rigidez convencional e a matriz de rigidez da barra rotulada nas extremidades. Onde a matriz de rigidez é dada por

$$K_e = 0.5(K_a + K_b)$$
 (21)

sendo

$$K_a = nK_0 + \gamma K_1 \tag{22}$$

$$K_h = nK_0 + \gamma K_2 \tag{23}$$

$$n = (1 - \gamma) \tag{24}$$

 $\gamma$  é o coeficiente de interpolação, a matriz  $K_0$  é a matriz de rigidez convencional (expressão 25),  $K_1$  é a matriz de rigidez com uma rótula no primeiro nó (expressão 26) e  $K_2$  é a matriz de rigidez com uma rótula no segundo nó (expressão 27).

$$K_{0} := \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^{3}} & \frac{6\cdot EI}{L^{2}} & 0 & -\frac{12EI}{L^{3}} & \frac{6\cdot EI}{L^{2}} \\ 0 & \frac{6\cdot EI}{L^{2}} & \frac{4\cdot EI}{L} & 0 & -\frac{6\cdot EI}{L^{2}} & \frac{2\cdot EI}{L} \\ -\frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^{3}} & -\frac{6\cdot EI}{L^{2}} & 0 & \frac{12EI}{L^{3}} & -\frac{6\cdot EI}{L^{2}} \\ 0 & \frac{6\cdot EI}{L^{2}} & \frac{2\cdot EI}{L} & 0 & -\frac{6\cdot EI}{L^{2}} & \frac{4\cdot EI}{L} \\ \end{pmatrix}$$

$$(25)$$

$$K_{1} := \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI \cdot \eta}{L^{3}} & 0 & 0 & -\frac{3EI \cdot \eta}{L^{3}} & \frac{3 \cdot EI \cdot \eta}{L^{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI \cdot \eta}{L^{3}} & 0 & 0 & \frac{3EI \cdot \eta}{L^{3}} & -\frac{3 \cdot EI \cdot \eta}{L^{2}} \\ 0 & \frac{3 \cdot EI \cdot \eta}{L^{2}} & 0 & 0 & -\frac{3 \cdot EI \cdot \eta}{L^{2}} & \frac{3 \cdot EI \cdot \eta}{L} \end{pmatrix}$$

$$K_{2} := \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI \cdot \eta}{L^{3}} & \frac{3EI \cdot \eta}{L^{2}} & 0 & -\frac{3EI \cdot \eta}{L^{3}} & 0 \\ 0 & \frac{3EI \cdot \eta}{L^{2}} & \frac{3EI \cdot \eta}{L} & 0 & -\frac{3EI \cdot \eta}{L^{2}} & 0 \\ -\frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI \cdot \eta}{L^{3}} & -\frac{3EI \cdot \eta}{L^{2}} & 0 & \frac{3EI \cdot \eta}{L^{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(27)$$

O coeficiente  $\gamma$  retrata a semirrigidez da ligação, quando  $\gamma=1$  é considerado suas extremidades rotuladas, quando  $\gamma=0$  não há rotações adicionais

O elemento finito considerando os nós semirrígidos também é apresentado em trabalhos de Del Savio (2004) e Machado (2005), onde são consideradas outras propriedades referentes à estrutura.

#### 3 MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA

A deformação de um pilar de pórtico plano considerando o alongamento axial devido à flexão da barra é dada pela equação 28, deduzida em Vaz (2011). Salienta-se que a semirrigidez das ligações não altera sua expressão.

$$\varepsilon(x) = u' + \frac{1}{2} v'^2 - y v''$$
 (28)

O termo central da expressão significa a deformação produzida devido ao cisalhamento. Prosseguindo com os cálculos e utilizando o método de Castigliano a energia de deformação *U* do pórtico é dada por

$$U = \frac{1}{2} \int E \varepsilon(x)^2 dx \tag{29}$$

Substituindo a expressão 28 em 29, obtém-se, segundo Vaz (2011)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EAu'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L Nv'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EIv''^2 dx$$
 (30)

A matriz de rigidez geométrica é formada a partir do segundo termo de U, onde o termo v' é a derivada da equação 12.

Utilizando o Mathcad e considerando a semirigidez obtém-se

$$Kg := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5 \cdot L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5 \cdot L} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2 \cdot L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5 \cdot L} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5 \cdot L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2 \cdot L}{15} \end{pmatrix}$$

$$(31)$$

Onde  $K_g$  é a matriz de rigidez geométrica. Observa-se que mesmo utilizando as funções de forma que consideram a semirrigidez dos nós, não há alteração na matriz de rigidez geométrica de pórtico.

# 4 CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM

A carga crítica de flambagem teórica é obtida por meio da expressão 32, apresentada em Pfeil (2014), considerando a estrutura isenta de imperfeições geométricas, material de comportamento elástico linear, isento de tensões residuais e carga perfeitamente centrada

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 \text{EI}}{\text{L}_{\text{ef}}^2} \tag{32}$$

Onde  $L_{ef}$  corresponde ao comprimento efetivo de flambagem, que depende do tipo de vinculação na estrutura.

Verifica-se que a expressão 32 é válida somente para os casos em que a vinculação na estrutura é perfeita, não sendo possível utilizá-la com condições de contorno que considerem a semirrigidez do nó ou a variação de rigidez ao longo da estrutura.

Pode-se utilizar a equação 33 para determinar a carga crítica de flambagem em alternativa à expressão 32. A equação 33 traz consigo a vantagem de poder considerar a semirrigidez dos nós por meio da matriz de rigidez elástica  $K_e$  além de poder considerar a variação de inércia da seção, entretanto, para se obter maior precisão nos resultados mais elementos são necessários.

$$(K_e + \lambda K_g) \Delta d = 0 (33)$$

A equação 33 trata de um problema geral de autovalores, onde a solução fornece n autovalores, o menor autovalor calculado é o fator de carga crítica e o autovetor associado a esse autovalor é o modo de flambagem que representa a forma de flambagem da estrutura

Vaz (2011) ressalta que a carga crítica obtida pela expressão 33 é ligeiramente maior que a carga crítica obtida pela expressão 32, isso se deve pelo fato do método dos elementos finitos fornecer modelos mais rígidos que os obtidos de forma analítica, entretanto, quanto mais refinado for o elemento maior é a aproximação dos resultados.

## 5 EXEMPLO NUMÉRICO

Calcula-se a carga crítica de flambagem de um pilar de aço de perfil CS 250 × 52 considerando a inércia ao longo do eixo XX para diversas situações de semirrigidez. Admite-se que o módulo de elasticidade é constante e igual a  $E = 200 \ GPa$ .

Adotou-se engastamento em ambas as extremidades, conforme mostra a Figura 2, dividindo-se o modelo estrutural em 3 elementos finitos, a fim de se obter maior precisão nos resultados.

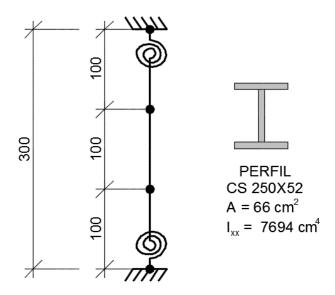


Figura 2 – Modelo estrutural e perfil da seção, medidas em cm.

Utilizou-se a expressão 32 para o cálculo da carga crítica de flambagem da estrutura, desconsiderando-se a semirigidez do nó, a equação 34 é referente ao pilar engastado em ambas as extremidades e a equação 35 ao pilar rotulado em ambas as extremidades.

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 \text{EI}}{\text{L}_{ef}^2} = \frac{\pi^2 \times 15,388 \times 10^6}{(0.5 \times 3)^2} = 68,39 \times 10^3 \text{ kN}$$
 (34)

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 \text{EI}}{\text{L}_{ef}^2} = \frac{\pi^2 \times 15,388 \times 10^6}{(3)^2} = 16,87 \times 10^3 \text{ kN}$$
 (35)

As expressões 34 e 35 podem ser vistas como os limites superior e inferior em que deve estar compreendido os valores obtidos para a consideração da semirrigidez dos nós.

Utilizando-se a matriz de rigidez média (equação 21) obtém-se os dados da Tabela 1. A Tabela 1 apresenta os resultados para a carga crítica de flambagem em cada situação variando-se a semirrigidez dos nós.

Admite-se que a semirigidez é igual em ambos os nós de cada elemento, não há rotações relativas entre eles, ou seja,  $\phi=\omega$  .

Tabela 1 – Carga crítica de flambagem.

Rotação teórica sob condição de rótula ideal	Carga crítica de flambagem (kN)
100%	68,98 x 10 <sup>3</sup>
90%	65,72 x 10 <sup>3</sup>
80%	61,59 x 10 <sup>3</sup>
70%	56,61 x 10 <sup>3</sup>
60%	50,81 x 10 <sup>3</sup>
50%	44,22 x 10 <sup>3</sup>
40%	36,86 x 10 <sup>3</sup>
30%	28,27 x 10 <sup>3</sup>
20%	19,88 x 10 <sup>3</sup>
10%	10,30 x 10 <sup>3</sup>
0%	100x 10 <sup>13</sup>

# 6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A carga crítica obtida pelo método dos elementos finitos em comparação com a obtida na expressão 34 na condição de engastamento perfeito (100% de rotação teórica) teve excelente concordância dos resultados, com diferença inferior a 1%.

Os resultados obtidos até a condição de 20% de rotação teórica foram coerentes com o que era previsto. Entretanto, é necessário ensaios para caracterizar a validade da carga crítica encontrada em cada uma das situações.

Para a condição de rotação teórica de 20% (grifada em laranja) o resultado obtido ficou próximo da condição de pilar rotulado (equação 35), cerca de 17,8% superior, enquanto que para a condição de 80% de rotação teórica ocorreu uma redução de aproximadamente 12% da condição de engastamento perfeito, o que caracteriza uma certa incerteza em relação à precisão desse resultado.

Os resultados obtidos para rotações inferiores a 10% (grifadas em amarelo) não apresentaram concordância, haja vista que foram obtidos valores inferiores à condição de pilar rotulado nas extremidades dado na equação 35. Ademais, no caso em que se presume que a ligação fosse flexível (0% de rotação teórica) houve um aumento substancial da carga crítica o que evidencia que esse tipo de elemento não é próprio para o cálculo da carga crítica em estruturas de nós próximos à condição de rótula. Esse aumento ocorreu,

pois, para a condição em que  $\gamma=1$  acarreta em n=0, zerando, assim, os termos referentes à flexão e ao cisalhamento nas matrizes  $K_1$  e  $K_2$  gerando uma indeterminação ao se solucionar a equação 33.

O gráfico 1 apresenta a relação entre os resultados da Tabela 1, desconsiderando o dado de condição rotulada (0% de rotação teórica), e a carga crítica de flambagem de nós rígidos (limite superior e inferior) admitindo comportamento linear para as condições de semirrigidez.



Gráfico 1 – Carga crítica de flambagem: Nós rígidos × Nós semirrígidos.

Verifica-se que a consideração de semirrigidez do nó tem uma relação não linear com o seu grau de flexibilidade. Percebe-se também que para nós com flexibilidade inferior à 40% da rotação teórica o modelo de nós semirrígidos apresentou uma carga crítica inferior do que e fosse considerado uma distribuição linear entre os limites superior e inferior de nós rígidos, para rotação superior a 40% o modelo apresentou carga crítica mais elevada em comparação com a distribuição linear entre os limites superior e inferior.

#### 7 CONCLUSÕES

A matriz de rigidez considerando a semirrigidez dos nós apresentada nesse trabalho trouxe resultados coerentes com o que era previsto até um determinado grau de rotação relativa. Para ligações semirrígidas de elevada flexibilidade, próximas à condição de rótula, os resultados obtidos foram inconsistentes, inviabilizando o uso do elemento proposto para essas condições de vinculação.

A fim de tornar mais exata a resposta do elemento estrutural é necessário determinar com precisão qual o grau de flexibilidade que há na estrutura. Conforme observado nesse trabalho, a semirrigidez da estrutura altera de forma significativa a carga crítica de flambagem.

A carga crítica de flambagem em relação à flexibilidade dos nós apresentou comportamento não linear, indicando um aumento na capacidade resistente para baixa flexibilidade (próxima à condição de engaste) e uma redução significativa quando o nó se aproxima do comportamento flexível (próxima à condição de rótula).

Verificou-se que atribuir um comportamento linear entre os limites superior e inferior da carga crítica de flambagem não oferece bons resultados ao se comparar com a situação de nós semirrígidos. A relação linear entre os limites superior e inferior superestima a carga crítica para situação de nós próximos à condição de rótula e subestima a carga crítica para situação de nós próximos à condição de engaste.

O elemento utilizado obteve resposta coerente somente até determinado grau de flexibilidade, gerando resultados incoerentes para ligações próximas à situação de rótula. Ensaios que caracterizem a carga crítica de flambagem para as condições de semirrigidez apresentadas são necessários para verificar se a precisão dos resultados apresentados é consistente.

#### 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AISC. American Institute of Steel Construction. Fourteenth Edition - Steel Construction Manual. United States of America, 2010.

ARAÚJO, José Milton de. **Projeto estrutural de edifícios de concreto armado**, Editora Dunas, 2014.

DEL SAVIO, Alexandre Almeida. **Modelagem computacional de estruturas de aço com ligações semi-rígidas**. Dissertação de mestrado. PUC- Rio, 2004.

MACHADO, Fernando Carlos Scheffer; SILVEIRA, Ricardo Azoubel da Mota. **Formulação inelástica de segunda ordem para sistemas estruturados em aço**. REM - Revista Escola de Minas, 2005.

MARTHA, Luis Fernando. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. 1° ed. RJ: Elsevier, 2010.

PFEIL, Walter; PFEIL Michèle. Estruturas de aço: dimensionamento prático. Rio de Janeiro. LTC, 2014

PRZEMIENIECKI, J. S. Theory of Matrix Structural Analysis. McGraw-Hill, 2012.

SORIANO, Humberto Lima. Análise de Estruturas - Formulação Matricial e Implementação Computacional. RJ: Editora Ciência Moderna Ltda, 2005.

VAZ, Luiz Eloy. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas**. RJ: Elsevier, 2011.

### Study of the critical buckling load considering semi-rigid connections

#### **ABSTRACT**

This paper presents the effect of the critical buckling load on steel pillars considering the semi-rigidity in the connections. The stiffness matrix of a frame element is developed considering the semi-rigidity of the nodes, with the critical buckling load obtained through the geometric stiffness matrix of the structure using the mean stiffness matrix instead of the interactive process for the calculation of the semi-rigid matrix. A numerical comparison of the critical buckling load is performed for various bond flexibility situations. Results show that the semi-rigid stiffness matrix used in this study, as well as the mean stiffness matrix, is effective only up to a certain flexibility condition, not yielding satisfactory results for near flexible connections.

Keywords: Buckling, semi rigid, finite elements, semi rigid stiffness matrix.

#### **CONCLUSIONS**

The rigidity matrix considering the semi-rigidity of the nodes presented in this work brought results consistent with what was predicted until a certain degree of relative rotation. For semi-rigid connections, close to the hinge condition, the results obtained were inconsistent, making it impossible to use the proposed element for these boundary conditions.

In order to make the response of the structural element more accurate, it is necessary to determine precisely how much flexibility there is in the structure. As observed in this work, the semi-rigidity of the structure significantly changes the critical buckling load.

The critical buckling load in relation to the node's flexibility showed a non-linear behavior, indicating an increase in the resistant capacity for low flexibility (close to the fixed condition) and a significant reduction when the node approaches the flexible behavior (close to the hinge condition).

It has been found that assigning a linear behavior between the upper and lower limits of the critical buckling load does not give good results when comparing with the situation of semirigid nodes. The linear relationship between the upper and lower limits overestimates the critical load for nodes near the hinge condition and underestimates the critical load for nodes near the fixed condition.

The element used obtained adequate response only up to a certain degree of flexibility, leading to inconsistent results for connections close to the hinge situation. Tests that characterize the critical buckling load for the presented semi-rigidity conditions are necessary to verify if the accuracy of the presented results is consistent